

A Minimization Problem for the First Dirichlet Eigenvalue and Numerical Results

電気通信大学 今井 正城 (Masaki Imai)
東京都立大学 倉田和浩 (Kazuhiro Kurata)
電気通信大学 大西勇 (Isamu Ohnishi)

1 A Minimization Problem

この論文を通じて、 $n \geq 1$ とし、 Ω を \mathbf{R}^n の有界領域でその境界 $\partial\Omega$ は Lipschitz 連続であるとする。 $\alpha > 0$ および Ω の可測部分集合 D が与えられたとき、作用素

$$-\Delta + \alpha\chi_D$$

の Dirichlet zero 境界条件の下での第一固有値を $\lambda_\Omega(\alpha, D)$ と書く。ここで χ_D はいわゆる D の特性関数と呼ばれるもので、 $\chi_D(x) = 1(x \in D)$ かつ $\chi_D(x) = 0(x \notin D)$ で定まる関数である。 $\lambda_\Omega(\alpha, D)$ は、よく知られているように次の変分的特徴付けを持つ。

$$\lambda_\Omega(\alpha, D) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \alpha \int_D u^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}. \quad (1)$$

このとき付随する第一固有関数を $\phi(x)$ とおくと、 $\phi(x)$ は Ω 上で定符号となり、

$$\begin{aligned} -\Delta\phi(x) + \alpha\chi_D(x)\phi(x) &= \lambda_\Omega(\alpha, D)\phi(x), & x \in \Omega \\ \phi(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

を (弱解として) 満たす。よって以下では常に $\phi(x) > 0 (x \in \Omega)$ とし、

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega)} = 1$$

と正規化するものとする。また Elliptic regularity theorem(see [GT,8,9章]) より、ある $\beta \in (0, 1)$ とすべての $\gamma \in (0, 1)$ に対して

$$\phi \in C^{0,\beta}(\bar{\Omega}) \cap C^{1,\gamma}(\Omega)$$

となることがわかるが、 χ_D の不連続性から ϕ は $C^2(\Omega)$ には属さないことを注意しておく。さて、 $A \in (0, |\Omega|)$ に対して (ここで、 $|\Omega|$ は Ω の n 次元ルベーグ測度とする) 部分集合 $D(\text{configuration})$ を次のクラス $\mathcal{C}(A)$ に制限する:

$$\mathcal{C}(A) = \{D \subset \Omega; |D| = A\}.$$

但し、2つの部分集合 D_1 と D_2 は $\chi_{D_1}(x) = \chi_{D_2}(x)$ a.e. $x \in \Omega$ ならば同一視するものと約束する。そこで、一種の固有値最適化問題である次の **Minimization Problem** を考える。 $\Omega, \alpha > 0$ 及び $A \in (0, |\Omega|)$ を固定して、

$$\Lambda_\Omega(\alpha, A) = \inf_{D \in \mathcal{C}(A)} \lambda_\Omega(\alpha, D) \quad (3)$$

と置く。このとき、我々の問題は次のとおりである。

(a) まず、 $\Lambda_\Omega(\alpha, A)$ を実現する $D^* \in \mathcal{C}(A)$ (こういう D^* を **optimal shape** と呼び、付随する固有関数 u と合わせて (u, D^*) を **optimal pair** と呼ぶ) は、実際に存在するのか?

(b) optimal shape D^* が存在するとき unique か? さらに、optimal shape D^* の形状を詳しく調べ、できれば決定せよ。

この問題の物理的意味について少し説明しておこう。 $\lambda_\Omega(\alpha, D)$ は、量子力学において粒子が領域 Ω に完全に閉じ込められていて、さらに Ω の内部の部分 D に高さ $\alpha > 0$ のポテンシャルの壁があり、その中を粒子が運動するときの基底状態のエネルギーを表す。体積一定という条件のもとで、そのポテンシャルの壁の立つ部分 D のありとあらゆる場合の中で、最もその基底状態エネルギーを小さくするには、どのようにポテンシャルの壁を立てればいいのか、というのが我々の Minimization Problem である。

以下では、この Minimization Problem に関して最近 [CGIKO], [CGK] において得られた結果をもとに、今までわかっている事実の解説と Numerical Results に基づくいくつかの予想や今後の問題についての説明を行なう。Numerical Results は optimal shape の symmetry-breaking などの興味深い現象を示唆し、[CGIKO], [CGK] での理論的結果をささえてきたのみならず、その他のさまざまな現象に関するさらなる理論的予想を示唆してきた。Optimal shape は、もちろんパラメータ (Ω, α, A) のパラメータ領域によって異なる形状を与え、時として複雑であり直観的な想像を越えている場合があり、Numerical results が大いに助けになる。この論文では、そうしたいくつかの詳細な Numerical Results を中心とした解説を主目的とし、さらなる今後の指針としたい。

以下の構成は次のとおりである。Section 2 で optimal shape は必ず存在することを述べ、さらにその optimal shape の一般的性質のいくつかを述べる。Section 3 で Ω が特に球の場合の optimal shape について述べる。さらに、1次元の場合に、さらに詳しい **Monotonicity** についての結果を述べる。Section 4 で Ω が \mathbf{R}^2 のダンベル型領域または円環領域の場合に、あるパラメータ領域 (Ω, α, A) においては、optimal shape は Ω の持つ symmetry をくずす **symmetry-breaking** の現象について述べる。Section 5 で我々の **Numerical Scheme** を説明し、それによって得られたさまざまな数値計算結果を与え、それから導かれるいくつかの予想を述べる。また Section 3 での結果を基に、1次元でのこの Scheme の収束を論じる。Section 6 で関連する問題について述べる。

2 Optimal Shape の存在

Theorem 1 ([CGIKO]) 任意の $\alpha > 0$ と $A \in (0, |\Omega|)$ に対して、optimal pair (u, D^*) が存在する。さらに、任意の optimal pair (u, D^*) は次の性質を持つ。

(a) ある $\beta \in (0, 1)$ とすべての $\gamma \in (0, 1)$ に対して、次が成り立つ。

$$u \in C^{0,\beta}(\bar{\Omega}) \cap H^2(\Omega) \cap C^{1,\gamma}(\Omega).$$

(b) ある $t > 0$ があって、 $D^* = \{x \in \Omega; u(x) \leq t\}$ と書ける。

(c) $n \geq 2$ かつ $\alpha = \bar{\alpha}_\Omega(A)$ で $s = t$ の場合を除いて、任意の level set $\{x \in \Omega; u(x) = s\}$, $s \geq 0$ の n 次元ルベーク測度はゼロである。

ここで、上に現れた $\bar{\alpha}_\Omega(A)$ であるが、 $\Lambda_\Omega(\alpha, A) = \alpha$ となる $\alpha > 0$ が unique であることがわかっており、その unique な α を $\bar{\alpha}_\Omega(A)$ で表すものとする。

Remark 1 $\alpha \neq \bar{\alpha}_\Omega(A)$ では、測度ゼロの部分の違いは同一視されるので、

$$D^* = \{x \in \Omega; u(x) < t\}$$

としてよい。Theorem 1 (c) で、 $n \geq 2$ で $\alpha = \bar{\alpha}_\Omega(A)$ の場合、 $\{x \in \Omega; u(x) = t\}$ の測度は正となる可能性は否定されていないが、我々はこの場合でも $\{x \in \Omega; u(x) = t\}$ の測度はゼロとなると信じている。

Theorem 1(b), (c) の証明は [CGIKO] を参照してもらうことにして、Numerical scheme との関係上、ここでは optimal pair の存在証明のみを与えておく。

Optimal Pair の存在証明: $\Omega, \alpha > 0, A$ を固定するので、簡単のため

$$\Lambda = \Lambda_\Omega(\alpha, A), \quad \lambda(D) = \lambda_\Omega(\alpha, D)$$

と書くことにする。まず $\{D_j\} \subset \mathcal{C}(A)$ を minimizing sequence とする, i.e. $\lambda(D_j) \rightarrow \Lambda$ as $j \rightarrow \infty$. $u_j \in H_0^1(\Omega)$ を $-\Delta + \alpha \chi_{D_j}$ に対する正の L^2 -normalized 第一固有関数とする。 $\lambda(D_j)$ の有界性から、 $\{u_j\}$ は $H_0^1(\Omega)$ で有界列となる。また $\{\chi_{D_j}\}$ は (例えば) $L^2(\Omega)$ で有界列。よって、適当な部分列 $\{u_{j_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{u_j\}$, $\{\chi_{D_{j_k}}\}_{k=1}^\infty \subset \{\chi_{D_j}\}$ と $u \in H_0^1(\Omega)$, $\eta \in L^2(\Omega)$ が存在して、 u_{j_k} は u に $H_0^1(\Omega)$ で弱収束、 $L^2(\Omega)$ で強収束し、そして $\chi_{D_{j_k}}$ は η に $L^2(\Omega)$ で弱収束する。このとき、任意の $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega \chi_{D_{j_k}} u_{j_k} \psi \, dx \rightarrow \int_\Omega \eta u \psi \, dx$$

が成り立つことがすぐわかる。従って、

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx + \alpha \int_\Omega \eta u \psi \, dx = \Lambda \int_\Omega u \psi \, dx \quad (4)$$

が任意の $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して成立。また $\chi_{D_{j_k}}$ が η に $L^2(\Omega)$ で弱収束することと、 $|D_{j_k}| = A$ であることから、次が成り立つことがわかる。

$$\int_\Omega \eta \, dx = A, \quad 0 \leq \eta(x) \leq 1 \text{ a.e. } x \in \Omega. \quad (5)$$

実際、 $\eta(x) \leq 1$ を背理法で示す。もしある $\epsilon > 0$ と $S \subset \Omega$ で $\eta(x) \geq 1 + \epsilon (x \in S)$ かつ $|S| > 0$ なるものがあるとしよう。弱収束性より、

$$\int_{\Omega} \chi_{D_{j_k}} \chi_S dx \rightarrow \int_{\Omega} \eta \chi_S dx \geq (1 + \epsilon) |S|.$$

一方、 $|\int_{\Omega} \chi_{D_{j_k}} \chi_S dx| \leq |S|$. これは矛盾。 $\eta(x) \geq 0$ も同様に示される。

このことより上の (4) は任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対しても成立。よって、Elliptic regularity theorem (see [GT, 8, 9 章]) より u は Theorem 1 (a) の性質を持つ。また $u(x) > 0 (x \in \Omega)$ もわかる。 $\int_{\Omega} u^2 dx = 1$ より

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} \eta u^2 dx = \Lambda. \quad (6)$$

ここで Minimization Problem:

$$\inf_{\{\eta; \int \eta dx = A, 0 \leq \eta(x) \leq 1\}} \int_{\Omega} \eta u^2 dx \quad (7)$$

は解 $\eta = \chi_D$ を持つことに注意しよう ([LL, Theorem 1.14] を参照)。 D は $|D| = A$ で

$$\{x \in \Omega; u(x) < t\} \subset D \subset \{x \in \Omega; u(x) \leq t\}, \quad t = \sup\{s; |\{x \in \Omega; u(x) < s\}| < A\}$$

なる任意の可測集合である。よって、

$$\begin{aligned} \Lambda \leq \lambda(D) &\leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} \chi_D u^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} \eta u^2 dx \leq \Lambda. \end{aligned} \quad (8)$$

これより、 $\lambda(D) = \Lambda$ かつ u は $-\Delta + \alpha \chi_D$ の第一固有関数となり、optimal pair (u, D) が得られた。またこのとき $\eta = \chi_D$ が成り立つ。□

次の Lemma 1 より、上の列 $\chi_{D_{j_k}}$ に対して $\chi_{D_{j_k}} \rightarrow \chi_D$ が $L^2(\Omega)$ 強収束の意味で成り立つ。従って、 $A \ominus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ なる記号を用いると

$$|D_{j_k} \ominus D| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (9)$$

が成り立つことになる。このことから、上の証明の状況で、実際には u_{j_k} は u に $H^1(\Omega)$ で強収束し、さらに例えば

$$\|u_{j_k} - u\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (10)$$

が成り立つことになることを注意しておこう。

Lemma 1 Ω は有界集合とする。 χ_{D_j} が η に $L^2(\Omega)$ 弱収束するとする。このとき、 η がある集合 D の特性関数であることと、 χ_{D_j} が η に $L^2(\Omega)$ 強収束することとは同値である。

証明は [De, Lemma 1] を参照されたい。 Theorem 1 より、optimal shape D^* の連結性についての次の結果が導かれる。

Theorem 2 ([CGIKO]) $\alpha > 0$ と $A \in (0, |\Omega|)$ を固定し、 D^* を *optimal shape* とする。このとき、

(a) D^* は $\partial\Omega$ の管状近傍を含む。

(b) $\alpha < \bar{\alpha}_\Omega(A)$ とすると、 D^* の内部のいかなる連結成分 D_0 に対しても $\overline{D_0} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ が成り立つ。

特に、もし Ω が単連結で $\alpha < \bar{\alpha}_\Omega(A)$ ならば、 D^* は連結となる。

Theorem 2(a) は Theorem 1 (b) より明らか。Theorem 2(b) は、 $\alpha < \bar{\alpha}_\Omega(A)$ であることと $\Lambda_\Omega(\alpha, A) > \alpha$ であることは同値であるという事実と最大値原理から導かれる ([CGIKO] 参照)。その他に *optimal shape* の一般的な性質としては、**Free Boundary** ∂D^* の正則部分 (i.e. $\{x \in \partial D^*; |\nabla u(x)| \neq 0\}$) は C^∞ であること、 α が十分小さい場合の *optimal shape* は Laplacian の第一固有関数の level set で近似的に control されることなどが [CGIKO] で示されていることを注意しておく。

3 Ω が球の場合の Optimal Shape

Ω が球の場合や 1 次元の場合は *optimal shape* は、次の定理で unique に決定される。

Theorem 3 ([CGIKO]) $\Omega = B_R(0) = \{x \in \mathbf{R}^n; |x| < R\}$ 、 $\alpha > 0$ 、 $A \in (0, |\Omega|)$ を固定する。このとき *optimal shape* D^* は *unique* に定まり、

$$D^* = \{x \in \mathbf{R}^n; r(A) < |x| < R\}$$

と書ける。ここで、 $r(A)$ は $|D^*| = A$ によって定まる定数である。実際 $r(A) = (R^n - (A/\omega_n))^{1/n}$ で、 ω_n は n 次元単位球の体積。

この定理は [CGIKO] で次の一般化された定理の系として証明されている。

Theorem 4 ([CGIKO]) $\alpha \neq \bar{\alpha}_\Omega(A)$ を仮定する。 Ω が x_1 軸に関して対称かつ凸ならば、任意の *optimal pair* (u, D) に対して、 u も D^c も x_1 軸に関して対称かつ凸で、 u は x_1 に関して $x_1 \geq 0$ で単調減少になる。

一般的な Theorem 4 の証明は [CGIKO] にゆずるが、その証明は rearrangement 不等式を用いるものである。

1 次元の場合、 $\Omega = (-R, R)$ として $D^* = (-R, -r(A)) \cup (r(A), R)$ が *unique* な *optimal shape* であることが、上の Theorem 3 からわかるが、その証明では個々の configuration D_1, D_2 に対して、 $\lambda_\Omega(\alpha, D_1)$ と $\lambda_\Omega(\alpha, D_2)$ との比較を与えるものではない。ここで、 D のクラスを制限してその単調性についての結果を紹介する。 $A \in (0, |\Omega|) = (0, 2R)$ を固定し、1 パラメータ l が $0 < l < A$ に対して $l' = A - l$ とし、

$$D(l) = (-R, -R+l) \cup (R-l', R)$$

なる部分集合を考える。 $\lambda(l)$ で $-\Delta + \alpha \chi_{D(l)}$ の第一固有値、 $u_l(x)$ で付随する固有関数を表す。このとき、 $\lambda(l)$ のパラメータ l に関する Monotonicity が成り立つ。座標が $-R+l$ および $R-l'$ である点をそれぞれ P, Q で表すものとする。

Theorem 5 $\Omega = (-R, R)$, $\alpha > 0$, $A \in (0, 2R)$ とする。このとき、各 $0 < l < A$ に対して、

$$\frac{d\lambda(l)}{dl} = \alpha \left(u_l(P)^2 - u_l(Q)^2 \right) \quad (11)$$

が成り立つ。また、 $l > A/2$ なるとき、

$$u_l(P) > u_l(Q)$$

が成り立つ。特に、次のことが成り立つ。

$$\frac{d\lambda(l)}{dl} > 0 \quad \left(l > \frac{A}{2} \right), \quad \frac{d\lambda(l)}{dl} < 0 \quad \left(l < \frac{A}{2} \right).$$

(11) は一種の Hadamard の変分公式に他ならない。この定理は本質的には [HKK] で示されていることの特別な場合であるが、その証明の概略を与えておく。

Theorem 5 の証明の概略: 以下 ϵ は十分小さいものとし、簡単のため $\epsilon > 0$ として示す。まず、 $\|u_{l+\epsilon}\|_{L^\infty(\Omega)}$ は ϵ に関して一様に有界となることに注意する。このとき、ある定数 C があって、

$$|\lambda(l+\epsilon) - \lambda(l)| \leq C\epsilon, \quad (12)$$

$$\|u_{l+\epsilon} - u_l\|_{L^\infty(\Omega)} = o(1) \quad (13)$$

が成り立つことがわかる。実際、最初の不等式 (12) は変分的特徴づけから容易に導かれる。(13) は、まず $u_{l+\epsilon}$ が u_l に $L^2(\Omega)$ 強収束することがわかるので、 $w(\epsilon) = u_{l+\epsilon} - u_l$ が満たす方程式

$$-\Delta w(\epsilon) + (\alpha \chi_{D_{l+\epsilon}} - \lambda(l))w(\epsilon) = (\lambda(l+\epsilon) - \lambda(l))u_{l+\epsilon} - \alpha(\chi_{D_{l+\epsilon}} - \chi_{D_l})u_l$$

に、 L^∞ 評価 (see, e.g., [GT, Theorem 8.15]) を適用して、(12) などから得られる。

さて、 $u_{l+\epsilon}$, u_l が満たす弱形式にそれぞれ u_l , $u_{l+\epsilon}$ を試験関数として代入し、差し引くことにより、

$$(\lambda(l+\epsilon) - \lambda(l)) \int_{\Omega} u_{l+\epsilon} u_l dx = \alpha \int_{\Omega} (\chi_{D_{l+\epsilon}} - \chi_{D_l}) u_{l+\epsilon} u_l dx$$

が得られる。これから、(12) と (13) より

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(l+\epsilon) - \lambda(l)}{\epsilon} &= \frac{\alpha}{\epsilon} \int_{\Omega} (\chi_{D_{l+\epsilon}} - \chi_{D_l}) u_l^2 dx + o(1) \\ &= \frac{\alpha}{\epsilon} \left(\int_P^{P+\epsilon} u_l^2 dx - \int_{Q-\epsilon}^Q u_l^2 dx \right) + o(1) \end{aligned}$$

を得る。よって、(11) が得られる。

後半は、点 P, Q の中点 T に関する折り返しを考える。 $\Sigma = (T, R)$ とおき、 $x \in \Sigma$ に対して、 x^T で $x = T$ に関する折り返しの点を表すものとする。 $v(x) = u_l(x) - u_l(x^T)$ とおくと、仮定 $l > A/2$ より

$$-\Delta v(x) + \alpha \chi_{D(l)} v(x) = \lambda(l) v(x), \quad x \in \Sigma$$

を満たすことに注意する。また、 $\partial\Sigma$ 上で $v(x) \leq 0$ で $v \neq 0$ であることにも注意する。もし、 Σ 内で $\{v(x) > 0\}$ の成分があったとしたら、作用素 $-\Delta + \alpha\chi_{D(l)}$ に対して、 v はその成分 O の上での第一固有値を $\lambda(l)$ とする第一固有関数ということになるが、もともと $\lambda(l)$ は $\Omega \setminus O, \Omega \neq O$ 上での第一固有値であったことに矛盾することになる。従って、 $v(x) \leq 0$ ($x \in \Sigma$) となる。さらに、強最大値原理から

$$v(x) = u_l(x) - u_l(x^T) < 0, \quad x \in \Sigma$$

が成り立つ。これより結論が得られる。□

4 Symmetry Breaking Phenomena

ここでは、2次元平面で軸対称性をもつダンベル型領域や、回転対称性をもつ円環領域に対して、あるパラメータ領域ではそれら領域の持つ対称性が optimal configuration ではなくずれるという、symmetry-breaking 現象についての [CGIKO] の理論的結果を紹介する。その証明は [CGIKO] を参照していただきたい。

Theorem 6 ([CGIKO]) $\alpha > 0$ と $\delta > 0$ を固定する。 $a > 0$ に対して $\Omega_a = \{x \in \mathbf{R}^2; a < |x| < a+1\}$ と置く。このとき、ある $a_0 = a_0(\alpha, \delta)$ があって、つぎのことが成り立つ。任意の $a > a_0$ に対して D を Ω_a に対するパラメータ $\alpha, A = \delta|\Omega_a|$ に関する optimal shape とするとき、 D は球対称ではない。

これは、いわば円環領域が非常に thin であるときには symmetry-breaking が起こる、というものであり Figure 4 の数値計算でその様子がわかる。一方、円環領域が thick な場合は、optimal shape は球対称となることが Figure 3 の数値計算から予想される。

Theorem 7 ([CGIKO]) $h \in (0, 1)$ を固定して、ハンドル幅 $2h$ のダンベル型領域を

$$\Omega_h = B_1(-2, 0) \cup ((-2, 2) \times (-h, h)) \cup B_1(2, 0)$$

で定める。但し $B_r(p) = \{x \in \mathbf{R}^2; |x - p| < r\}$ である。 $\alpha > 0, A \in (0, 2\pi)$ を固定する。このとき、ある $h_0 = h_0(\alpha, A) > 0$ があって、次の主張が任意の $h < h_0$ に対して成り立つ。

(a) いかなる optimal pair (u, D) も x_2 軸に関して対称でない。

(b) もし、 $A > \pi$ ならば、いかなる optimal pair (u, D) に対しても、 D^c は $B_1(\pm 2, 0)$ のいずれかの球に含まれる。

(b) は、symmetry-breaking 以上のことを言っている。このとき、Figure 6(b) の数値計算で見られるように、さらに D^c の連結成分はただ1つであることが予想される。また $A \rightarrow |\Omega|$ の極限で、 D^c は以下なる集合に近付くのであろうか? [CGIKO], [CGK] にこの点に関する考察がなされている。

Symmetry-breaking が起きていれば、素朴な意味で optimal shape の uniqueness はくずれていることになる。これらの現象は、 Ω, α を固定し、 A の値をパラメータとして動かして、 $A \sim |\Omega|$ の場合に最初に数値計算で見い出されたのであるが (Figure 6(a) を参照)、上の理論的結果は、 α, A を固定して、 Ω を変形していった場合の symmetry-breaking を示すものである (円環領域の場合は、 a を動かすと、 A も動くことになっている)。

5 Numerical Scheme, 数値計算と予想

この Section では、自由境界をもつ固有値の数値計算の方法といくつかの領域に対する 2 次元の数値計算結果を述べる。

(A) Numerical scheme

(a) 有限要素法: 数値計算にはいくつかの手法があるが、有界領域 Ω が矩形だけではない場合の数値計算も視野に入れるために有限要素法 [Ta] を用いた。また一般に自由境界を近似する方法にはメッシュをきりなおしたり移動させたりする必要があるが、ピロノ [Pi] による方法をベースにして多少の改良を施した今回の我々の方法では、この必要がなく固定メッシュが利用できるのでアルゴリズムがシンプルになるという特徴がある。

(i) 三角形分割: 三角形 1 次要素を使う標準的な有限要素近似を考える。領域 Ω を多角形領域 I で近似し、この多角形領域 I を小三角形 e_j の和に分割する。小三角形の数を N_e とする。このとき、分割は次の条件を満たしている。

(1) $\bar{\Omega}$ は次のように分割される。

$$\bar{I} = \bigcup_{i=1}^{N_e} e_i.$$

(2) 要素の内点集合は次を満たす。

$$\text{inte}_i \cap \text{inte}_j = \emptyset \quad (i \neq j).$$

(3) $e_i \cap e_j, i \neq j$ は空集合か、共通の頂点か、共通の辺全体である。

(ii) 基底関数: $\bar{\Omega}$ の内部にある小三角形の頂点を $P_i (i = 1, \dots, N)$ と書く。関数 $\phi_i (i = 1, \dots, N)$ を

(1) 頂点 P_j で

$$\phi_i(P_j) = \delta_{ij} \quad (i = 1, \dots, N)$$

であり、

(2) 各要素 e_k 上では 1 次多項式である、として定義する。

V_h を

$$V_h = \{v_h = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j; c_j \in \mathbf{R}, \forall j\}$$

で定義すると、関数 $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ は一次独立なので $H_0^1(I)$ の N 次元部分空間である。

(iii) 離散化方程式: 連続問題 (EVP)

$$\int_I \nabla u \cdot \nabla v dx + \alpha \int_I \chi_D u v dx = \lambda \int_I u v dx \quad \forall v \in H_0^1(I),$$

の有限次元近似問題 (P_h) は

$$\int_I \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx + \alpha \int_I \chi_D u_h v_h dx = \lambda_h \int_I u_h v_h dx \quad \forall v_h \in V_h$$

となる。固有関数 u_h を

$$u_h = \sum_{j=1}^N x_j \phi_j$$

と表すと、問題 (P_h) は次の n 次元固有値問題に帰着する：

$$Ax = \lambda Mx.$$

ここで、 $A = (a_{ij})$ および $M = (m_{ij})$ はそれぞれ

$$a_{ij} = \int_I \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx + \int_D \phi_j \phi_i dx,$$

$$m_{ij} = \int_I \phi_j \phi_i dx$$

を成分とする $N \times N$ 行列であり、 x は $x = (x_1, \dots, x_N)^T$ である未知ベクトルである。この固有値問題の第一固有値とそれに対応する固有ベクトルは累乘法を用いて簡単に求めることができる。ここで次の問題 (VPF) を考える。与えられた $\alpha > 0$ と $A \in (0, |I|)$ に対して次の条件を満たす D ($|D| = A$) を見付ける：

$$\Lambda_h(\alpha; A) = \inf_{\{D \in C(A)\}} \lambda_h(\alpha; D),$$

ここで、

$$\lambda_h(\alpha; D) = \inf_{u \in V_h} \frac{\int_I |\nabla u_h|^2 dx + \alpha \int_D |u_h|^2 dx}{\int_I |u_h|^2 dx}.$$

(b) 単純降下法: 問題 (VPF) における $\Lambda_h(\alpha; A)$ を見つけるために、固有値の減少列をつくるアルゴリズムを紹介する。

Step0: 適当に $|D_0| = A$ なる初期領域 D_0 を開集合としてとる。

Step1: 与えられた D_j ($j \geq 0$) に対して次の固有値問題の最小固有値 $\lambda_{h,j}$ とそれに対応する固有ベクトル $u_{h,j}$ を累乘法を用いてもとめる。

$$\int_I \nabla u_{h,j} \cdot \nabla v_h dx + \alpha \int_I \chi_{D_j} u_{h,j} v_h dx = \lambda_{h,j} \int_I u_{h,j} v_h dx \quad \forall v_h \in V_h.$$

Step2: Step1 で求めた $u_{h,j}$ に対して次の条件を満たす D_{j+1} を2分法を用いて求める：

$$\int_{D_{j+1}} u_{h,j}^2 dx \leq \int_D u_{h,j}^2 dx \quad \forall D \in C(A).$$

Step 1 で求めた $u_{h,j}$ に対して、 $L(t)$ を $L(t) = |\{x \in \Omega : u_{h,j}(x) < t\}|$ とし、各頂点の値を比較して $u_{h,j}(x_{max}) = \max u_{h,j}(x)$ を満たす三角形の頂点の値を求めておく。

Step2-0. $up = u_{h,j}(x_{max})$ と $down = 0$ とする。

Step2-1. $interm = (up+down)/2$ とし $L(interim)$ を計算する。

Step2-2. $L(interim) < A$ なら $down = interim$ 、 $L(interim) > A$ なら $up = interim$ とする。

Step2-1, Step2-2 を $L(interim) = A$ かつ $up = down$ なるまで繰り返し、 $D_{j+1} = \{x \in \Omega : u_{h,j}(x) < interim\}$ とする。この D_{j+1} に対して Step1 で第一固有値 $\lambda_{h,j+1}$ を累乘法で求めると $\lambda_{h,j+1} \leq \lambda_{h,j}$ となる。

Step3: eps を十分小さい数として Step1, Step2 を

$$|\lambda_{h,j+1} - \lambda_{h,j}| < eps, \quad \text{かつ} \quad |D_{j+1} \ominus D_j| < eps,$$

なるまで繰り返す。実際の計算では $eps = 10^{-7} \sim 10^{-10}$ としている。

注意 (a) Theorem 1 での状況とは違い、 $u_{h,j}$ は既知の開集合 D_j に対する $-\Delta + \alpha \chi_{D_j}$ の固有関数なので、(たとえ $\alpha = \lambda_{h,j}$ のときでも) 任意の定数 t に対して $\{u_{h,j}(x) = t\}$ は測度 0 となり、ある t に対して $D_{j+1} = \{u_{h,j}(x) < t\}$ なる D_{j+1} がただ 1 つに定まり、アルゴリズムはうまく作動する。

注意 (b) この 2 分法で求められた ∂D_{j+1} は小三角形 e_i 上を直線で横切る多角形である。 D_j が与えられたとき Step1 にある積分は

$$\int_I \chi_{D_j} u_{h,j} v dx = \sum_{e_i} \int_{e_i \cap D_j} u_{h,j} v dx = \sum_{e_i} |e_i \cap D_j| \int_{e_i} u_{h,j} v dx$$

と近似して離散方程式をつくる。

さて、この構成法から $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ は下に有界な単調減少列であることがわかる。従って、ある λ_∞ があって λ_n は λ_∞ に収束する。ここでもし $\lambda_\infty = \Lambda_\Omega(\alpha, A)$ なら、 (D_n, f_n) は minimizing sequence となるので、適当な部分列 D_{n_j} をとれば D_{n_j} は 1 つの optimal shape D に収束することが Theorem 1 での議論とそのあとの注意からわかる。従って、さらに optimal shape D が unique であれば、我々の scheme が (部分列をとらなくても) 収束すること、すなわち $|D_n \ominus D| \rightarrow 0$ となることが標準的な議論からわかる。しかしながら、もちろん $\lambda_\infty = \Lambda_\Omega(\alpha, A)$ であるかどうかは明らかでない。実際、それは $\lambda_\Omega(\alpha, D)$ の D に関する、最小値ではない極小値や停留値に (もしそれがあればであるが) 収束する可能性がある。(ただ、その構成法から λ_∞ が極大値となりえない。) さらに $\lambda_\infty = \Lambda_\Omega(\alpha, A)$ であっても D_n の (必要なら適当に部分列をとったときの) 収束先の領域 D_∞ の一意性も直接導かれるわけではない、なぜなら D_∞ は一般的にいて初期領域 D_0 の取り方に依存するからである。以上のような危険性を可能な限りさけるため、我々の数値計算では大きく形状の異なる多数の初期領域 D_0 から始めた数値計算をし、その結果が初期領域によらないかどうかを確認している。また実際の数値計算では、上の Step 3 で説明した判定条件に従って、十分大きな n にたいする近似的に最良な D_n と近似的固有関数 f_n を採用している。

上のように、我々の scheme での D_n の収束に関しては、厳密な保証に乏しい状況である。しかしながら、我々は少なくとも、

(*) $\lambda_\Omega(\alpha, D)$ の D に関する (極大値でない) 停留値は unique でありさらに optimal shape D が unique である場合には、我々の scheme での D_n は optimal shape D に収束する、

と信じている。もちろん、我々の scheme が有効であるためには、理論上すくなくともこれは当然成り立ってほしいものである。仮定のもとで、 λ_∞ は停留値となるであろう (ここが厳密には保証されていない訳であるが、この項の最後の考察を参照されたい) から、従って $\lambda_\infty = \Lambda_\Omega(\alpha, A)$ となり、さきの議論より上の主張が正しいと結論できる。特に、以下の数値計算において、楕円領域ではすくなくともこういう状況下にあるのではと考えている。円環領域では、(最大値でない) 停留値は unique であり、optimal shape は対称性を除いて unique ではないか、また対称なダンベル型領域などでは、(最大値でない) 停留値は 2

つ (もしくは極小値も2つありうる場合には、おそらく4つ) であり、optimal shape は対称性を除いて unique ではないかと考えられる。もっとも、 λ_∞ が極小値でもない停留値である可能性は極めて小さいと考えられる。むしろそのような鞍点型の停留値を数値計算で求めることは困難である。従って、たとえ一般の状況で一般の初期領域 D_0 に対してでも λ_∞ は少なくとも極小値を与えているものと信じており、初期領域を適当に選びなおすことによって、我々の scheme で optimal shape をつかまえているものと信じている。

最後に、さきほどの Scheme の有効性に関する主張 (*) に対する考察を行なっておく。今、部分列をとって f_{n_j} が u に H^1 弱収束かつ L^2 強収束、 $\chi_{D_{n_j}}$ が η に L^2 弱収束するとする。今、簡単のためさらに η への収束は強収束でとれていると仮定しよう。すると、Lemma 1 より $\eta = \chi_D$ と書け、 $\int_\Omega |\chi_{D_{n_j}} - \chi_D| dx \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$) となる。

Claim: このとき、仮定 $\alpha \neq \lambda_\infty$ のもとで、ある $t > 0$ が存在して $D = \{x \in \Omega; u(x) < t\}$ と書ける。

Proof: 簡単のため、 $f_j = f_{n_j}, D_j = D_{n_j}$ と書く。 $\|f_j\|_{L^\infty(\Omega)}$ の一様有界性および f_j の u への L^2 強収束から

$$\int_{D_j} f_j^2 dx \rightarrow \int_D u^2 dx, \quad j \rightarrow \infty$$

がわかる。このことから結局、

$$\int_\Omega |\nabla f_j|^2 dx \rightarrow \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

となり、 f_j は u に H^1 強収束することになる。さて、 $w_j = f_j - u$ とおくと

$$-\Delta w_j + (\alpha \chi_{D_j} - \lambda_j) w_j = \alpha (\chi_D - \chi_{D_j}) u + (\lambda_j - \lambda) u$$

を満たすことがわかるので、 L^∞ -評価 (see [GT, Theorem 8.15]) を適用して

$$\|w_j\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|w_j\|_{L^2(\Omega)} + C \|\chi_D - \chi_{D_j}\|_{L^1(\Omega)} + C |\lambda_j - \lambda_\infty|$$

が適当な定数 C に対して成り立つ。よって $\|f_j - u\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$) を得る。ここで、その構成法よりある $t_j > 0$ があって

$$D_j = \{x \in \Omega; f_{j-1}(x) < t_{j-1}\}, \quad j \geq 1$$

と書けることを思い出そう。 $\|f_j\|_{L^\infty(\Omega)}$ の一様有界性から、 t_j も一様有界としてよい。ここで、必要なら部分列を取り直して、最初からある $t > 0$ があって、 $t_j \rightarrow t$ としてよい。さて仮定 $\alpha \neq \lambda_\infty$ から、 $\{u(x) = s\}$ の測度はいかなる定数 s にたいしてもゼロであることが、[CGIKO] の議論よりわかる。このとき、容易に

$$\int_\Omega |\chi_{D_j} - \chi_{\{u < t\}}| dx \rightarrow 0 \quad j \rightarrow \infty$$

がわかる。従って、 $\chi_D = \chi_{\{u < t\}}$ が得られる。□

従ってまた、

$$\partial D = \{x \in \Omega; u(x) = t\} \quad (14)$$

となることもわかる ([CGIKO] を参照)。今、ここで簡単のため 2 次元のみを考え、 ∂D は smooth な単純閉曲線であるという仮定をしよう。 ∂D を弧長をパラメータとし、

$$\partial D = \{\mathbf{x}(s) = (x(s), y(s)); 0 \leq s \leq L\}$$

と書く。任意の単位ベクトル ν をとり、 ∂D 上の滑らかな関数 $\eta(s)$ と十分小さい $\epsilon > 0$ をとり、 ∂D を変形した曲線

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(s) + \epsilon \eta(s) \nu$$

を考え、それと $\partial \Omega$ とで囲まれる領域を \tilde{D} とする。このとき、 $|\tilde{D}| = A$ (一定) という条件は

$$\int_0^L \eta(s) (\mathbf{n}(s), \nu) ds = 0$$

で表されることが容易にわかる。ここで、 $\mathbf{n}(s) = (-dy(s)/ds, dx(s)/ds)$ は ∂D の D から見た外向き単位法線ベクトルである。また、この ν 方向 (実際には $\eta(s)$ にも依るが) の D の変形に従っての $-\Delta + \alpha \chi_D$ の第一固有値 λ の変化率を $d\lambda/d\nu$ と書くことにすれば、いわゆる Hadamard の変分公式の 1 種であるが、この場合

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = \alpha \int_{\partial D} u^2(s) \eta(s) (\mathbf{n}(s), \nu) ds$$

となることがわかる。従って、勝手な定数 t に対して

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = \alpha \int_{\partial D} (u^2(s) - t^2) \eta(s) (\mathbf{n}(s), \nu) ds \quad (15)$$

が成り立つ。このことと上の (14) を合わせて、 λ_∞ は停留値であると結論してよいと思われるのであり、「停留値が (極大値を除いて) 最小値しかない」という状況の下では、 $\lambda_\infty = \Lambda_\Omega(\alpha, A)$ となり D は optimal shape の 1 つを与えていると判断してよいと思われるのである。特に、(*) での仮定の状況の下では前にも述べたように部分列をとる必要もない。

(c) 1 次元でのにおける単純降下法の収束:

Claim: $\Omega = (0, L), \alpha > 0, A \in (0, L)$ とする。初期形状 D_0 に対する第一固有値 λ_0 が $\lambda_0 > \alpha$ を満たすなら、単純降下法での D_n は収束し最適形状を決める。

Proof: 仮定の下で、 D_0 に対する第一固有関数 f_0 は上に凸となるので、最初の反復で $D_1 = D(l) \equiv (0, l) \cup (m, L)$ ($l + L - m = A$) なる形状になる。一旦こうなれば、単純降下法での D_n は $n \geq 1$ 以降すべてこの形状となる。Theorem 5 より $\lambda(l)$ の単調性がいえているので $l = A/2$ のとき $\lambda(l)$ は最小となり、このとき optimal shape D^* は $D^* = (0, A/2) \cup (L - A/2, L)$ である。単純降下法の過程において $l < (L - m)$ であれば $-\Delta + \alpha \chi_{D(l)}$ の第一固有関数 $u(x)$ に対して、Theorem 5 より

$$u(l) < u(m)$$

が成り立つので、 $u(l) < t < u(m)$ かつ $L(t) = A$ なる t が存在する。ゆえに単純降下法の反復を繰り返すと $j \rightarrow \infty$ のとき $l, L - m \rightarrow A/2$ かつ $D_j \rightarrow D^*$ となる。□

注意: 例えば $\alpha < \bar{\alpha}_\Omega(A)$ の場合、任意の初期形状 D_0 に対して $\lambda_0 > \alpha$ は成立することがわかる。従って、単純降下法は必ず収束し最適形状を決めることになる。しかし、 λ_0 が $\lambda_0 < \alpha$ であれば任意の初期形状から反復が必ず収束するかどうかはわからない。

(B) 数値計算結果と予想

最後に我々の Scheme で計算した計算結果を紹介する。以下の各数値計算結果の Figures では、黒い部分が optimal shape D に対応していることを注意しておく。

(a) 楕円領域での **Optimal Shape**: ここでは、 Ω が楕円領域の場合の数値計算結果を述べる。ここでは、 $\Omega = \{(x, y); x^2/4 + y^2 < 1\}$ 、 $|\Omega| = 6.278706$ なる 2次元の楕円領域 Ω を固定し、Figure 1(a) では $\alpha = 1.0$ 、Figure 1 (b) では $\alpha = 30.0$ として、それぞれパラメータ A を変化させたときの optimal shape D の形を表示している。例えば1つの定性的な特徴として、 α の値が大きくなるにつれて D^c は丸くなっていく様子がわかる。我々は、数値計算の結果から次の様な予想をたてている。

Conjecture 1 いかなるパラメータ領域 α, A に対しても、その optimal shape D は *unique* である。しかも、 D^c は *convex* である。

α が十分小さい場合の D^c の convexity は [CGIKO] で証明されている。

(b) 円環領域での **Optimal Shape**: ここでは、円環領域 $\Omega_{a,b} = \{x \in \mathbf{R}^2; a < |x| < b\}$ とする。Figure 2(a) では、 $A = 2.0$ に固定して α の値を1から6まで変化させたときの optimal shape と $\Lambda_\Omega(\alpha, A)$ の値を示しており、 α が大きくなると optimal shape の対称性の崩壊が起こる様子が見られる。Figure 2(b) では、 $\alpha = 1.0$ に固定して A の値を2.2から2.7まで変化させたとき、 A が大きくなるにつれての対称性の崩壊が起こる様子が見られる。Figure 3 では、 $A = 2.0$ および外半径を1に固定し、内半径を変化させたときの optimal shape を α の値によって分類した図である。Figure 4 では Theorem 6 に対応する数値計算結果を表している。領域を $\Omega = \Omega_{a,a+1}$ とし、内半径 a を1~5まで変化させたときの対称性の崩壊が起こることを確かめた。これらの数値計算の結果から次の様な予想をしている。

Conjecture 2 Ω を上で数値計算したような円環領域とする。

(a) Ω, A を固定する。このとき、 α が十分小さければ optimal shape は球対称かつ *unique* であり、 α が十分大きければ optimal shape は球対称ではない。

(b) Ω, α を固定する。このとき、 A が十分小さければ optimal shape は球対称かつ *unique* であり、 A が十分 $|\Omega|$ に近ければ optimal shape は球対称ではない。

(c) α, A を固定する。このとき、 Ω が十分 *thick* であれば optimal shape は球対称かつ *unique* である。

特に、Figure 3で見られるように、 α, A および 円環領域の外半径を (例えば) 1に固定し、内半径 $\epsilon > 0$ が十分小さい場合は、ある意味で *thick* な円環領域である訳であるが、optimal shape は球対称で

$$D = \{x \in \mathbf{R}^2; \epsilon < |x| < r_{int}(\epsilon), r_{out}(\epsilon) < |x| < 1\}$$

と書けると予想している。但し、 α は適当に小さい値に固定するものとする。このことが正しいという仮定の下で、[CGK] で $r_{int}(\epsilon) \rightarrow 0$ ($\epsilon \rightarrow 0$) なることが証明されている。

(c) ダンベル型領域での **Optimal Shape**: B_{\pm} を中心 $(\pm 2, 0)$, 半径 1 の単位円内部とする。 h を $0 < h < 1$ とし、ダンベル型領域 $\Omega_h = B_- \cup ((-2, 2) \times (-h, h)) \cup B_+$ で考える。 Figure 5 では、 $h = 0.3$ および $A = 5.873584$ と固定して α を変化させるとき、 α が大きくなると optimal shape の対称性の崩壊が起こる様子を表す。またそのときの固有関数の形も表している。 Figure 6(a) では、 $h = 0.3$ および $\alpha = 0.1$ と固定して A を変化させるとき、 A が大きくなると対称性の崩壊が起こる様子を表す。 Figure 6(b) では、 $\alpha = 0.1$ および $A = 4.0$ と固定してハンドル幅 h を変化させ、 h が小さくなると対称性の崩壊が起こる Theorem 7 の様子を確かめた。

Conjecture 3 Ω を上で数値計算したような対称なダンベル型領域とする。

(a) Ω, A を固定する。このとき、 α が十分小さければ optimal shape は x_2 軸に関して対称でありかつ unique であり、 α が十分大きければ optimal shape は x_2 軸に関して対称ではない。

(b) Ω, α を固定する。このとき、 A が十分小さければ optimal shape は x_2 軸に関して対称かつ unique であり、 A が十分 $|\Omega|$ に近ければ optimal shape は x_2 軸に関して対称ではなく、さらに D^c の連結成分はただ 1 つである。

もちろん、 x_1 軸に関しての対称性は Theorem 4 でいつも保証されている。

6 Related Problems

(a) **Composite Membrane Problem**: $\alpha < \bar{\alpha}_{\Omega}(A)$ の場合は、 [CGIKO] で次のことが示されている。

”ここでの Minimization Problem の optimal pair は、それぞれ面積一定の 2 種類の密度の異なる膜で太鼓をつくる作り方のなかでもっとも低い音をす太鼓をつくるには、どういう貼り合わせ方がいいかという問題の optimal pair と 1 対 1 の関係が成り立つ。”

この膜の貼り合わせの問題 (正確な定式化は [CGIKO], [CM] を参照されたい) 自身は、 Krein [Kr] によって、 1 次元の場合に Theorem 3 に対応する結果が、 Cox and McLaughlin [CM] によって、高次元での Theorem 1 に対応する結果が示されている。また、彼らは一般の k 番目の固有値にたいする Minimization Problem と同時に Maximization Problem も扱っており、 optimal shape の存在定理を証明しているが、 Krein の 1 次元の場合の optimal shape の決定以外、 Minimization Problem に対して高次元での optimal shape の定性的、定量的性質の研究はなされていない。

(b) D の shape を球に制限した問題: D の shape を球に制限して同じ Minimization Problem を考えることができる。また、 1 つの極限問題として $\alpha \rightarrow \infty$ の場合に対応した第一固有値の最適化問題も考えられる。これらについては、 [HKK] を参照されたい。

REFERENCES

[CGIKO] Chanillo, S., Grieser, D., Imai, M., Kurata, K., Ohnishi, I., Symmetry Breaking and Other Phenomena in the Optimization of Composite Membranes, Preprint.

[CGK] Chanillo, S., Grieser, D., Kurata, K., The Free Boundary Problem in the Optimization of Composite Membranes, Preprint.

[CM] Cox, S.J., McLaughlin, J.R., Extremal eigenvalue problems for composite membranes, I and II, *Appro. Math. Optim.* 22(1990), 153–167, 169–187.

[De] Denzler, J., Windows of Given Area with Minimal Heat Diffusion, *Trans. Amer. Math. Soc.* 351(1999), 569–580.

[HKK] Harrell, E., Kröger, P., Kurata, K., On the placement of an obstacle or a well so as to optimize the fundamental eigenvalue, preprint.

[GT] Gilbarg, D., Trudinger, N.T., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1983.

[Kr] Krein, M.G., On certain problems on the maximum and minimum of characteristic values and on the Lyapunov zones of stability, *AMS Translations Ser.* 2(1), 1955, 163–187.

[LL] Lieb, E., Loss, M., *Analysis*, Amer. Math. Soc., 1997.

[Pi] Pironneau, O., *Optimal shape design for elliptic systems*, Springer-Verlag, New York Inc., 1984.

[Ta] Tabata, M., 微分方程式の数値解法 II, 岩波書店, (1994).

Masaki Imai and Isamu Ohnishi:

Department of Information mathematics and Computer sciences

University of Electro-Communications

Chofu-ga-oka 1-5-1, Chofu-shi, Tokyo, Japan

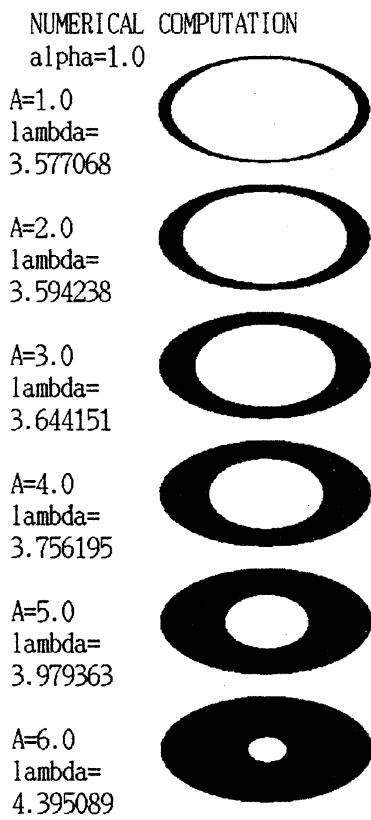
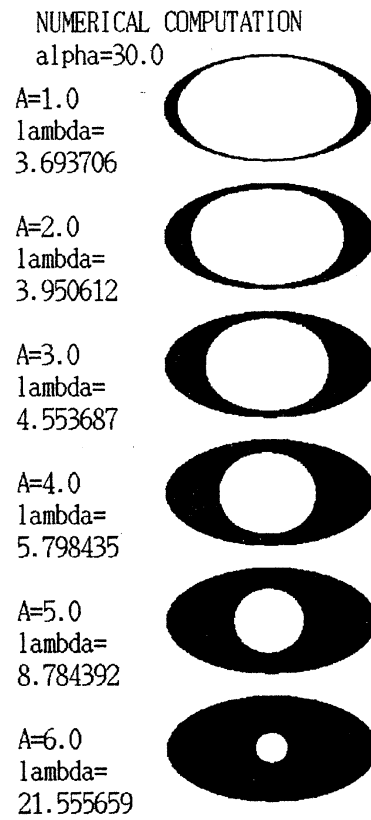
e-mail: imai-m@kenks.im.uec.ac.jp, ohnishi@im.uec.ac.jp

Kazuhiro Kurata:

Department of Mathematics, Tokyo Metropolitan University

Minami-Ohsawa 1-1, Hachioji-shi, Tokyo, Japan

e-mail: kurata@comp.metro-u.ac.jp

figure1(a) 橢円 : $\alpha=1$ figure1(b) 橢円 : $\alpha=30$

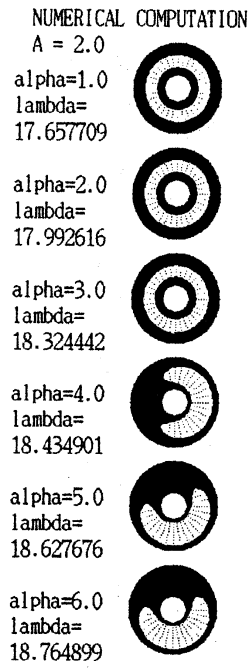


figure2(a) 円環 : $A = 2.0$

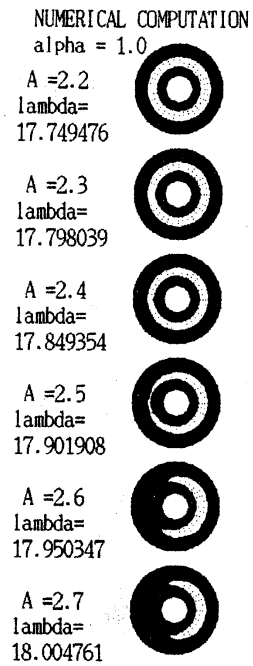


figure2(b) 円環 : $\alpha = 1.0$

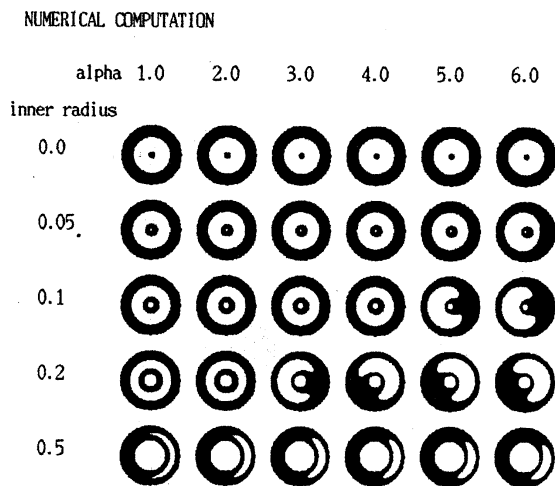


figure3 円環 : $A = 2.0$

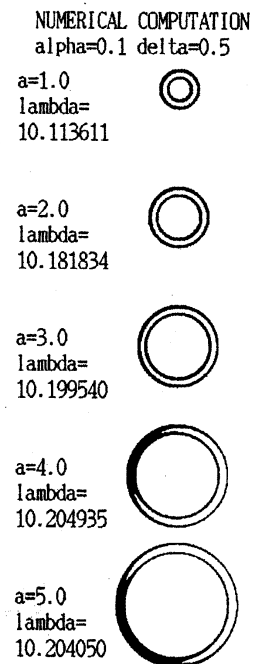


figure4 円環 : $\delta = 0.5$

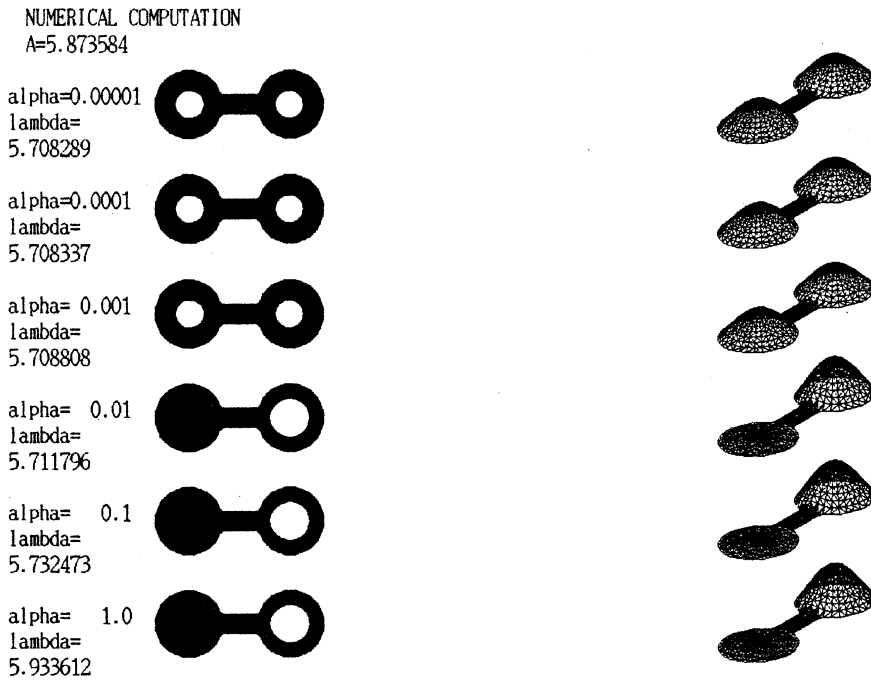


figure5 ダンベル : A = 5.873584 Optimal shape と 第一固有関数

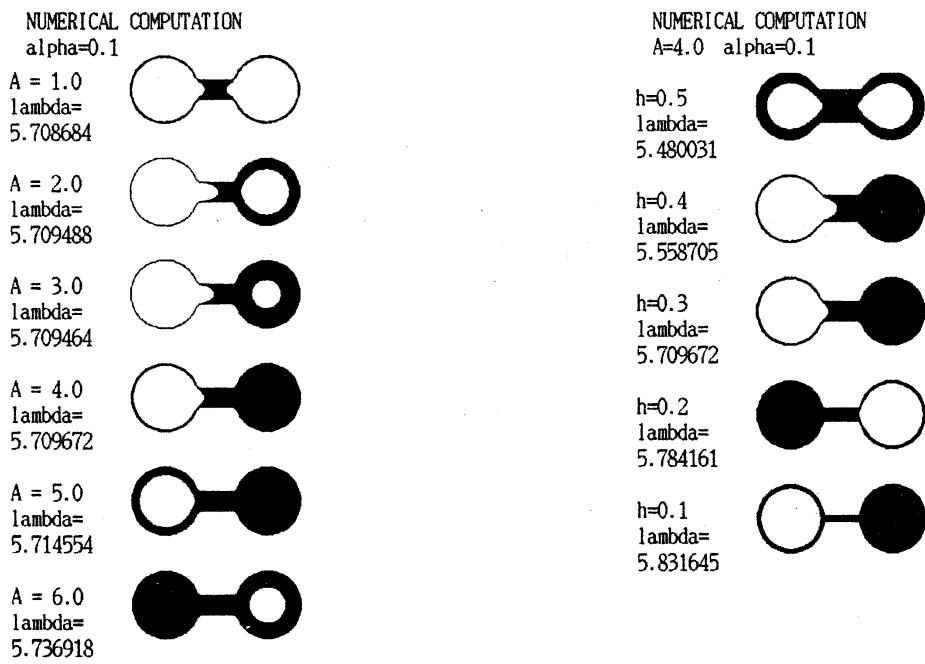


figure6(a) ダンベル : $\alpha = 0.1$

figure 6(b) ダンベル : $\alpha = 0.1$ A = 4.0