数理解析研究所講究録
1119 巻 1999 年 74-82

ポアソン構造の拡張について

三上健太郎* (Kentaro MIKAMI)

Sep 02, 1999 at RIMS Kyoto

これは水谷忠良氏[1]との共同研究の途中の概説 (中間報告) です。9 月 2 日の話での OHP 原稿をほぼそのまま使用しました。当日口頭で説明した部分が記述されていない為, 説明の流れがスムーズでなかったり唐突な部分が多々ありますがご容赦願います。

1 記号と準備

滑らかな多様体 M の関数環 $C^{\infty}(M)$ 上の滑らかな関数値-R-多重線形交代写像を考える。

$$\mathcal{A}:\underbrace{C^{\infty}(M)\times\cdots\times C^{\infty}(M)}_{a\text{ 個}}\longrightarrow C^{\infty}(M)$$

$\mathcal{A}$ は次数 a の括弧積であると言おう。ポアソン (-南部) 括弧積が典型例であるように, 多重 q-ベクトル場 Q が与えられた時

$$Q(f_{1},\ldots,f_{q}):=\langle Q,df_{1}\wedge\cdots\wedge df_{q}\rangle$$

は次数 q の括弧積で各変数毎に積の微分公式 (Leibniz rule) を満たしている。
C^{∞}-トポロジーで連続で, サポート非増加を仮定すると $\mathcal{A}$ は微分作用素で記述できることが知られている (cf.[6])。

*秋田大学 mikami@math.akita-u.ac.jp
[1]埼玉大学 tmiztani@rimath.saitama-u.ac.jp

1.1 外積

外積代数の全くの類似で次の様な新括弧積作成ルールを用意する。2 つの次数 a, b なる括弧積 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ に対し

$$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})(f_1, \ldots, f_{a+b}) := \frac{1}{a!b!} \sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma) \mathcal{A}(f_{\sigma(1)}, \ldots, f_{\sigma(a)}) \mathcal{B}(f_{\sigma(a+1)}, \ldots, f_{\sigma(a+b)})$$

と定義する。

1.2 Fundamental Id.

括弧積 $\mathcal{A}$ の FI(=Fundamental Identity) を述べるために, 次の写像を考える。2 つの括弧積 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対し

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{J}^{\mathcal{A}}\mathcal{B})(f_1, \ldots, f_{a-1}; g_1, \ldots, g_b) \\
&:= \mathcal{A}(f_1, \ldots, f_{a-1}, \mathcal{B}(g_1, \ldots, g_b)) - \sum_{j=1}^{b} \mathcal{B}(g_1, \ldots, \mathcal{A}(f_1, \ldots, f_{a-1}, g_j), \ldots) \\
&= \mathcal{A}(f_1, \ldots, f_{a-1}, \mathcal{B}(g_1, \ldots, g_b)) - \sum_{j=1}^{b} (-1)^{j+1} \mathcal{B}(\mathcal{A}(f_1, \ldots, f_{a-1}, g_j), g_1, \ldots, \widehat{g_j}, \ldots)
\end{aligned}$$

$\mathrm{J}^{\mathcal{A}}\mathcal{B}$ は $f_1, \ldots, f_{a-1}$ 間及び $g_1, \ldots, g_b$ 間では交代性を満たすものの全体としては交代性を満たさず我々の意味の括弧積ではない。括弧積 $\mathcal{A}$ が FI を満たすとは $\mathrm{J}^{\mathcal{A}}\mathcal{A} = 0$ を満たす時を言う。即ち, $\mathcal{A}(f_1, \ldots, f_{a-1}, \cdot)$ が $\mathcal{A}$ に対して "derivation" として振る舞う事である。$a = 2$ の時は, Jacobi 律そのものである。

1.3 既知の事柄

Poisson: 次数 2 の括弧積で FI(今は Jacobi Identity = JI と一致) と Leibniz を満すものは, $Q(f, g) = \langle Q, df \wedge dg \rangle$ 但し, $[Q, Q]_{\mathrm{SN}} = 0$ に限る。

Local Lie algebra, Jacobi: 次数 2 の括弧積で FI(=JI) とサポート非増加を満す C^∞ 連続なものは,

$$\{f, g\} = \langle Q, df \wedge dg \rangle - f\langle P, dg \rangle + g\langle P, df \rangle = (Q - \mathbf{1} \wedge P)(df, dg)$$

但し, $[Q, Q]_{\mathrm{SN}} + 2P \wedge Q = 0$ かつ $[Q, P]_{\mathrm{SN}} = 0$ に限る。

Nambu-Poisson: 次数 3 以上の括弧積で FI と Leibniz を満すものは, ゼロでない点の周りではその多重ベクトル場は局所積分解可能である (分布は可積分)。

2 我々の問題

次数 3 以上の FI とサポート非増加を満す C^∞ 連続な括弧積は何だろうか? どのくらい多様なものがあらわれるか?

Lemma 2.1 (Kirillov[3] の拡張版) 次数 3 以上の括弧積 $\mathcal{N}$ で FI とサポート非増加を満す C^∞ 連続なものは, 次の形である。

$$\mathcal{N} = Q - \mathbf{1} \wedge P$$

ここで, P, Q は多重交代ベクトル場から決まる括弧積で $\deg P = \deg Q - 1 = \deg \mathcal{N} - 1$ である。

Remark 2.1 $P = 0$ の時は, 南部-Poisson そのものである。

$Q = 0$ の時も, P が南部-Poisson ならば, $\mathcal{N}$ は求めるものである。

Lemma 2.1 の証明のアイデア:

$$\mathcal{N}(f_1, f_2, \dots) = \sum_{I_1, I_2, \dots} C_{I_1 I_2 \cdots I_q} \partial^{I_1} f_1 \cdots \partial^{I_q} f_q \quad \text{locally}$$

1. multi-index set に total ordering を導入
2. うまく座標変換して, $\{(I_1, I_2, \dots) \mid C_{I_1 I_2 \cdots I_q} \neq 0\}$ の maximal element は $((k, 0, \dots, 0), I_2, \dots I_q)$ と出来る事を示す。
3. FI を使い, $k > 1$ なら上記添字の係数が 0 を示す。

今後調べたいことは, P, Q の満たすべき条件 (P と Q の依存関係) は何か?

3 積分解可能性について

2 つの括弧積 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対し

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} \vdash \mathcal{B})(f_1, \dots, f_{a-1}; g_0, g_1, \dots, g_b) &:= (\mathcal{A}(f_1, \dots, f_{a-1}, \cdot) \wedge \mathcal{B})(g_0, g_1, \dots, g_b) \\ &= \sum_{j=0}^{b} (-1)^j \mathcal{A}(f_1, \dots, f_{a-1}, g_j) \mathcal{B}(g_0, \dots, \widehat{g_j}, \dots, g_b)\end{aligned}$$

$\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ は $f_1, \ldots, f_{a-1}$ 間及び $g_0, \ldots, g_b$ 間では交代性を満たすものの全体としては交代性を満たさず我々の意味の括弧積ではない。$\mathcal{A}$ が各成分毎に Leibniz rule を満たすとき, $\mathcal{A} \vdash \mathcal{A} = 0$ は $\mathcal{A}$ を定める多重ベクトル場が局所積分解可能であることである。

Lemma 3.1 P, Q とも多重ベクトル場から決まる括弧積の時, $P \vdash Q$ が全体として交代性を満たし, $\deg P \geq 3$ ならば $P \vdash Q = 0$ である。

Remark 3.1 2-ベクトル場 P に対しては $P \vdash P = 2P \wedge P$ で full-skew symmetric である。しかし, $P \wedge P \neq 0$ である例は rank 4 以上のポアソン構造など多々ある。

$P = Q$ の時, 南部に適用すると, $P \vdash P = 0$ が得られた (Gautheron [2] の仕事)。

Lemma 3.2 多重ベクトル場 P, Q with $\deg P < \deg Q$ が $P \vdash Q = 0$ and P 非零局所積分解可能ならば $Q = P \wedge \exists R$ である。

Lemma 3.3 $\deg P = 2$, $\deg Q = 3$ なる多重ベクトル場 P, Q を考える。$P \vdash Q$ full-skew and Q 非零局所積分解可能ならば P 局所積分解可能 $Q = P \wedge \exists v$ 但し $P \neq 0$ and also $P \vdash Q = 0$.

4 FIの処理

$\mathcal{N}$ の FI 及びそれから派生する式を記述するために次の記号を用意する。

B が ordered set(リスト) であるとき,

- B_i は B の左から i 番目の成分を意味する (左端は左から 1 番目のつもり)。
- B^j は B の左から j 番目の成分を除いた ordered set を意味する。
- B のある成分に代入あるいは制限を施したときのために $B[(i) = c]$ なる記号を用いる。これは B の第 i 成分が c であることを示す。

例: $B = (u, v, w, z)$ であるとき, $B_3 = w$, $B^2 = (u, w, z)$, ${B^2}_3 = z$, $B[(2) = c] = (u, c, w, z)$

以下の議論で用いる/た基本的な関係式:

$$i \leq j \text{ ならば } \quad {B^i}_j = B_{j+1}, \quad B^{i,j} = B^{j+1,i}$$

$i > j$ ならば

$$ {B^i}_j = B_j, \quad B^{i,j} = B^{j,i-1}, \quad B_i = {B^j}_{i+1}$$

これらを使うと次の補題を得る。

Lemma 4.1

$$\sum_{\lambda=1}^{p+1}\sum_{j=1}^{p}(-1)^{\lambda+j}B^{\lambda}{}_{j}\Phi(B^{\lambda j},B_{\lambda}) = -\sum_{\lambda=1}^{p+1}\sum_{j=1}^{p}(-1)^{\lambda+j}B_{\lambda}\Phi(B^{\lambda j},B^{\lambda}{}_{j})$$

特に,

$$\sum_{\lambda=1}^{p+1}\sum_{j=1}^{p}(-1)^{\lambda+j}B^{\lambda}{}_{j}\Psi(B^{\lambda j})B_{\lambda} = 0$$

以下特に断らない限り, $i,j,\ldots$ は 1 から p まで動き, $\lambda,\mu,\ldots$ は 1 から $(p+1)$ まで動くものとする。

次数 $(p+1)$ 写像 $\mathcal{N}$ の FI 式は, 任意の p-tuple A of functions on M と $(p+1)$-tuple B of functions on M に対し

$$FI(A,B) = \mathcal{N}(A,\mathcal{N}(B)) + \sum_{\lambda}(-1)^{\lambda}\mathcal{N}(\mathcal{N}(A,B_{\lambda}),B^{\lambda})$$

基本戦略は FI の変数 (引数) に 1 を代入するという素朴なものである。FI の部分交代性から代入の候補は $FI(A,B)$ の A-ゾーン, B-ゾーン, その両方がある。以下の展開変形では

$$\mathcal{N}(B[(\lambda)=1]) = (-1)^{\lambda}P(B^{\lambda})$$

を多用する。

Lemma 4.2

$$\begin{aligned}
FI(A,B) = {} & Q(A,Q(B)) + p(-1)^{p}P(A)Q(B) + \sum_{\lambda}(-1)^{\lambda}Q(Q(A,B_{\lambda}),B^{\lambda}) + \\
& + \sum_{\lambda,i}(-1)^{\lambda+i}P(A^{i},B_{\lambda})Q(A_{i},B^{\lambda}) + \\
& + \sum_{i}(-1)^{i}A_{i}(P(A^{i},Q(B)) + \sum_{\lambda}(-1)^{\lambda}Q(P(A^{i},B_{\lambda}),B^{\lambda})) + \\
& + \sum_{\lambda}(-1)^{\lambda}B_{\lambda}(p(-1)^{p}P(A)P(B^{\lambda}) + Q(A,P(B^{\lambda})) + (-1)^{p+1}Q(P(A),B^{\lambda}) + \\
& \quad + \sum_{i}(-1)^{i}P(Q(A,B^{\lambda}{}_{i}),B^{\lambda i}) + \sum_{i,j}(-1)^{i+j}P(A^{i},B^{\lambda}{}_{j})P(A_{i},B^{\lambda j})) + \\
& + \sum_{\lambda,i}(-1)^{\lambda+i}A_{i}B_{\lambda}(P(A^{i},P(B^{\lambda})) + \sum_{j}(-1)^{j}P(P(A^{i},B^{\lambda}{}_{j}),B^{\lambda j}))
\end{aligned}$$

Proposition 4.1

$FI(A,B)$ の 2 次 AB の項:

$$(-1)^{i+\lambda}(\jmath^P P)(A^i, B^\lambda) \tag{4.1}$$

$FI(A,B)$ の 1 次 B の項:

$$(-1)^i(\jmath^P Q)(A^i, B) \tag{4.2}$$

$FI(A,B)$ の 1 次 A の項:

$$\jmath^Q P(A, B^\lambda) + (-1)^{p+1}(Q(P(A), B^\lambda)) + \sum_i (-1)^i (P \vdash P)(A^i; A_i, B^\lambda) \tag{4.3}$$

$FI(A,B)$ の定数項:

$$\jmath^Q Q(A,B) + \sum_i (-1)^i (P \vdash Q)(A^i; A_i, B) \tag{4.4}$$

5 高階: 積の微分公式を模範に

FI の各成分毎に積の微分公式からのズレを考察してみよう。FI の部分交代性から 2 タイプを扱う。

5.1 FR=right entry

$$\begin{aligned} FI(A; B, uv) &= \mathcal{N}(A, \mathcal{N}(B, uv)) + \sum_j (-1)^j \mathcal{N}(\mathcal{N}(A, B_j), B^j, uv) + (-1)^{p+1}\mathcal{N}(\mathcal{N}(A, uv), B) \\ &= \underset{u,v}{\mathfrak{S}}\, FI(A; B, u)v + \\ &\quad + (-1)^p uv(\mathcal{N}(A, P(B)) + \sum_j (-1)^j P(\mathcal{N}(A, B_j), B^j) + (-1)^{p+1}\mathcal{N}(P(A), B)) \end{aligned}$$

$$FR(A; B, u, v) := FI(A; B, uv) - FI(A; B, u)v - uFI(A; B, v)$$

$$FR(A; B, u, v)(-1)^p = uv(\mathcal{N}(A, P(B)) + \sum_j (-1)^j P(\mathcal{N}(A, B_j), B^j) + (-1)^{p+1}\mathcal{N}(P(A), B))$$

$$FR(A, B, u, 1) = -uFI(A, B, 1),\ FR(A, B, 1, v) = -vFI(A, B, 1),\ FR(A, B, 1, 1) = -FI(A, B, 1)$$

なので新たな情報を得るべく

$$RI(A;B,u,v) := FR(A;B,u,v) - uFR(u=1) - vFR(v=1) + uvFR(u=v=1)$$

を考えるが,

Proposition 5.1 $RI(A,B,u,v)=0$ である。従って新たな情報は得られない。

5.2 FL=left entry

左側のゾーンについての積の微分公式からのズレを考える。

$$FL(u,v;A;B) := FI(uv,A;B) - uFI(v,A;B) - FI(u,A;B)v$$

$$\begin{aligned}
&FI(uv,A;B)\\
&= \underset{u,v}{\mathfrak{S}} FI(u,A;B)v + uv(P(A,\mathcal{N}(B)) + \sum_{\lambda}(-1)^{\lambda}(\mathcal{N}(P(A,B_{\lambda}),P(A,B_{\lambda})) + \\
&\quad + 2P(A,B_{\lambda})P(B^{\lambda}))) + \underset{u,v}{\mathfrak{S}} \sum_{\lambda}(-1)^{\lambda}(\mathcal{N}(u,A,B_{\lambda})P(B^{\lambda})\mathcal{N}(u,B^{\lambda})P(A,B_{\lambda}))v + \\
&\quad + \underset{u,v}{\mathfrak{S}} \sum_{\lambda}(-1)^{\lambda}\mathcal{N}(u,A,B_{\lambda})\mathcal{N}(v,B^{\lambda})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&FL(u,v;A;B)\\
&= uv(P(A,\mathcal{N}(B)) + \sum_{\lambda}(-1)^{\lambda}(+\mathcal{N}(P(A,B_{\lambda}),P(A,B_{\lambda})) + 2P(A,B_{\lambda})P(B^{\lambda}))) + \\
&\quad + \underset{u,v}{\mathfrak{S}} \sum_{\lambda}(-1)^{\lambda}(\mathcal{N}(u,A,B_{\lambda})P(B^{\lambda})\mathcal{N}(u,B^{\lambda})P(A,B_{\lambda}))v + \underset{u,v}{\mathfrak{S}} \sum_{\lambda}(-1)^{\lambda}\mathcal{N}(u,A,B_{\lambda})\mathcal{N}(v,B^{\lambda})
\end{aligned}$$

である。FR の時と同じ理由で次を考える。

$$LI(u,v;A;B) := FL(u,v;A;B) - uFL(1,u;A;B) - vFL(u,1;A;B) + uvFL(1,1;A;B)$$

Lemma 5.1

$$
\begin{aligned}
&LI(u,v;A;B)\\
&= \mathfrak{S}_{u,v}\sum_{\lambda}(-1)^{\lambda}Q(u,A,B_{\lambda})Q(v,B^{\lambda}) + \mathfrak{S}_{u,v}\sum_{\lambda}\sum_{j=1}^{p}(-1)^{\lambda+j}Q(u,A,B^{\lambda}{}_{j})B_{\lambda}P(v,B^{\lambda}{}_{j}) +\\
&\quad + \mathfrak{S}_{u,v}\sum_{\lambda}\sum_{i=1}^{p-2}(-1)^{\lambda+i+1}A_{i}P(u,A^{i},B_{\lambda})Q(v,B^{\lambda}) +\\
&\quad + \mathfrak{S}_{u,v}\sum_{\lambda}\sum_{i=1}^{p-2}\sum_{j=1}^{p}(-1)^{\lambda+i+j}A_{i}P(u,A^{i},B^{\lambda}{}_{j})B_{\lambda}P(v,B^{\lambda}{}_{j}) +\\
&\quad + \mathfrak{S}_{u,v}\sum_{\lambda}(-1)^{\lambda+p+1}B_{\lambda}P(u,A)Q(v,B^{\lambda}) + 0
\end{aligned}
$$

Proposition 5.2

$LI(u,v;A;B)$ の 2 次の項:

$$(-1)^{\lambda+i}\,\mathfrak{S}_{u,v}(P \vdash P)(u,A^{i};v,B^{\lambda}) \tag{5.1}$$

$LI(u,v;A;B)$ の 1 次 A の項:

$$(-1)^{i+1}\,\mathfrak{S}_{u,v}(P \vdash Q)(u,A_{i};v,B) \tag{5.2}$$

$LI(u,v;A;B)$ の 1 次 B の項:

$$(-1)^{\lambda}\,\mathfrak{S}_{u,v}((Q \vdash P)(u,A;v,B^{\lambda}) + (-1)^{p+1}P(u,A)Q(v,B^{\lambda})) \tag{5.3}$$

$LI(u,v;A;B)$ の定数項:

$$\mathfrak{S}_{u,v}(Q \vdash Q)(u,A;v,B) \tag{5.4}$$

Theorem 5.3 The degree $(p+1)$ bracket $\mathcal{N} = Q - \mathbf{1} \wedge P$ satisfies FI if and only if

$$
\begin{gathered}
\jmath^{P}P = 0,\ \jmath^{Q}Q = 0,\ P \vdash Q = 0,\ \jmath^{P}Q = 0,\\
\jmath^{Q}P(A,B') + (-1)^{p+1}Q(P(A),B') = 0.
\end{gathered}
$$

When $\deg P = 2$, P must be locally decomposable.

6 今後の課題?

参考文献

[1] R. Chatterjee and L. Takhtajan. Aspects of classical and quantum Nambu mechanics. *Lett. Math. Phys.*, 37(4):475–482, August 1996.

[2] P. Gautheron. Some remarks concerning Nambu mechanics. *Lett. Math. Phys.*, 37(1):103–116, May 1996.

[3] A.A. Kirillov. Local Lie algebras. *Russian Math. Surveys* (Uspekhi Mat. Nauk), 31(4):55–75, 1976.

[4] A. Lichnerowicz. Variétés de Jacobi et algèbres de Lie associées. *C.R.Acad.Sc.Paris*, 285(26):455–459, 1977.

[5] Y. Nambu. Generalized Hamiltonian mechanics. *Phys. Rev. D7*, pages 2405–2412, 1973.

[6] J. Peetre. Rèctification a l'article "Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels". *Math. Scand.*, 8:116–120, 1960.

[7] L. Takhtajan. On foundation of the generalized Nambu mechanics. *Commun. Math. Phys.*, 160:295–315, 1994.