数理解析研究所講究録
1119 巻 1999 年 35-47

リウヴィル曲面における半古典近似

清原 一吉

北海道大学理学研究科

概要

A version of "semi-classical approximation" is known for the laplacian on riemannian manifolds by Duistermaat and Weinstein, which says that the ener gy levels of certain lagrangean submanifolds in the cotangent bundle give approximate eigenvalues of the laplacian aymptotically. Th e condition that those lagrangean submanifolds must satisfy is called Maslov 's quantization condition. If a manifold has integrable geodesic flow, then the cotangent bundle contains many such lagrangean submanifolds. So, one might expect that approximations were obtained in such way for almost all eigenval ues of the laplacian in this case.

In this note we consider a class of surfaces whose geodesic flow s are integrable (Liouville surfaces defined over 2-shpere), and show the two results: One is the absence of the corresponding lagrangean sub manfiolds for certain eigenvalues; and the other is the existence of new a pporoximate values, which are asymptotically finer along a certain direction even where the classical approximations exist.

目 次

1　はじめに

コンパクト・リーマン多様体のラプラシアンの固有値に対する「半古典近似」(あるいはマスロフの量子化条件) として次の事実が知られている。これは1次元シュレーディンガー方程式に対する WKB 法 (リウヴィル・グリーン変換) の高次元版と見なせるものである。

M をコンパクト・リーマン多様体、$2E : T^*M \to \boldsymbol{R}$ を長さの2乗を与える関数とし、L を T^*M 内のコンパクトなラグランジュ部分多様体で

1. L は長さ一定のコベクトル達からなる
2. L は測地流で不変な体積要素を持つ
3. α を T^*M 上の canonical 1-form, $m_L \in H^1(L, \mathbf{Z})$ を L のマスロフ類とするとき、任意の閉曲線 $\gamma \subset L$ について

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \alpha - \frac{1}{4} m_L([\gamma]) \in \boldsymbol{Z}.$$

をみたすものを考える。(これを今仮に「L は整数条件を満たす」、ということにする。) L が整数条件を満たすとすると、tL $(t>0)$ の形のラグランジュ部分多様体で同様の性質を持つものの全体は、ある primitive な L_0 があって $L_k=(bk+1)L_0$ $(k=0,1,2,\dots)$ の形になる。(b の値は $1,2,4$ のどれかで、m_L で決まる。)

$$2E|_{L_k} = \left(= (bk+1)^2 e_0\right) = e_k$$

とすると主張は

定理 (Weinstein [W]). M のラプラシアンの固有値の列 $\{\ lambda_k\}$ で

$$\sqrt{\lambda_k} = \sqrt{e_k} + O(k^{-1})$$

なるものが存在する、

というものである。我々はこの定理を次のように解釈する。即ち、整数条件を満たす L に対して古典論的量 $2E|_L$ はラプラシアンの固有値の１つの近似値を与える。(実際の近似の有り様は上記のように漸近的なものであるが。)

我々の目論見はこれを利用して可積分測地流を持つリーマン多様体の場合に（上記のようなラグランジュ部分多様体が沢山あるわけだから)、ラプラシアンのすべての固有値の近似値をそれによって得られないかということにある。

我々は（球面上定義された）リウヴィル曲面の場合に実際にそのことを調べ、一部否定的な結果と新しい近似値を得た。本稿ではそのことについて述べる。なお、下部多様体がトーラスであるリウヴィル曲面に対

して半古典近似を扱ったものに [KMS] （の第 2 章）がある。技術的なものは、ここでの話と同様、[O1], [O2] に依っているので、類似する部分が多いが、本稿の主題である 4 節のような状況はトーラスのおいては起こらない。

2 リウヴィル曲面

この節では 2 次元球面に同相なリウヴィル曲面について必要な事柄をまとめる。リウヴィル曲面とは、その測地流が各余接空間上 2 次式であるような第一積分を持つ 2 次元リーマン多様体のことであり、定曲率球面や楕円面をその典型例とするものであるが、ここでは構成的にその定義を述べる。(以下に述べるものは少し狭い範囲のものである。詳しくは [K1], [K2] を参照されたい。)

まずトーラス

$$R = (\boldsymbol{R}/\alpha_1\boldsymbol{Z}) \times (\boldsymbol{R}/\alpha_2\boldsymbol{Z}) = \{(x_1, x_2)\}$$

を考え、次の性質を持つ 2 つの 1 変数関数 $f_1(x_1), f_2(x_2)$ $(f_i \in C^\infty(\boldsymbol{R}/\alpha_i\boldsymbol{Z}))$ を用意する。

- $1 \geq f_1(x_1) \geq a \geq f_2(x_2) \geq 0$ （$a \in (0,1)$ は固定された数)。
- $f_i(x_i)$ は $x_i = 0, \alpha_i/4$ における反転で even.
- $f_1(0) = a$, $f_1(\alpha_1/4) = 1$ であり、これらの点で f_1 は非退化、またその間では狭義単調増加。

- $f_2(0)=0,\ f_2(\alpha_2/4)=a$ であり、これらの点で f_2 は非退化、またその間では狭義単調増加。

- f_1 の $x_1=0$ での形式的テイラー展開に $\sqrt{-1}(x_2-\alpha_2/4)$ を代入したものは f_2 の $x_2=\alpha_2/4$ での形式的テイラー展開に一致する。

2 番目の条件から f_i は実は周期 $\alpha_i/2$ を持つことがわかる。

トーラス R を involution

$$(x_1,x_2)\mapsto\left(-x_1,\frac{\alpha_2}{2}-x_2\right)$$

で割ったものを S とする。S は 2 次元球面に同相であり、商写像 $R\to S$ は 4 点で分岐する branched double covering となる。分岐点、例えば $(0,\alpha_2/4)$ の近傍で

$$\left(x_1+\sqrt{-1}\left(x_2-\frac{\alpha_2}{4}\right)\right)^2$$

の実部と虚部をを座標関数とするように S に可微分構造が入り、商写像は C^∞ 級になる。

$$g=(f_1(x_1)-f_2(x_2))\left(dx_1^2+dx_2^2\right)\ \not{a}g \tag{1}$$

$$F=\frac{1}{f_1-f_2}\left(-(a-f_2)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2+(f_1-a)\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2\right)$$

とおくと（ただし F 内の積は対称テンソル積)、これらは各々S 上のリーマン計量と TS （接束）の対称積の C^∞ section を定義し、F は（自然に T^*S 上の関数とみなして）その計量による S の測地流の第一積分となる。さらにこの時、4 つの分岐点は 1 つの閉測地線 C 上にあり、C に関する折り返し σ は S の well-defined な isometry で、F を保つ。

3 固有値のラベル付け

上の F の定義で対称積を微分作用素の積としたものを $-\Box$ と書くと、これは S 上 well-defined な 2 階の微分作用素を定義し、S のラプラシアン $\triangle$ と可換であり、また self-adjoint である。従って同時固有関数を考えることができる。また、折り返し σ は $\triangle, \Box$ と可換なので、それに関する偶奇性も同時に考えることができる。S 上の関数 u をトーラス上に持ち上げて $u(x_1, x_2)$ と書くことにすると、

補題 固定された $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$, $\epsilon = \pm 1$ に対して

$$\triangle u = \lambda u, \quad \Box u = \mu u, \quad \sigma^* u = \epsilon u$$

を満たす $u = u(x_1, x_2)$ の全体は高々 1 次元であり、$u = u_1(x_1)u_2(x_2)$ の形をしており、そこに現れる 1 変数関数 $u_i \in C^\infty(\boldsymbol{R}/\alpha_i \boldsymbol{Z})$ は $\kappa = \mu/\lambda$ と書いて、微分方程式

$$u_1''(x_1) = -\lambda(f_1(x_1) - a - \kappa)u_1(x_1) \tag{2}$$

$$u_2''(x_2) = -\lambda(a + \kappa - f_2(x_2))u_1(x_1) \tag{3}$$

を満たし、偶奇性

$$u_1(-x_1) = \epsilon u_1(x_1), \qquad u_2\left(\frac{\alpha_2}{2} - x_2\right) = \epsilon u_2(x_2) \tag{4}$$

を持つ。□

この同時固有関数 $u = u_1(x_1)u_2(x_2)$ について

$$\#\left\{0 < x_1 < \frac{\alpha_1}{2} \;\middle|\; u_1(x_1) = 0\right\} = p \tag{5}$$

$$\#\left\{\frac{\alpha_2}{4} < x_2 < \frac{3}{4}\alpha_2 \;\middle|\; u_2(x_2) = 0\right\} = q \tag{6}$$

で整数の組 (p,q) が定まるが、標準的な議論で次のことが分かる。$\boldsymbol{Z}_{\geq 0}$ で 0 以上の整数全体の集合を表すことにして、

定理 任意の $(p,q,\epsilon) \in \boldsymbol{Z}_{\geq 0} \times \boldsymbol{Z}_{\geq 0} \times \{\pm 1\}$ に対して (1) から (5) を満たす $u_i \in C^\infty(\boldsymbol{R}/\alpha_i \boldsymbol{Z})$ $(i=1,2)$ が存在するように λ, $\lambda\kappa$ が一意的に決まる。そして $u = u_1(x_1)u_2(x_2)$ は S 上の well-defined な関数を表す。特にこの対応で S のラプラシアンの固有値の全体は（重複するものはその分だけ数えて）$\boldsymbol{Z}_{\geq 0} \times \boldsymbol{Z}_{\geq 0} \times \{\pm 1\}$ と 1 対 1 の対応がある。□

上記の対応により、$(p,q,\epsilon) \in \boldsymbol{Z}_{\geq 0} \times \boldsymbol{Z}_{\geq 0} \times \{\pm 1\}$ に対応する λ, κ を各々

$$\lambda(p,q,\epsilon), \quad \kappa(p,q,\epsilon)$$

と書くことにする。ただし、$p=q=0, \epsilon=1$ の時は $\lambda=0$ で κ は定義されない。

例えば定曲率 1 の球面の場合は

$$\lambda(p,q,\epsilon) = \begin{cases} (p+q)(p+q+1) & \text{if } \epsilon = 1, \\ (p+q+1)(p+q+2) & \text{if } \epsilon = -1. \end{cases}$$

である。κ の値は a によるが、一般に明示的には知られていないように思う。

簡単な観察と標準的な議論により次のことが分かる。任意の (p,q,ϵ) について

$$-a < \kappa(p,q,\epsilon) < 1-a \tag{7}$$

$$C_1 \leq \frac{\sqrt{\lambda(p,q,\epsilon)}}{p+q} \leq C_2 \tag{8}$$

ここで C_1, C_2 は p, q によらない正定数である。

4 整数条件を満たすラグランジュ・トーラス

$(2E,F)$ で定義される写像 $T^*S-\{0\}\to\boldsymbol{R}^2$ は $F/2E\neq 1-a,\ 0,\ -a$ の時 regular であり（$F/2E$ の値域は $[-a,1-a]$ である)、そのときの1点の逆像は2つのラグランジュ・トーラスの disjoint union である。これらは -1 倍で移り合う。$F/2E=1-a,\ -a$ の時は逆像は2つの円の disjoint union であり、$F/2E=0$ の時は transver sal に交わる2つのトーラスの union である。

以後の記述を簡単にするために次のようにおく。

$$A_1(\kappa)=\int_{x_{1,0}}^{\alpha_1/4}\sqrt{f_1(x)-a-\kappa}\,dx \tag{9}$$
$$A_2(\kappa)=\int_0^{x_{2,0}}\sqrt{a+\kappa-f_2(x)}\,dx$$

ここで $x_{1,0}$ は $\kappa\geq 0$ の時は $0\leq x_{1,0}<\alpha_1/4$ で $f_1(x_{1,0})-a=\kappa$ なる点であり、$\kappa<0$ の時は 0 である。また $x_{2,0}$ は $\kappa>0$ の時は $\alpha_2/4$ であり、$\kappa\leq 0$ の時は $0\leq x_{2,0}<\alpha_2/4$ で $a-f_2(x_{2,0})=-\kappa$ なる点である。

命題 (1) $2E=\lambda_+,\ F/2E=\kappa_+>0$ なるトーラスが整数条件を満たすための条件は

$$\sqrt{\lambda_+}A_1(\kappa_+)=\frac{\pi}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right),\quad \sqrt{\lambda_+}A_2(\kappa_+)=\frac{\pi}{2}q \tag{10}$$

なる $p,q\in\boldsymbol{Z}_{\geq 0}$ が存在することである。

(2) $2E=\lambda_-,\ F/2E=\kappa_-<0$ なるトーラスが整数条件を満たすための条件は

$$\sqrt{\lambda_-}A_1(\kappa_-)=\frac{\pi}{2}p,\quad \sqrt{\lambda_-}A_2(\kappa_-)=\frac{\pi}{2}\left(q+\frac{1}{2}\right) \tag{11}$$

なる $p,q \in \boldsymbol{Z}_{\geq 0}$ が存在することである。□

κ に対して $A_1(\kappa)$ は単調減少、$A_2(\kappa)$ は単調増加であるので、命題の (1) と (2) の場合に各々

$$(1)\quad \frac{A_1(0)}{A_2(0)} > \frac{p+\frac{1}{2}}{q}, \qquad\qquad (2)\quad \frac{A_1(0)}{A_2(0)} < \frac{p}{q+\frac{1}{2}} \tag{12}$$

が成立することに注意しよう。

以下しばらく $\epsilon = 1$ の場合を扱う。上の不等式 (12) の、例えば (1) を満たす (p,q) に対し、前の式 (10) で λ_+, κ_+ が一意的に定まるが、それらを $\lambda_+ = \lambda_+(p,q,1)$, $\kappa_+ = \kappa_+(p,q,1)$ と書くことにすると、

定理　適当な正定数 C_1, C_2 があって、

$$\frac{A_1(0)}{A_2(0)} > \frac{p+1/2}{q}, \qquad p+q \geq C_1$$

なる p, q に対し、

$$\left|\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_+}\right| \leq \frac{C_2}{\kappa_+(1-a-\kappa_+)(p+q+1/2)}.$$

ただし、$\lambda = \lambda(p,q,1)$ である。□

ここで問題のトーラスを $2k+1$ 倍したものに代えると、対応する (p,q) は

$$(2kp+p+k, 2kq+q) \qquad (k=0,1,2,\dots)$$

に代わるので、

$$\lambda_k = \lambda(2kp+p+k, 2kq+q, 1), \qquad e_k = \lambda_+(2kp+p+k, 2kq+q, 1)$$

として 1 節に引用した定理が現れる。$A_1(0)/A_2(0) < p/(q+1/2)$ なる (p,q) についても λ_- を使って同様の定理を得る。なお、この定理は 3 節

の微分方程式(2), (3) に古典的な WKB 近似（三角関数とエアリ関数を使うもの）を適用して得られる。これについては [O1] を参照されたい。

結局、次の 2 つの問題点が明らかになった。1 つ目は

$$\frac{p}{q+1/2} \leq \frac{A_1(0)}{A_2(0)} \leq \frac{p+1/2}{q}$$

なる帯状領域に属する (p, q) について、$\lambda(p, q, 1)$ を近似する、整数条件を満たすラグランジュ・トーラスが存在しないという事実であり、2 つ目は κ_+ （あるいは κ）が critical value（特に 0 を問題にする）に近付いた時に近似の程度が悪くなるという現象である。

5 $\sqrt{\lambda}|\kappa|$ が有界な (p, q) の領域での近似

引き続き $\epsilon = 1$ とする。

$$D(\alpha) = \frac{\alpha}{2}\log\left(\frac{e}{|\alpha|}\right) + \frac{1}{2}\arg\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\alpha\right) + \frac{1}{2}\left(\arctan\left(e^{-\pi\alpha}\right) - \frac{\pi}{4}\right)$$

とおく。容易に分かるように

$$D(-\alpha) = -D(\alpha)$$

である。$\alpha \sim 0$ のときは第 1 項が支配的であり、また Stirli ng の公式により $\alpha \to \infty$ のときは $D(\alpha) \to -\pi/8$ である。定理の記述のため、次の式を用意しておく。

$$\sqrt{\lambda_0}A_1(\kappa_0) + D\left(\frac{\sqrt{\lambda_0}\,\kappa_0}{2\sqrt{c_0}}\right) = \frac{\pi}{2}\left(p + \frac{1}{4}\right) \tag{13}$$

$$\sqrt{\lambda_0}A_2(\kappa_0) - D\left(\frac{\sqrt{\lambda_0}\,\kappa_0}{2\sqrt{c_0}}\right) = \frac{\pi}{2}\left(q + \frac{1}{4}\right) \tag{14}$$

ただし、$c_0 = f_1''(0)$ である。

定理　ある正定数 C_1 （十分大）、C_2, C_3, C_4 （十分小）があって次を満たす。即ち、

$$p + q \geq C_1 \quad , \tag{15}$$

$$\left| A_2(0)\left(p + \frac{1}{4}\right) - A_1(0)\left(q + \frac{1}{4}\right) \right| \leq C_2 \log\left(p + q + \frac{1}{2}\right) \tag{16}$$

ならば

1. $\sqrt{\lambda_0}\,|\kappa_0| \leq C_3$, かつ上の (13), (14) を満たすように λ_0, κ_0 が 1 通りに定まる、
2. $\sqrt{\lambda}\,|\kappa| \leq C_3$,
3. $\left|\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_0}\right| \leq C_4(p + q + 1/2)^{-2/3}$.

ここで $\lambda = \lambda(p, q, 1)$, $\kappa = \kappa(p, q, 1)$ である。□

定理を解釈して 2 つの典型的場合を得る。$\kappa \to 0$ のとき

$$A_1(\kappa) + A_2(\kappa) = a_0 + a_1\kappa + O\left(\kappa^2\right)$$

の形になるが

系 1　$a_1 \neq 0$ のとき、定理の仮定を満たす (p, q) に対し、

$$A_2(0)\left(p + \frac{1}{2}\right) - A_1(0)q < 0$$

ならば

$$\left|\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_+}\right| \geq \frac{C}{(p + q + 1/2)^{1/2}} \qquad \square$$

となる。ここで C はある定数、λ_+ は前に定義した近似値である。即ち、Error term $O\left((p+q+1/2)^{-2/3}\right)$ の下で、$\sqrt{\lambda_+}$ はもはや $\sqrt{\lambda}$ の近似値としては不適当ということになる。この結果はもちろん最初に述べた Weinstein の結果と矛盾するものではない。つまり pq 平面の半直線に沿った漸近的な近似値を問題にするとき、直線の方向が違うと近似値も異なる、ということである。もっとはっきりいえば、pq 平面で傾きが $A_2(0)/A_1(0)$ と異なる直線は必ず遠方で (16) の表す領域から出てしまう、ということである。

系 2　$a_1 = 0$ のとき、定理の仮定を満たす (p,q) に対し、

$$\left|\sqrt{\lambda} - \frac{\frac{\pi}{2}\left(p+q+\frac{1}{2}\right)}{A_1(0)+A_2(0)}\right| \leq \frac{C}{(p+q+1/2)^{2/3}} \,.$$

ただし、C はある定数である。□

この場合は領域 (16) に属する (p,q) に対し、$\lambda(p,q,1)$ の近似値が簡単な式で explicit に書けてしまう。例えば定曲率球面の場合は $A_1(\kappa)+A_2(\kappa)$ が定数なので、この場合に属するが、そうでない場合も（１次元の constraint に過ぎないので）もちろんたくさんある。

定理の証明は 3 節の微分方程式 (2), (3) において W eber の放物柱関数を使った近似を行うことによる。これについては [O2] に依っている。

参 考 文 献

[D] J. J. Duistermaat, Oscillatory integrals, Lagrang e immersions, and unfoldings of singularities, Comm. Pure Appl. Math., 27 (1 974), 207–281.

[W] A. Weinstein, On Maslov's quantization condition, Lect. Notes Math., 459 (1975), 341–372.

[KMS] D.V. Kosygin, A.A. Minasov, and Ya.G. Sinai, S tatistical properties of Laplace-Beltrami operators on Liouville surfaces, Uspekhi Mat. Nauk 48 (1993), 3–130 (English transl. Russian Math. Surveys 48 (1993), 1–142) .

[K1] K. Kiyohara, Compact Liouville surfaces, J. Math. Soc. Japan, 43 (1991), 555–591.

[K2] K. Kiyohara, Two classes of Riemannian manifolds whose geodesic flows are integrable, Memoirs of AMS, 130/619 (1997).

[O1] F. W. J. Olver, Asymptotics and special functio ns, Academic Press (1974).

[O2] F. W. J. Olver, Second order linear differentia l equations with two turning points, Philos. trans. Royal Soc. London, Ser. A, 278 (1975), 137–174.

Title: Semi-classical approximations on Liouville surfaces

Kazuyoshi Kiyohara

Department of Mathematics, Faculty of Science,

Hokkaido University

Sapporo, 060-0810, Japan

E-mail: kiyohara@math.sci.hokudai.ac.jp