

乱流中の非線形相互作用のウェーブレット解析 —相互作用の局所性—

広大理	岸田圭史	(Kishida Keiji)
岡山理大工	荒木圭典	(Araki Keisuke)
農工大工	鈴木勝博	(Suzuki Katsuhiko)
広大情報処理セ	岸場清悟	(Kishiba Seigo)

1 はじめに

本研究では、3次元一様等方乱流中の非線形項によるエネルギー輸送を、正規直交非圧縮ベクトルウェーブレット基底を用いて解析する。

連続および離散ウェーブレット変換は、物理空間と Fourier 空間の双方で局在した構造を抽出するのに適していると考えられてきた。離散ウェーブレット変換の理論は多重解像度近似 (multiresolution approximation, MRA) として確立されている [1]。しかしこれはスカラー関数に対する変換である。乱流への応用を考えるとベクトル値の関数を扱わねばならないが、現在のところベクトル場の各成分に対して離散ウェーブレット変換を行った解析のみが行われている。この方法の問題点は、非圧縮ベクトル $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ のウェーブレット・スペクトル

$$\langle \psi_\lambda(\mathbf{x}), u_x(\mathbf{x}) \rangle \psi_\lambda(\mathbf{x}) \mathbf{e}_x + \langle \psi_\lambda(\mathbf{x}), u_y(\mathbf{x}) \rangle \psi_\lambda(\mathbf{x}) \mathbf{e}_y + \langle \psi_\lambda(\mathbf{x}), u_z(\mathbf{x}) \rangle \psi_\lambda(\mathbf{x}) \mathbf{e}_z \quad (1)$$

($\langle f, g \rangle$ は f, g の内積、 λ はウェーブレットを区別する添え字) は非圧縮性を破ってしまうことにある。これに対して非圧縮ベクトル値のウェーブレットを構成する試みがある [2, 3] が、正規直交性とアルゴリズムの簡便さを備えた実用的なものはなかった。

また、これまでの離散ウェーブレット変換を用いた解析は、正規直交性および局在性のみに着目した「Fourier 変換の代用品」として用いられるのみであり、多重解像度近似理論の成果を踏まえた解析はほとんど見られなかったように思われる。われわれは多重解像度近似理論と微分位相幾何学的に確立されたベクトル場の理論の基礎に立ち戻って、ベクトル値の離散ウェーブレット変換の理論の可能性を吟味した。その結果、スカラー関数のウェーブレットをもとにして多重解像度近似の性質を持つベクトル場の理論を構成することが可能であることが示された [4]。この理論に基づく正規直交非圧縮ウェーブレットの利点は、FFT や FWT (Fast Wavelet Transform) という従来アルゴリズムのみで変換が可能になる点にある。

われわれはこの基底を用いて乱流中の非線形項によるエネルギー輸送のふるまいを解析した [5]。本報告では、ベクトル値の多重解像度近似の簡単なレビューと、非線形輸送の解析結果の主要なものを報告する。

2 ベクトル値関数空間の直交分解と多重解像度近似

本節では、非圧縮正規直交ウェーブレットとその Navier-Stokes 方程式への応用を説明する前に、ベクトル場の直交分解、およびベクトル場の多重解像度近似¹のうちで本研究で用いる性質を簡単にレビューする。

定理 (Hodge-Beltrami 分解): 3次元周期境界条件 (\mathbb{T}^3) 上の 2乗可積分ベクトル場の関数空間² $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}^3)$ は、次の四つの部分空間に直交分解される

$$L_D(\mathbb{T}^3) = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}); f(\mathbf{x}) \in H^1(\mathbb{T}^3), \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \right\} \quad (2)$$

¹ベクトル値の多重解像度近似の理論の部分が 1998 年 1 月の発表 (文献 [6] を参照) の時点から大幅に理論的に改良された点である。

²以下、ベクトル値の関数空間を示すための添え字 \mathbb{R} を適宜書き添えることにする。

$$L_{\Sigma^+}(\mathbb{T}^3) = \left\{ \mathbf{u}(x); \mathbf{a}(x) \in H_{\mathbf{x}}^1(\mathbb{T}^3), \mathbf{u}(x) = \nabla \times \mathbf{a}(x), \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \, d\mathbf{x} > 0 \right\} \quad (3)$$

$$L_{\Sigma^-}(\mathbb{T}^3) = \left\{ \mathbf{u}(x); \mathbf{a}(x) \in H_{\mathbf{x}}^1(\mathbb{T}^3), \mathbf{u}(x) = \nabla \times \mathbf{a}(x), \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \, d\mathbf{x} < 0 \right\} \quad (4)$$

$$L_H(\mathbb{T}^3) = \left\{ \mathbf{u}(x); \nabla \times \mathbf{u}(x) = \mathbf{0}, \nabla \cdot \mathbf{u}(x) = 0 \right\} \quad (5)$$

ここで $H^1(\mathbb{T}^3)$ は Sobolev 空間、 $\boldsymbol{\omega} := \nabla \times \mathbf{u}$ である。

注意: この直交分解定理は、微分位相幾何学において確立された Hodge の分解定理と、ソレノイダル場の Beltrami 分解を統合したものになっている。解析を \mathbb{T}^3 上のベクトル場の関数空間に定めた理由は、(1) Hodge の分解定理は有界な多様体上で確立されている [7]、(2) 多重解像度近似理論は Euclid 空間 \mathbb{R}^N および \mathbb{T}^N 上で確立されている [1] からである。

証明: 証明の詳細は文献 [4] にゆずり、ここではアウトラインを簡単に説明する。Fourier 空間に球座標系の基底となるベクトル場

$$\mathbf{e}_r(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \quad \mathbf{e}_\varphi(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{k}}{|\mathbf{e}_z \times \mathbf{k}|}, \quad \mathbf{e}_\theta(\mathbf{k}) = \mathbf{e}_\varphi(\mathbf{k}) \times \mathbf{e}_r(\mathbf{k}) \quad (6)$$

を導入する³。これら基底ベクトル場と 2 乗可積分関数 $u(x) \in L^2(\mathbb{T}^3)$ の Fourier 係数を用いて、さきの各部分空間は

$$L_D(\mathbb{T}^3) = \left\{ \mathbf{u}(x); \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} h_D(\mathbf{k}) \hat{u}(\mathbf{k}) \exp(2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}/L) \right\} \quad (7)$$

$$L_{\Sigma^+}(\mathbb{T}^3) = \left\{ \mathbf{u}(x); \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} h_{\Sigma^+}(\mathbf{k}) \hat{u}(\mathbf{k}) \exp(2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}/L) \right\} \quad (8)$$

$$L_{\Sigma^-}(\mathbb{T}^3) = \left\{ \mathbf{u}(x); \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} h_{\Sigma^-}(\mathbf{k}) \hat{u}(\mathbf{k}) \exp(2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}/L) \right\} \quad (9)$$

$$L_H(\mathbb{T}^3) = \left\{ \mathbf{u}(x); u_x(0)\mathbf{e}_x + u_y(0)\mathbf{e}_y + u_z(0)\mathbf{e}_z \right\} \quad (10)$$

(ここで L はシステムサイズ、 $h_\sigma(\mathbf{k})$ は

$$h_D(\mathbf{k}) := -i\mathbf{e}_r(\mathbf{k}), \quad h_{\Sigma^+}(\mathbf{k}) := \frac{\mathbf{e}_\theta(\mathbf{k}) + i\mathbf{e}_\varphi(\mathbf{k})}{\sqrt{2}}, \quad h_{\Sigma^-}(\mathbf{k}) := \frac{\mathbf{e}_\theta(\mathbf{k}) - i\mathbf{e}_\varphi(\mathbf{k})}{\sqrt{2}} \quad (11)$$

で与えられる「ヘリカルベクトル」と表すことができる。これより空間 $L_D^2(\mathbb{T}^3)$, $L_{\Sigma^+}^2(\mathbb{T}^3)$, $L_{\Sigma^-}^2(\mathbb{T}^3)$ は 2 乗可積分かつ平均 0 の関数空間

$$L_0^2(\mathbb{T}^3) = \left\{ u(x); u(x) \in L^2(\mathbb{T}^3), \int_{\mathbb{T}^3} u(x) \, d\mathbf{x} = 0 \right\} \quad (12)$$

と同型であることが示される。したがってベクトル値の関数空間の基底関数は、このスカラー値の関数空間の基底関数を用いて構成できることがわかる。この性質を用いて各部分空間が L^2 -ノルムに対して完備であることが示される。(証明終)

この同型の性質を用いて形式的にベクトル値の多重解像度近似を構成することができる。多重解像度近似の主要な帰結のひとつは、マザー・ウェーブレットの張る空間が L^2 -空間を直交分解することにある:

$$L^2(\mathbb{T}^3) = V_0(\mathbb{T}^3) \oplus W_0(\mathbb{T}^3) \oplus W_1(\mathbb{T}^3) \oplus W_2(\mathbb{T}^3) \oplus \dots, \quad (13)$$

³ $\mathbf{k} // \mathbf{e}_z$ の場合は $\mathbf{e}_\theta(\mathbf{k}) := \mathbf{e}_r(\mathbf{k}) \times \mathbf{e}_z$ で定義する。

ここで $V_0(\mathbb{T}^3)$ は定数関数 (0 モード) の集合 $\{f(\mathbf{x}) = \text{const.}\}$ であり、 $W_j(\mathbb{T}^3)$ は \mathbb{R}^3 の正規直交マザー・ウェーブレット⁴ $\psi_\epsilon(\mathbf{x})$ の Fourier 係数を用いた

$$\psi_{j\ell}(\mathbf{x}) := 2^{-\frac{3}{2}j} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} \widehat{\psi}_\epsilon \left(\frac{\mathbf{k}}{2^j} \right) \exp \left[2\pi i \mathbf{k} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{L} - \frac{\mathbf{l}}{2^j} \right) \right], \quad (14)$$

(ここで j は空間解像度、 \mathbf{l} はウェーブレットの位置) で定義される関数によって張られる空間である、すなわち

$$W_j(\mathbb{T}^3) = \text{span} \left\{ \psi_{j\ell}(\mathbf{x}); \epsilon = 1, 2, \dots, 7, \mathbf{l} \in (\mathbb{Z}/2^j\mathbb{Z})^3 \right\}. \quad (15)$$

ベクトル値のウェーブレットの空間 $L_\sigma(\mathbb{T}^3)$ ($\sigma = D, \Sigma+, \Sigma-$) は、このおのおのの部分空間の「ヘリカル引き起こし」

$$\mathcal{P}_\sigma^\dagger u(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} h_\sigma(\mathbf{k}) \widehat{u}(\mathbf{k}) \exp(2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}/L) \quad (16)$$

$$\mathcal{P}_\sigma^\dagger W_j = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}); \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathcal{P}_\sigma^\dagger u(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}) \in W_j \right\} \quad (17)$$

によって構成される空間

$$L_\sigma^2(\mathbb{T}^3) = \mathcal{P}_\sigma^\dagger W_0(\mathbb{T}^3) \oplus \mathcal{P}_\sigma^\dagger W_1(\mathbb{T}^3) \oplus \mathcal{P}_\sigma^\dagger W_2(\mathbb{T}^3) \oplus \dots, \quad (18)$$

である。注意しなくてはならないことは、 \mathbb{T}^3 上の多重解像度近似理論では 0 モードを必ず含まなくてはならないが、ベクトル値のウェーブレットの空間では 0 モードが欠けている。このことは本報告のように、解像度のみに着目している場合には問題とならないが、組織構造の空間的な位置や広がり同定の伴う場合には問題となる。このことについては稿を改めて議論したい。

本研究では、正規直交ウェーブレット $\psi_{j\ell}(\mathbf{x})$ の Fourier 係数を用いて、次式で定義される「ヘリカルウェーブレット」を用いる:

$$\psi_{j\ell\pm}(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} h_{\Sigma\pm} \widehat{\psi}_{j\ell}(\mathbf{k}) \exp(2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}/L). \quad (19)$$

ウェーブレット関数として、Littlewood-Paley 型多重解像度近似に基づくウェーブレット (Meyer ウェーブレット) を用いた。任意性のある領域については Yamada and Ohkitani [8] に従って決定した。

ヘリカルウェーブレットの性質をいくつか挙げる: (1) 物理空間で実数値関数、(2) Fourier 空間で関数値が有限、かつコンパクトな台 (support) を持つ⁵、(3) 物理空間で局在する⁶。

3 速度場の直交分解と解像度毎のエネルギーの時間発展

本節では Navier-Stokes 方程式に従う非圧縮流体のスケール毎の運動エネルギーの時間発展について考察する。したがって本節で考える関数空間は非圧縮ベクトル場の空間

$$L_S^2(\mathbb{T}^3) := L_{\Sigma+}^2(\mathbb{T}^3) \oplus L_{\Sigma-}^2(\mathbb{T}^3) \oplus L_H^2(\mathbb{T}^3) \quad (20)$$

⁴3次元空間の場合、互いに直交するマザー・ウェーブレットは7種類ある。本研究では3次元のウェーブレットを、1次元のスケール関数 $\psi_0(x)$ 、マザー・ウェーブレット $\psi_1(x)$ のテンソル積で定義する: $\psi_\epsilon(x, y, z) := \psi_\xi(x)\psi_\eta(y)\psi_\zeta(z)$, ここで $\xi, \eta, \zeta = 0$ または 1 , $\epsilon := \xi + 2\eta + 4\zeta$ 。

⁵したがって Sobolev の埋め込み定理より、ヘリカル Meyer ウェーブレットが無限回微分可能な関数であることが分かる。

⁶7種類のウェーブレットのうち、6種類までが Schwarz クラス (急減少関数族) に入り、残り1種類 ($\epsilon = 4$) のウェーブレットの3成分のうち x, y -成分が r^{-2} で減少する「すそ」を $z \sim 0$ のせまい領域に持つ。 $\epsilon = 4$ の z -成分は急減少関数である (文献 [4] 参照)。

である。非線形項の計算においてこの空間への射影演算子 \mathcal{P}_S が必要になる。 \mathcal{P}_S は Fourier 変換を用いて次式で与えられる。

$$\mathcal{P}_S(\mathbb{T}^3)\mathbf{u}(\mathbf{x}) := \sum_{j=x,y,z} \left(\hat{u}_j(\mathbf{0}) + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} P_{ij}(\mathbf{k}) \hat{u}_j(\mathbf{k}) \exp(2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}/L) \right) \mathbf{e}_j, \quad (21)$$

$$P_{ij}(\mathbf{k}) := \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2} = \sum_{s=\pm} (h_{\Sigma_s}(\mathbf{k}))_i (h_{\Sigma_s}(\mathbf{k}))_j. \quad (22)$$

$i, j = x, y, z$, 同じ添え字は和を取る。

これから Navier-Stokes 方程式に従う非圧縮流体の運動エネルギーの時間発展の式を求めよう。まず速度場をウェーブレットの解像度クラス毎に分解する:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \mathbf{u}_j(\mathbf{x}, t) \quad (23)$$

ここで $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ 、各解像度クラス j の速度場 $\mathbf{u}_j(\mathbf{x}, t)$ はベクトル値関数の内積

$$\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \frac{1}{L^3} \int_{[0,L]^3} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (24)$$

を用いて次式で与えられる:

$$\mathbf{u}_j(\mathbf{x}, t) = \sum_{\epsilon=1}^7 \sum_{\mathbf{l} \in (\mathbb{Z}/2^j\mathbb{Z})^3} \sum_{\sigma=\pm 1} \langle \psi_{j\epsilon\sigma} | \mathbf{u}(t) \rangle \psi_{j\epsilon\sigma}(\mathbf{x}). \quad (25)$$

式 (23) を非圧縮 Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (26)$$

に代入し、 \mathbf{u}_j との内積をとる。解像度毎に速度場が直交すること ($\langle \mathbf{u}_j | \mathbf{u}_k \rangle \propto \delta_{jk}$) に注意すると、解像度クラス j の速度場の持つ運動エネルギー $E_j(t) := \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}_j(t) | \mathbf{u}_j(t) \rangle$ の時間発展

$$\frac{dE_j}{dt}(t) = T_j(t) + D_j(t) \quad (27)$$

を得る⁷、ここで輸送関数 T_j 、散逸関数 D_j は次式で表される:

$$T_j(t) := \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+} \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}_+} \langle \mathbf{u}_j | \mathbf{u}_k | \mathbf{u}_l \rangle, \quad D_j(t) := \nu \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}_+} \langle \mathbf{u}_j | \nabla^2 | \mathbf{u}_l \rangle \quad (28)$$

ただし

$$\langle \mathbf{u}_j | A | \mathbf{u}_l \rangle := \frac{1}{L^3} \int_{[0,L]^3} \mathbf{u}_j(\mathbf{x}, t) \cdot (A \mathbf{u}_l(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \quad (29)$$

A は L_S^2 から L_S^2 への線形作用素であり、 $|\mathbf{u}_k|$ は

$$|\mathbf{u}_k | \mathbf{a} \rangle := -\mathcal{P}_S(\mathbf{u}_k(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{a}(\mathbf{x})) \quad \text{for } \forall \mathbf{a}(\mathbf{x}) \in L_S^2 \quad (30)$$

で与えられる線形作用素である⁸。

⁷圧力項は \mathbf{e}_α が非圧縮なので消える。

⁸随伴作用素は次式で与えられる: $\langle \mathbf{a} | \mathbf{u}_k \rangle := \mathcal{P}_S(\mathbf{u}_k(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{a}(\mathbf{x}))$ 。

以下、式(27)に基づいてエネルギー輸送のふるまいを解析していく。式(27)は Fourier 係数に対する Navier-Stokes 方程式の表現⁹

$$\frac{\partial \hat{u}_i(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = P_{ij}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}=0} i(\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{u}}^*(\mathbf{p}, t)) \hat{u}_j^*(\mathbf{q}, t) - \nu k^2 \hat{u}_i(\mathbf{k}, t), \quad (31)$$

(*は複素共役、 $i, j = x, y, z$, 同じ添え字は和を取る)に基づいたエネルギー・スペクトル $E(k, t)$ の時間発展の式

$$\frac{dE(k, t)}{dt} = T(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t) \quad (32)$$

の類比 (analog) になっている、ここで

$$E(k, t) := \frac{1}{2} \int (\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)) \delta(|\mathbf{k}| - k) d\mathbf{k}, \quad (33)$$

$$T(k, t) := \text{Im} \left[\iiint (\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{p}, t)) (\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, t)) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q}) \delta(|\mathbf{k}| - k) d\mathbf{p} d\mathbf{q} d\mathbf{k} \right] \quad (34)$$

$\delta(\mathbf{k})$ は Dirac のデルタ関数、引数の $|\mathbf{k}| - k$ は『半径 k の球面上で積分』の意味。

4 エネルギー輸送関数と散逸関数のふるまい

解析に用いた乱流データは、Kishiba *et al.*[9]による直接数値計算により得られた減衰等方乱流の時刻 $t = 1.0$ のデータである。この時刻のデータの Taylor マイクروسケールに基づく Reynolds 数は $R_\lambda = 100$ である。計算は擬スペクトル法および Runge-Kutta-Gill 法、計算の格子点数は 128^3 、エイリアス誤差は除去されている。

Fig.1 に Fourier (黒丸) 及びウェーブレット (白丸) のエネルギー・スペクトルを示す。以下、ウェーブレット・スペクトルは式

$$k_j := \sqrt{\langle |\nabla \times \mathbf{u}_j|^2 \rangle / \langle |\mathbf{u}_j|^2 \rangle} \quad (35)$$

($\langle * \rangle$ は空間積分) で与えられる波数に基づいてプロットしてある (左から順に $j = 0, 1, 2, \dots, 7$)。Fig.2 にエネルギー散逸関数 $-2\nu k^2 E(k)$, D_j およびエネルギー輸送関数 $T(k)$, T_j を示した。ウェーブレット解析のものには線に丸を付した。系全体として、大きなスケール ($|\mathbf{k}| \leq 5, j \leq 2$) から、小さなスケール ($|\mathbf{k}| \geq 6, j \geq 3$) へと、非線形項はエネルギーを輸送している。

5 非線形エネルギー輸送のウェーブレット解析

本節では乱流中のエネルギーの非線形相互作用のウェーブレット解析の結果について説明する。以下、非線形相互作用 $\langle \mathbf{u}_j | \mathbf{u}_k | \mathbf{u}_l \rangle$ のうち、 $\langle \mathbf{u}_j |$ の部分に現れる添字を j 、 $|\mathbf{u}_k |$ の部分に現れる添字を k 、 $|\mathbf{u}_l \rangle$ の部分に現れる添字を l に固定して表記する。混乱の無い場合には、 $\langle j |$, $|k |$, $|l \rangle$ という略記を用いる。

エネルギー輸送過程における非線形相互作用の局所/非局所性を定量的に議論するために、『局所的』という用語を便宜的に次のように定義しておく。

- 局所的なエネルギー輸送: 非線形エネルギー輸送 T_j のうち、 $|l \rangle = |j-1 \rangle, |j+1 \rangle$ をみたすものの寄与。

⁹この表現は式(27)との類比を行うために、通常の教科書、論文等に現れる表現と二つの点が違う: (1) \mathbf{p}, \mathbf{q} の係数の入れ替えに対する対称化をしていない、(2) 移流項の微分演算を \mathbf{q} の係数に対して行っており、部分積分を用いて \mathbf{k} の係数に対する微分に書き換えていない。

- 局所的な相互作用: 非線形エネルギー輸送 T_j のうち、 $|k| = |j-1|, |j|, |j+1|$, および、 $|l| = |j-1|, |j+1|$ をみたまの寄与。

これらの定義は、 $|k|$ および $|l|$ で表される速度場の代表的な長さが、 $\langle j|$ の代表長さの約1/2倍から2倍になるように採られている。

Fig.3に $\langle j|k|l\rangle$ のうち、 $\langle 2|k|l\rangle, \langle 5|k|l\rangle$ で表される非線形相互作用の振幅の分布を示した。クラス $j=2$ は Fig.1 より明らかなように、積分スケールの渦に対応するスケールであり、Eq.(35)に基づく特徴的波数は $k_j = 3.52$ である。一方 $j=5$ は、散逸領域のスケールに属し Eq.(35)に基づく特徴的波数は $k_j = 24.09$ である。

非線形相互作用の大きさを直観的に示すために、補助的な等高線を図に描いた。等高線の間隔は相互作用の振幅の絶対値の最大値の10%である。また各相互作用の符号は、格子点に黒丸(正、受取)と白丸(負、放出)とバツ印(恒等的に零)を付して示した。 $\langle j|k|l\rangle$ の定義より、全格子点で値の総和が Fig.2 で示した T_j となる。

Fig.3 より非線形相互作用の主要な特徴が見出せる。まず第一に、非線形相互作用の振幅は $|k|$ と $|l|$ の入れ替えに対して著しい非対称性を示している。ついで、エネルギー輸送の大半が受取側は $|l| = |j-1|$ に、放出側は $|l| = |j+1|$ に集中している。したがってエネルギーは全体として、大きなスケールから小さなスケールへと非線形項によって輸送されている¹⁰。このような著しい集中は $|k|$ 方向には見られない。この二つの特徴はこれら以外のエネルギー収支においても見られた。これらの結果は従来対称化された Navier-Stokes 方程式に基づいた解析では見過ごされていたものである。

$j=5$ の非線形の収支に関して興味深い点は、 $|k|$ の分布に着目すると、受取、放出ともに $|j-1|, |j-2|, |j-3|$ に振幅の大きいものが集中している。したがってこのスケールのエネルギーカスケードを伴う渦運動に対して、主に約2倍から8倍程度のスケールの渦が寄与しており、それ以上のスケールの渦は、直接には寄与しないということが示唆される。

ここで得られた結果は、エネルギー輸送に対する局所的な相互作用の寄与が無視できないことを示しており、Domaradzki and Rogallo [10] の解析の与えた「非線形エネルギー輸送は、一辺の長さが極端に小さい非局所的な Fourier 三波相互作用に主に支配されている」という描像と首尾一貫しない相互作用の描像を与えるように思われる。

6 非線形相互作用の Fourier 解析の再吟味

われわれの結果と Domaradzki and Rogallo [10] の結果とは、定性的な傾向が著しく異なっている。この原因はどこにあるのであろうか。

ウェーブレット基底は、その構成法より Fourier 空間を公比2の等比数列的に分解する。一方で Domaradzki and Rogallo [10] の解析は Fourier 空間を等差数列的なバンドに分解した上で、各バンド毎の平均をとっている。したがって両者の相違のうち一番肝心な部分は、この Fourier 空間の分割法にあるのではないだろうか。本節では Fourier 空間の分割を変えた解析を、前節と同じ速度場を用いて行い、その結果を比較する。

まず、速度場 $\hat{u}(k)$ を Fourier 空間で厚さ $\Delta k = 6$ の等差数列をなす球殻で

$$u_j^L(x) := \sum_{6j+\frac{1}{2} \leq |k| < 6j+\frac{13}{2}} \hat{u}(k) \exp(2\pi i k \cdot x/L). \quad (36)$$

と分解し、前節と類比的な方法で非線形相互作用 $\langle u_j^L | u_k^L | u_l^L \rangle$ の寄与の大きさの解析を行った。

¹⁰ 任意の k に対して $\langle j|k|j+1\rangle = -\langle j+1|k|j\rangle$ なので、 $E_j(t)$ が単位時間あたり $\langle j|k|j+1\rangle$ だけエネルギーを失った分が、そのまま $E_{j+1}(t)$ の単位時間あたりのエネルギーの増加分に寄与している。したがって $\sum_k \langle j|k|j+1\rangle$ を『時刻 t における $E_j(t)$ から $E_{j+1}(t)$ への単位時間あたりのエネルギー輸送量』と呼ぶことには、妥当性が無いわけではない。

Fig.4 に $j = 4$ における非線形相互作用 $\langle u_4^l | u_k^l | u_l^l \rangle$ の分布を示す。クラス $j = 4$ の Eq.(35) に基づく特徴的波数は $k_j = 27.10$ であり、これはウェーブレット分解における $j = 5$ の特徴的波数に近い値を選んである。分布の特徴として、 $|l\rangle$ に関してはウェーブレット解析の場合と同様に、受取が $|j-1\rangle$ 、放出が $|j+1\rangle$ に分布のピークがある。しかし $|k\rangle$ に関して、最低波数バンドである $|0\rangle$ にピークがある。この傾向は全てのバンド j に対して見られており、いずれもピークは $k = 0$ にある。この結果は j が大きくなると共に非線形相互作用のピークが k の大きい側へ移動するというウェーブレット解析の結果と大きく異なっている。したがって等差分割に基づく分析によれば『エネルギー輸送は局所的、相互作用は非局所的』であると結論され、Domaradzki and Rogallo の結果と首尾一貫している。

ついで Fourier 空間を以下に挙げる方法で、公比 2 の等比的な球殻に分解し同様な解析を行う。

$$u_j^G(x) = \sum_{2^{j+1}/3 \leq |k| < 2^{j+2}/3} \hat{u}(k) \exp(2\pi i k \cdot x/L). \quad (37)$$

Fig.5 に $j = 5$ における非線形相互作用 $\langle u_5^G | u_k^G | u_l^G \rangle$ の分布を示す。ここで、クラス $j = 5$ の Eq.(35) に基づく特徴的波数は $k_j = 27.62$ であり、これはウェーブレット分解における $j = 5$ 、等差分割における $j = 4$ の特徴的波数に近い値を選んである。図より明らかのように、等比分割による解析は、ウェーブレット解析と定性的に同じ結果を与える事が示された。

同じ Fourier 基底による解析でも、等差分割ならば Domaradzki and Rogallo の解析と首尾一貫し、等比分割ならばウェーブレット解析と首尾一貫するという結果より、非線形相互作用の Fourier 解析は Fourier 空間の分割法に依存して、定性的な傾向を大きく異なるものに解釈してしまう可能性がある事が確かめられた。

References

- [1] Meyer, Y., *Wavelets and operators*, (Cambridge Univ. Press, 1992).
- [2] Battle, G. and Federbush, P., "Divergence-free vector wavelet", *Michigan Math. J.*, **40** (1993) pp.181-195.
- [3] Frick, P. and Zimin, V., "Hierarchical models of turbulence" in *Wavelets, Fractals, and Fourier Transforms* Ed. by Farge, M., Hunt, J. C. R., and Vassilicos, J. C., (Clarendon, Oxford, 1993) pp.265-283.
- [4] Araki, K., Suzuki, K., Kishida, K., and, Kishiba, S., "Multiresolution approximation of the vector fields on \mathbb{T}^3 ", *submitted to J. Math. Phys.*.
- [5] Kishida, K., Araki, K., Kishiba, S., and, Suzuki, K., "Local or nonlocal? Orthonormal divergence-free wavelet analysis of nonlinear interactions in turbulence", *submitted to Phys. Rev. Lett.*.
- [6] 荒木圭典、鈴木勝博、『測地線定式化と Euler 方程式の多重解像度近似』、(『渦度場のダイナミクスと乱流の数理解析』京都大学数理解析研究所講究録 1051、細川編) (1998) pp.49-58.
- [7] 吉田善章、『集団現象の数理解析』、(岩波書店、東京、1995) 第 4 章。
- [8] Yamada, M., and Ohkitani, K., "An identification of energy cascade in turbulence by orthonormal wavelet analysis", *Prog. Theo. Phys.*, **86** (1991) pp.799-815.
- [9] Kishiba, S., Ohkitani, K., and Kida, S., *J. Phys. Soc. Jpn.* **62** (1993) pp.3783-3787.
- [10] Domaradzki, J. A., and Rogallo, R. S., *Phys. Fluids A*, **2** (1990) pp.413-426.

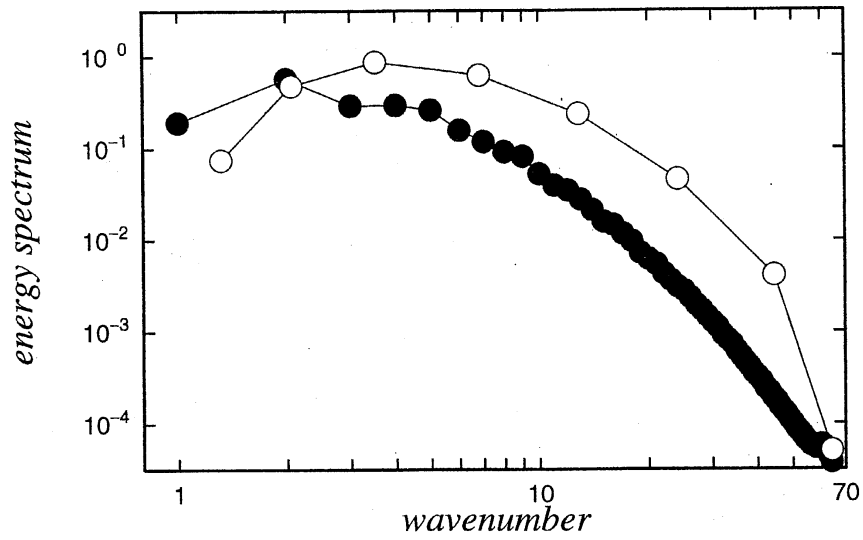


Fig.1 エネルギースペクトル (黒丸: フーリエ、白丸: ウェーブレット)

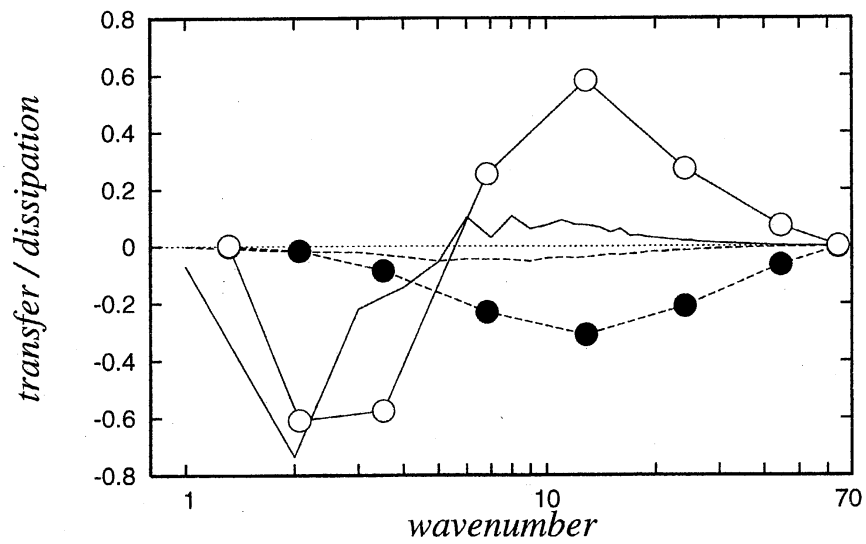
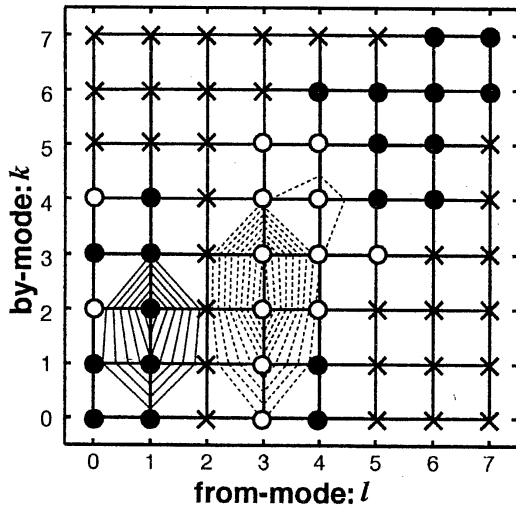
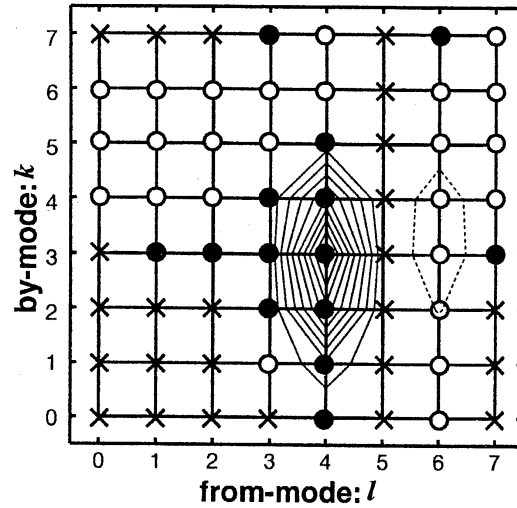
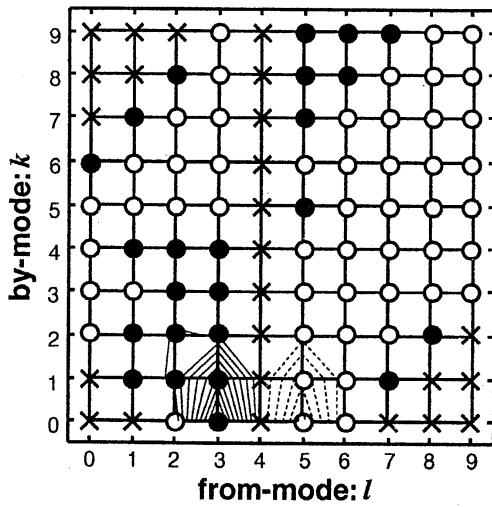
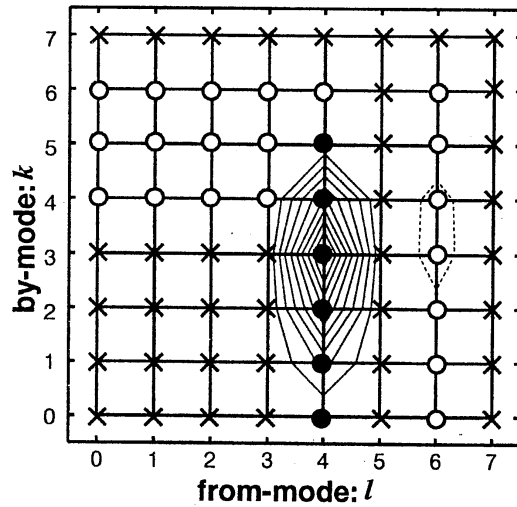


Fig.2 散逸関数 $-2\nu k^2 E(k)$ (破線), D_j (破線黒丸), 及び輸送関数 $T(k)$ (実線), T_j (実線白丸)

Fig.3(a) $\langle u_2 | u_k | u_l \rangle$ Fig.3(b) $\langle u_5 | u_k | u_l \rangle$ Fig.4 $\langle u_4^L | u_k^L | u_l^L \rangle$ Fig.5 $\langle u_5^G | u_k^G | u_l^G \rangle$

(Fig.3~Fig.5において、実線は正、破線は負の等高線(間隔は絶対値の最大値の10%)。各点での符号を黒丸(正)と白丸(負)と×(恒等的に零)で示してある。)