数理解析研究所講究録
1114巻 1999年 33-41



# Fuzzy Linear Programming Problems as Bi-Criteria Optimization Problems

金沢大学　経済学部　　前田　隆　(Takashi MAEDA)

## 1. はじめに

ファジィ数を目的関数や制約条件式の係数とする線形計画問題，すなわち，ファジィ線形計画問題を考察する場合，目的関数値がファジィ値となるため，通常の線形計画問題と異なり，いわゆる，最適解は存在しない．このため，実行可能解および最適解の定義，さらにはファジィ線形計画問題の解釈をめぐって，多くの議論が交わされてきた．Tanaka et al. [11] は，ファジィ線形計画問題をパラメトリック線形計画問題として定式化し，最適解の性質を考察した．他方，Luhandjura [5] は，ファジィ線形計画問題を無限個の目的関数を持つ半無限計画問題として定式化し，最適解の特徴づけを行った．また，Sakawa et al. [10] では，ファジィ多目的線形計画問題において，各係数をファジィ数の $\alpha$-カット値の上限あるいは下限で置き換えた可能性多目的線形計画問題が定義され，その $\alpha$-最適解と $\alpha$-最適値の特徴づけが与えられた．

本論文の目的は，三角型のファジィ数を目的関数の係数とするファジィ線形計画問題に対し，最適解の概念を定義し，その特徴づけを行うことである．このため，ファジィ線形計画問題を2つの目的関数を持つ2目的最適化問題 (bi-criteria optimization problem) として，定式化する．

## 2. 数学的準備

ここでは，以下の分析で用いられる記号，定義および基本的な結果を与える．$R^n$ を $n$ 次元ユークリッド空間とし，$x \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n$ とする．ただし，$x_i \in R$, $i = 1, 2, \cdots, n$ であり，$T$ はベクトルの転置を表す．任意の $x$, $y \in R^n$ に対し，内積を $\langle x, y \rangle$ によって表す．さらに，$x, y \in R^n$ に対し，$x \geqq y$ iff $x_i \geqq y_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, そして $x \geq y$ iff $x \geqq y$, $x \neq y$ とかく．

**定義 2.1.** $\tilde{a}$ を実数直線 $R$ 上で定義されたファジィ集合とし，$\mu_{\tilde{a}}$ をそのメンバシップ関数とする．このとき，ある実数 $c$ が一意に存在して，

(i) $\mu_{\tilde{a}}(c) = 1$,

(ii) $\mu_{\tilde{a}}$ は $(-\infty, c]$ 上で単調非減少,

(iii) $\mu_{\tilde{a}}$ は $(c, +\infty]$ 上で単調非増加

が成立するとき，$\tilde{a}$ をファジィ数という．ファジィ数の全体からなる集合を $\mathcal{F}$ によって表す．

実数 $a \in R$ の特性関数 $\chi_a : R \to \{0,1\}$ は上の条件 (i), (ii) および (iii) を満たすので，$a \in \mathcal{F}$ である．

**定義 2.2.** $L : R \to R$ をつぎの条件を満たす任意の実数値関数とする．

(i) $L(x) = L(-x) \quad \forall x \in R$,

(ii) $L(x) = 1$ iff $x = 0$,

(iii) $L$ は $[0, +\infty)$ 上で狭義単調減少であり，かつ，$x_0 = \inf\{x > 0 \mid L(x) = 0\}$ を満たす実数 $x_0$ が存在する．

このとき，$L$ を型関数といい，実数 $x_0$ を $L$ のゼロ点という．

**定義 2.3.** $m$ を任意の実数とし，$\alpha$ を任意の正の実数とする．さらに，$L$ を任意の型関数とする．ファジィ数 $\tilde{a}$ は，メンバシップ関数 $\mu_{\tilde{a}} : R \to [0,\, 1]$ が

$$\mu_{\tilde{a}}(x) \equiv \max\left\{L\left(\frac{x-m}{\alpha}\right), 0\right\} \quad x \in R \tag{1}$$

によって与えられるとき，$L$ ファジィ数といわれる．特に，$L(x) = 1 - |x|/x^0$ であるとき，ファジィ数 $\tilde{a}$ を三角型ファジィ数という．三角型ファジィ数の全体からなる集合を $\mathcal{F}_T$ によって表す．

**定義 2.4.** (拡張原理) $f : R^n \to R$ を実数値関数とし，$\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n$ を任意のファジィ数とする．このとき，ファジィ数 $\tilde{a} \equiv f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n)$ のメンバシップ関数を

$$\mu_{\tilde{a}}(y) \equiv \sup\{\min\{\mu_{\tilde{a}_1}(x_1), \mu_{\tilde{a}_2}(x_2), \cdots, \mu_{\tilde{a}_n}(x_n)\} \mid y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$$

によって定義する．

$\tilde{a}$, $\tilde{b}$ を任意のファジィ数，$\lambda \in R$ を任意の実数とする．拡張原理から，和 $\tilde{a} + \tilde{b}$ およびスカラー倍 $\lambda\tilde{a}$ のメンバシップ関数は，それぞれ

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{a}+\tilde{b}}(t) &= \sup \min_{t=u+v} \{\mu_{\tilde{a}}(u), \mu_{\tilde{b}}(v)\}, \\
\mu_{\lambda\tilde{a}}(t) &= \max\{0, \sup_{t=\lambda u} \mu_{\tilde{a}}(u)\}
\end{aligned}$$

となる．ただし，$\sup\{\emptyset\} = -\infty$ である．

特に，$\tilde{a} \equiv (a, \alpha)_L$, $\tilde{b} \equiv (b, \beta)_L \in \mathcal{F}_L$ および正の数 $\lambda \in R$ に対し，

$$\tilde{a} + \tilde{b} \equiv (a + b, \alpha + \beta)_L, \ \lambda\,\tilde{a} \equiv (\lambda a, \lambda\alpha)_L$$

が成立する．

$\tilde{a}$ を任意のファジィ数とし，$\alpha \in [0,1]$ を任意の実数とする．このとき，

$$[\tilde{a}]^\alpha \equiv \begin{cases} \{x \in R \mid \mu_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha\} & \text{if} \quad \alpha \in (0,1], \\ \mathrm{cl}\,\{x \in R \mid \mu_{\tilde{a}}(x) > 0\} & \text{if} \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

とおき，$[\tilde{a}]^\alpha$ をファジィ数 $\tilde{a}$ の $\alpha$-レベル集合という．ただし，cl は集合の閉包である．

ファジィ数 $\tilde{a}$ が三角型であれば，任意の $\alpha \in [0,1]$ に対し，$\alpha$-レベル集合 $[\tilde{a}]^\alpha$ は閉区間となるので，これを $[a^L_\alpha, a^R_\alpha]$ によって表す．ただし，$a^L_\alpha \equiv \min\{x \in R \mid \mu_{\tilde{a}}(x) = \alpha\}$，$a^R_\alpha \equiv \max\{x \in R \mid \mu_{\tilde{a}}(x) = \alpha\}$ である．

$\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{F}_L$, we introduce three kinds of binary relations.

**定義 2.5.** $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{F}_L$ を任意のファジィ数とする．このとき，

$$\begin{aligned}
\tilde{a} \succeqq \tilde{b} \quad &\text{iff} \quad (a^L_\alpha, a^R_\alpha)^T \geqq (b^L_\alpha, b^R_\alpha)^T \quad \forall \alpha \in [0,1], \\
\tilde{a} \succeq \tilde{b} \quad &\text{iff} \quad (a^L_\alpha, a^R_\alpha)^T \geq (b^L_\alpha, b^R_\alpha)^T \quad \forall \alpha \in [0,1], \\
\tilde{a} \succ \tilde{b} \quad &\text{iff} \quad (a^L_\alpha, a^R_\alpha)^T > (b^L_\alpha, b^R_\alpha)^T \quad \forall \alpha \in [0,1]
\end{aligned}$$

とかき，二項関係 $\succeqq$, $\succeq$ および $\succ$ をそれぞれ fuzzy max order，strict fuzzy max order および strong fuzzy max order という．

定義から明らかなように，fuzzy max order $\succeqq$ は $\mathcal{F}_L$ 上の半順序関係である．

**定理 2.1.** $\tilde{a} \equiv (a, \alpha)_L$ および $\tilde{b} \equiv (b, \beta)_L$ を任意の $L$ ファジィ数とし，$x_0 \in R$ を型関数 $L$ のゼロ点とする．このとき，つぎのことが成立する．

$$\tilde{a} \succeqq \tilde{b} \quad \text{iff} \quad x_0|\alpha - \beta| \leqq a - b, \tag{2}$$

$$\tilde{a} \succ \tilde{b} \quad \text{iff} \quad x_0|\alpha - \beta| < a - b. \tag{3}$$

**定義 2.6.** 任意のファジィ数 $\tilde{a}, \tilde{b}$ に対し，不等式関係を以下のように定義する．

1. Pos $(\tilde{a} \geqq \tilde{b}) \equiv \sup\{\min(\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)) \mid x \geqq y\}$,
2. Pos $(\tilde{a} > \tilde{b}) \equiv \sup_x \{\inf_y\{\min(\mu_{\tilde{a}}(x), 1 - \mu_{\tilde{b}}(y)) \mid x \leqq y\}\}$,
3. Nes $(\tilde{a} \geqq \tilde{b}) \equiv \inf_x \left\{\sup_y\{\max(1 - \mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)) \mid x \geqq y\}\right\}$,
4. Nes $(\tilde{a} > \tilde{b}) \equiv \inf\{\max(1 - \mu_{\tilde{a}}(x), 1 - \mu_{\tilde{b}}(y)) \mid x \leqq y\}$.

**定理 2.2.** $\tilde{a}$ および $\tilde{b}$ を任意の三角型ファジィ数とし，$\alpha \in [0,1]$ とする．このとき，つぎのことが成立する．

(i) $\mathrm{Pos}(\tilde{a} \geqq \tilde{b}) \geqq \alpha$ iff $a^R_\alpha \geqq b^L_\alpha$,

(ii) $\mathrm{Pos}(\tilde{a} > \tilde{b}) \geqq \alpha$ iff $a^R_\alpha \geqq b^R_{1-\alpha}$,

(iii) $\mathrm{Nes}(\tilde{a} \geqq \tilde{b}) \geqq \alpha$ iff $a^L_{1-\alpha} \geqq b^L_\alpha$,

(iv) $\mathrm{Nes}(\tilde{a} > \tilde{b}) \geqq \alpha$ iff $a^L_{1-\alpha} \geqq b^R_{1-\alpha}$.

## 3. ファジィ線形計画問題と fuzzy max order

ここでは，ファジィ数を目的関数の係数とするファジィ線形計画問題に対し，最適解の概念を定義し，その特徴づけを行う．

まずはじめに，つぎのファジィ線形計画問題を考えよう．

$$
\text{(FLP)} \quad \left|\begin{array}{ll} \text{maximize}_x & \langle \tilde{c}, x\rangle_F \equiv \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i x_i \\ \text{subject to} & Ax \leqq b,\ x \geqq 0, \end{array}\right.
$$

ただし，$\tilde{c} \equiv (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \cdots, \tilde{c}_n)^T, \tilde{c}_i \equiv (c_i, h_i)_T \in \mathcal{F}_T$, $i = 1, 2, \cdots, n$ であり，$A \equiv (a_{ij})$ は $m \times n$ 行列，$b \equiv (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T \in R^m$ である．

以下では，議論を簡単にするため，$x^0 = 1$，すなわち型関数 $L$ のゼロ点を 1 とし，$X \equiv \{x \in R^n \mid Ax \leqq b,\ x \geqq 0\}$ はコンパクトであると仮定する．

問題 (FLP) は目的関数値がファジィ数であるために，いわゆる最適解の概念は存在しない．そこで問題 (FLP) に対し，つぎの最適解の概念を定義しよう．

**定義 3.1.** 問題 (FLP) の実行可能解 $x^* \in X$ は，すべての $x \in X$ に対し，$\langle \tilde{c}, x^*\rangle_F \geqq \langle \tilde{c}, x\rangle_F$ が成立するとき，最適解といわれる．

**定義 3.2.** 問題 (FLP) の実行可能解 $x^* \in X$ は，$\langle \tilde{c}, x\rangle_F \succeq \langle \tilde{c}, x^*\rangle_F$ を満たす実行可能解 $x \in X$ が存在しないとき，非劣解といわれる．

**定義 3.3.** 問題 (FLP) の実行可能解 $x^* \in X$ は，$\langle \tilde{c}, x\rangle_F \succ \langle \tilde{c}, x^*\rangle_F$ を満たす実行可能解 $x \in X$ が存在しないとき，弱非劣解といわれる．

問題 (FLP) の非劣解および弱非劣解の全体からなる集合をそれぞれ $X^F$ および $X^{wF}$ によって表す．このとき，$X^F \subseteq X^{wF}$ が成立する．

問題 (FLP) に関連して，つぎの 2 目的最大化問題を考察しよう:

$$
\text{(BLP)} \quad \left\{\begin{array}{ll} \text{maximize} & (\langle c, x\rangle + \langle h, x\rangle, \langle c, x\rangle - \langle h, x\rangle)^T \\ \text{subject to} & Ax \leqq b,\ x \geqq 0, \end{array}\right. \tag{4}
$$

ただし，$c \equiv (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$, $h \equiv (h_1, h_2, \cdots, h_n)^T \in R^n$ である．

問題 (BLP) に対し，最適解の概念を定義する．

**定義 3.4.** 問題 (BLP) において，実行可能解 $x^* \in X$ は，すべての $x \in X$ に対し，$(\langle c, x^*\rangle + \langle h, x^*\rangle, \langle c, x^*\rangle - \langle h, x^*\rangle)^T \geqq (\langle c, x\rangle + \langle h, x\rangle, \langle c, x\rangle - \langle h, x\rangle)^T$ が成立するとき，最適解であるといわれる．

**定義 3.5.** 問題 (BLP) において，実行可能解 $x^* \in X$ は，$(\langle c, x^*\rangle + \langle h, x^*\rangle, \langle c, x^*\rangle - \langle h, x^*\rangle)^T \leq (\langle c, x\rangle + \langle h, x\rangle, \langle c, x\rangle - \langle h, x\rangle)^T$ を満たす $x \in X$ が存在しないとき，Pareto 最適解といわれる．

**定義 3.6.** 問題 (BLP) において，実行可能解 $x^* \in X$ は，$(\langle c, x^*\rangle + \langle h, x^*\rangle, \langle c, x^*\rangle - \langle h, x^*\rangle)^T < (\langle c, x\rangle + \langle h, x\rangle, \langle c, x\rangle - \langle h, x\rangle)^T$ を満たす $x \in X$ が存在しないとき，弱 Pareto 最適解といわれる．

問題 (FLP) と (BLP) の間には，つぎの関係が成立する．証明は，いずれも簡単なので，省略する．

**定理 3.1.** 実行可能解 $x^* \in X$ が問題 (FLP) の最適解であるための必要十分条件は，$x^*$ 問題 (BLP) の最適解となることである．

**定理 3.2.** 実行可能解 $x^* \in X$ が問題 (FLP) の非劣解であるための必要十分条件は，$x^*$ 問題 (BLP) の Pareto 最適解となることである．

**定理 3.3.** 実行可能解 $x^* \in X$ が問題 (FLP) の弱非劣解であるための必要十分条件は，$x^*$ 問題 (BLP) の弱 Pareto 最適解となることである．

問題 (BLP) は２つの目的関数を持つ線形計画問題であり，Pareto 最適解および弱 Pareto 最適解を求めるためには，つぎの線形計画問題を解けばよい．

$$(\mathrm{LP}_\lambda) \qquad \begin{cases} \text{maximize} & \langle c, x\rangle + \lambda\langle h, x\rangle \\ \text{subject to} & Ax \leqq b,\ x \geqq 0, \end{cases} \tag{5}$$

ただし，$\lambda \in R$ はパラメーターである．

定義から，各 $\lambda \in [0,1]$ に対し，$\langle c, x\rangle + \lambda\langle h, x\rangle = \langle c^R_{1-\lambda}, x\rangle$ である．他方，$\lambda \in [-1,0]$ に対し，$\langle c, x\rangle + \lambda\langle h, x\rangle = \langle c^L_{1+\lambda}, x\rangle$ である．

定理 3.2 および 3.3 から，つぎの定理がえられる．

**定理 3.4.** 実行可能解 $x^* \in X$ が問題 (FLP) 非劣解であるための必要十分条件は，ある実数 $\lambda \in (-1,1)$ が存在して，$x^*$ が問題 $(\mathrm{LP}_\lambda)$ の最適解となることである．

**定理 3.5.** 実行可能解 $x^* \in X$ が問題 (FLP) 非劣解であるための必要十分条件は，ある実数 $\lambda \in [-1,1]$ が存在して，$x^*$ が問題 $(\mathrm{LP}_\lambda)$ の最適解となることである．

## 4. 可能性最大化問題と必然性最大化問題

前節では，ファジィ線形計画問題 (FLP) を非劣解，あるいは弱非劣解を求める問題として定義した．ここでは，問題 (FLP) に対し，もうひとつのアプローチを提案しよう．

問題 (FLP) に関連して，つぎのベクトル値最大化問題を考えよう．

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} \text{maximize} & (\mathrm{Pos}(\langle \tilde{c}, x\rangle_F \geqq v), v)^T \\ \text{subject to} & Ax \leqq b,\ x \geqq 0,\ v \in V, \end{cases} \tag{6}$$

ただし，$V \equiv [v_1, v_0]$, $v_0 \equiv \max_{x \in X} \langle c_0^R, x \rangle$, $v_1 \equiv \max_{x \in X} \langle c_1^R, x \rangle$ である．

問題 (P) は，目的関数の目標値 $z \in R$ と目的関数の値が目標値以上である可能性とを同時に最大化する 2 目的最大化問題である．以下では，問題 (P) を可能性最大化問題という．問題 (P) の Pareto 最適解の全体からなる集合を $X^P$ によって表そう．このとき，つぎの定理が成立する．

**定理 4.1.** $(x^*, v^*) \in X \times V$ を問題 (P) の Pareto 最適解とし $\lambda \equiv \mathrm{Pos}(\langle \tilde{c}, x^* \rangle_F \geqq v^*)$ とおく．このとき，$x^*$ は問題 ($\mathrm{LP}_{1-\lambda}$) の最適解であり，$v^* = \langle c, x^* \rangle + (1-\lambda)\langle h, x^* \rangle = \langle c_\lambda^R, x^* \rangle$ が成立する．逆に，$x^* \in X$ を問題 ($\mathrm{LP}_{1-\lambda}$), $\lambda \in [0,1]$ の最適解とし，$v^* \equiv \langle c, x^* \rangle + (1-\lambda)\langle h, x^* \rangle$ とおく．このとき，$(x^*, v^*)$ は問題 (P) の Pareto 最適解であり，$\lambda = \mathrm{Pos}(\langle \tilde{c}, x^* \rangle_F \geqq v^*)$ が成立する．

定理 4.1 から，問題 ($\mathrm{LP}_\lambda$) は問題 (P) のスカラー化問題であることがわかる．すなわち，問題 (P) の Pareto 最適解を求めるためには，線形計画問題 ($\mathrm{LP}_\lambda$) の最適解を求めればよい．したがって，定理 3.4, 3.5 および 4.1 から，つぎの定理がえられる．

**定理 4.2.** $(x^*, v^*) \in X \times V$ が問題 (P) の Pareto 最適解であれば，このとき，$x^*$ は問題 (FLP) の弱非劣解である．さらに，$\mathrm{Pos}(\langle \tilde{c}, x^* \rangle_F \geqq v^*) > 0$ であれば，このとき，$x^*$ は問題 (FLP) の非劣解である．すなわち，

定理 4.2 において，逆の関係は一般には成立しないことに注意しよう．

問題 (P) において，目的関数 $\mathrm{Pos}(\langle \tilde{c}, x \rangle_F \geqq v)$ を $\mathrm{Nes}(\langle \tilde{c}, x \rangle_F \geqq w)$ によって置き換えると，つぎの必然性最大化問題がえられる:

$$
\text{(N)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \text{maximize} & (\mathrm{Nes}(\langle \tilde{c}, x \rangle_F \geqq w), w)^T \\ \text{subject to} & Ax \leqq b,\ x \geqq 0,\ w \in W, \end{array} \right. \tag{7}
$$

ただし，$W \equiv [w_0, v_1]$, $w_0 \equiv \max_{x \in X} \langle c_0^L, x \rangle$ である．

問題 (N) の Pareto 最適解の全体からなる集合を $X^N$ によって表そう．このとき，つぎの定理が成立する．

**定理 4.3.** $(x^*, w^*) \in X \times W$ を問題 (N) の Pareto 最適解とし，$\lambda \equiv 1 - \mathrm{Nes}(\langle \tilde{c}, x^* \rangle_F \geqq w^*)$ とおく．このとき，$x^*$ は問題 ($\mathrm{LP}_{\lambda-1}$) の最適解であり，$w^* = \langle c_\lambda^L, x^* \rangle = \langle c + (\lambda-1)h, x^* \rangle$ が成立する．逆に，$x^* \in X$ が問題 ($\mathrm{LP}_{\lambda-1}$), $\lambda \in [0,1]$ の最適解であれば，このとき，$(x^*, w^*)$ は問題 (N) の Pareto 最適解であり，$\mathrm{Nes}(\langle \tilde{c}, x^* \rangle \geqq w^*) = 1 - \lambda$ が成立する．ただし，$w^* \equiv \langle c + (\lambda - 1)h, x^* \rangle$ である．

定理 4.3 から，可能性最大化問題 (P) と同様，問題 ($\mathrm{LP}_\lambda$) は問題 (N) のスカラー化問題であることがわかる．したがって，定理 3.4, 3.5 および 4.3 から，つぎの定理がえられる．

**定理 4.4.** $(x^*, w^*) \in X \times W$ が問題 (N) の Pareto 最適解であれば，このとき，$x^*$ は問題 (FLP) の弱非劣解である．さらに，$\mathrm{Nes}(\langle \tilde{c}, x^* \rangle \geqq w^*) < 1$ であれば，このとき，$x^*$ は問題 (FLP) の非劣解である．

**定理 4.5.** $x^* \in X$ が問題 (FLP) の弱非劣解であれば，このとき，ある実数 $\lambda \in [-1,1]$ が存在して，$(x^*, \langle c+\lambda \langle h, x^* \rangle \rangle)$ は問題 (P) あるいは (N) の Pareto 最適解である．

**定理 4.6.** $x^* \in X$ が問題 (FLP) の非劣解であれば，このとき，ある実数 $\lambda \in (-1,1)$ が存在して，$(x^*, \langle c+\lambda \langle h, x^* \rangle \rangle)$ は問題 (P) あるいは (N) の Pareto 最適解である．

定理 4.2, 4.5, 4.4 および 4.6 から，つぎの系が導かれる．

**系 4.1.** 問題 (FLP) において，つぎのことが成立する．

$$
\begin{aligned}
X^{wF} &= \{x \in X \mid (x,v) \in X^P\} \bigcup \{x \in X \mid (x,w) \in X^N\}, \\
X^{F} &= \{x \in X \mid (x,v) \in X^P, \mathrm{Pos}(\langle \tilde{c}, x\rangle \geqq v) > 0\} \bigcup \{x \in X \mid (x,w) \in X^N, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{Nes}(\langle \tilde{c}, x\rangle \geqq w) < 1\}.
\end{aligned}
$$

系 4.1 から，問題 (FLP) の非劣解および弱非劣解を求めることと，問題 (P) と (N) のパレート最適解を求めることが同値である，すなわち，問題 (FLP) と問題 (P) と (N) の組とが同値であることがわかる．

つぎに，問題 (FLP) の最適値 $\tilde{Z}$ のメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{Z}}: R \to [0,1]$ を求めよう．

任意に $(x,v) \in X^P$ をとり，$\phi(v) \equiv \mathrm{Pos}(\langle \tilde{c}, x\rangle_F \geqq v)$ とおこう．さらに，実数値関数 $\Phi: R \to [0,1]$ を

$$
\Phi(v) \equiv \begin{cases} 1 & \text{if} \quad v \in (-\infty, v_1), \\ \phi(v) & \text{if} \quad v \in V, \\ 0 & \text{if} \quad v \in (v_0, \infty) \end{cases} \tag{8}
$$

によって定義しよう．このとき，$\Phi(v)$ は，問題 (FLP) の最適値 $\tilde{Z}$ が目標値 $v \in V$ 以上である可能性を表している．$V = \{v \in V \mid (x,v) \in X^P\}$ が成立するので，すべての $v \in V$ に対し，$\Phi(v)$ は実数値として確定することに注意しよう．

同様に，任意に $(x,w) \in X^N$ をとり，$\psi(w) \equiv \mathrm{Nes}(\langle \tilde{c}, x\rangle_F \geqq w)$ とおこう．さらに，実数値関数 $\Psi: R \to [0,1]$ を

$$
\Psi(w) \equiv \begin{cases} 1 & \text{if} \quad w \in (-\infty, w_0), \\ \psi(w) & \text{if} \quad w \in W, \\ 0 & \text{if} \quad w \in (v_1, \infty). \end{cases} \tag{9}
$$

によって定義しよう．このとき，$\Psi(w)$ は，問題 (FLP) の最適値が，任意に与えられた目標値 $w \in W$ である必然性を表している．$W = \{w \in W \mid (x,w) \in X^N\}$ が成立するので，すべての $w \in W$ に対し，$\Psi(w)$ は実数値として確定すること注意しよう．

このとき，$\tilde{Z}$ のメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{Z}}: R \to [0,1]$ は

$$
\mu_{\tilde{Z}}(v) \equiv \min\{1 - \Psi(v), \Phi(v)\} \tag{10}
$$

によって与えられる．

この関数 $\mu_{\tilde{Z}}$ がメンバシップ関数の条件 (i), (ii), および (iii) を満たすことは明らかである．さらに，最適値 $\tilde{Z}$ の中心は，$\Phi(v) = 1$, $\Psi(v) = 1$ から，問題 $(\mathrm{LP}_0)$ の最適値である．

## 5. 数値例

つぎのファジィ線形計画問題を考えよう:

$$(\mathrm{FLP}_1)\quad \begin{cases} \text{maximize} & \tilde{10}x_1 + \tilde{34}x_2 \\ \text{subject to} & 3x_1 + 10x_2 \leqq 1200 \\ & 7x_1 + 25x_2 \leqq 2950 \\ & 8x_1 + 25x_2 \leqq 3075 \\ & 0 \leqq x_1 \leqq 180 \\ & 0 \leqq x_2 \leqq 100, \end{cases} \tag{11}$$

ただし，$\tilde{10} \equiv (10,3)_T$ and $\tilde{34} \equiv (34,7)_T$ である．

問題 $(\mathrm{FLP}_1)$ に関連するパラメトリック線形計画問題は，

$$\begin{cases} \text{maximize} & 10x_1 + 34x_2 + \lambda(3x_1 + 7x_2) \\ \text{subject to} & 3x_1 + 10x_2 \leqq 1200 \\ & 7x_1 + 25x_2 \leqq 2950 \\ & 8x_1 + 25x_2 \leqq 3075 \\ & 0 \leqq x_1 \leqq 180 \\ & 0 \leqq x_2 \leqq 100, \end{cases}$$

となる．ただし，$\lambda \in [-1,1]$ はパラメーターである．

簡単な計算によって，

$$X^{wF} = X^F = [(\frac{450}{7}, 100), (100, 90)] \bigcup [(100, 90), (150, 75)]$$

がえられる．ただし，$[x,y]$ は 2 点 $x$ と $y$ を結ぶ線分である．さらに，問題 $(\mathrm{FLP}_1)$ の最適値 $\tilde{Z}$ のメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{Z}} : R \to [0,1]$ は

$$\mu_{\tilde{Z}}(v) = \begin{cases} (5025 - v)/975 & \text{if} \quad 39400/9 \leqq v \leqq 5025, \\ (4990 - v)/930 & \text{if} \quad 4060 \leqq v \leqq 39400/9, \\ (v - 3130)/930 & \text{if} \quad 47200/13 \leqq v \leqq 4060, \\ (7v - 22050)/6250 & \text{if} \quad 17550/7 \leqq v \leqq 47200/13, \\ 0 & \quad\quad \text{otherwise} \end{cases} \tag{12}$$

となる．

## 6. おわりに

本論文では，ファジィ数を目的関数の係数とするファジィ線形計画問題 (FLP) に対し，fuzzy max order を用いて，非劣解および弱非劣解を定義し，その特徴づけを行った．特に，これらの解は，2 目的最大化問題の Pareto 最適解として特徴づけられることが示された．さらに，可能性最大化問題と必然性最大化問題を定義し，これらの問題の Pareto 最適解と非劣解および弱非劣解との関連が考察された．

なお，本論文では対称な三角型ファジィ数を分析の対象としたが，非対称な三角型ファジィ数を考察する場合，３つの目的関数を最大化するベクトル値最大化問題を考察すればよい．また，非線形のファジィ数理計画問題についても，本論文の結果の一部は，そのまま成立する．

## 参考文献


[1] Campose, L., and J. L. Verdegay, "Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 32, 1989, pp. 1–11.

[2] Dubois, D., and H. Prade, "Systems of linear fuzzy constraints," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 3, 1980, pp. 37–48.

[3] Dubois, D., and H. Prade, "Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory," *Information Science*, Vol. 30, 1983, pp. 183–224.

[4] 乾口雅弘, 久米靖文 「ファジィ多目的計画問題の解に対する概念」, 日本ファジィ学会誌, 2, 1990, pp. 65 – 78.

[5] Luhandjura, M. K., "Linear programming with a possibilistic objective function," *European Journal of Operations Research*, Vol. 13, 1987, pp. 137–145.

[6] 前田隆 『多目的意思決定と経済分析』 牧野書店, 1996.

[7] Maeda, T., "Fuzzy linear programming problems as bi-criteria optimization problems," 7 th Bellman continum, in SantaFe, 1998.

[8] Ramík, J., and J. Římánek, "Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 16, 1985, pp. 123–150.

[9] 坂和正敏 『ファジィ理論の基礎と応用』 森北出版, 1989.

[10] Sakawa, M. and H. Yano, "Feasibility and Pareto optimality for multiobjective programming problems with fuzzy parameters," *Fuzzy set and systems*, Vol. 43, No. 1, 1991, pp. 1 – 15.

[11] Tanaka, H., H. Ichihashi and K. Asai, "A formulation of fuzzy Linear programming problem based on comparison of fuzzy numbers," *Control and Cybernetics*, Vol. 13 (3), 1984, pp. 185–194.