

## 2次元自由対流乱流における T-渦度構造のダイナミクス Dynamics of Structures of T-vorticity in 2D Free Convection Turbulence

京大院・理  
藤 定義

(SADAYOSHI TOH)

松本 剛

(TAKESHI MATSUMOTO)

### 1 はじめに

ここ 20 年の計算機の爆発的進歩によって、3次元非圧縮ナビエ・ストークス方程式 (以下 NS3D) の直接数値計算が可能となり、流れ場の詳細な情報が得られるようになった。数値乱流の  $Re_\lambda$  は 100 ~ 200 程度であるが、現象論を含む既存の乱流理論がこれらの情報から精密に検証されるとともに、流れ場の情報から得られるダイナミクスをも考慮した、さらに精緻な理論がつけられようとしている。

このような研究のなかで乱流中に組織的な微細高渦度集中領域 (ワーム構造) が発見され、注目されつつある。[1] この組織的渦構造が乱流の性質にどのような影響を持つのか、さらには、組織的渦構造の形成、維持、発展、消滅過程が盛んに研究されている。

本研究の目的は乱流中の組織的構造 (以下、構造) が乱流の普遍的性質であるカスケードとどのような関連があるのかを調べることである。我々が注目するのは NS3D 系ではなく、2次元自由対流乱流 (以下 FC2D) の温度場である。FC2D 系は周期境界条件、(平均温度勾配) = 0 の条件下での熱対流乱流で、良く知られているレイリー・ベナール対流の熱境界層から十分遠く離れた中心付近をモデル化したものである。従って、平均温度勾配はなく、乱流維持のために外力が必要となる。

FC2D 系では運動エネルギー  $\frac{1}{2}|u|^2$  が小さなスケールから大きなスケールへと輸送され、温度  $T$  の 2 乗ノルム  $\frac{1}{2}T^2$  (これをエントロピーと同一視する。[2]) が大きなスケールから小さなスケールへとカスケードすることが示されている。[3] (エントロピーカスケード)

ここで、

$$\chi(x, t) = \left( \frac{\partial T}{\partial y}, -\frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (1)$$

なる量を定義する。(これを以下、T-渦度と呼ぶことにする。) FC2D 系の温度場に注目するとき、構造に相当するのは高 T-渦度集中領域である。(図 1、2) 本研究ではこの構造を調べる。

T-渦度  $\chi$  の著しい性質として、以下の 2 点があげられる。まず第一に、発展方程式が

$$\frac{D\chi}{Dt} = (\chi \cdot \nabla)u + \kappa \Delta \chi \quad (2)$$

$(D/Dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla))$  となり、NS3D系の渦度方程式と同じ伸長項を持つこと。ただし、速度  $\mathbf{u}$  と渦度  $\boldsymbol{\omega}$  の間にはビオ・サバルで結ばれる関係があるが、FC2D系では T-渦度  $\chi$  と速度場  $\mathbf{u}$  を結ぶ直接の関係はない。

また第二に、T-渦度の 2 乗ノルムがはっきりした意味を持つ。エントロピー散逸率 (温度散逸率)  $\epsilon_\theta$  は、

$$\epsilon_\theta(\mathbf{x}, t) \equiv \kappa(\nabla T) \cdot (\nabla T) \quad (3)$$

と定義されるので、T-渦度の 2 乗ノルムは

$$|\chi(\mathbf{x}, t)|^2 = (\nabla T) \cdot (\nabla T) = \frac{\epsilon_\theta(\mathbf{x}, t)}{\kappa} \quad (4)$$

となり、定数 (熱拡散係数  $\kappa$ ) を除きエントロピー散逸率  $\epsilon_\theta$  と同一のものになる。つまり、T-渦度の構造を見ることはエントロピー散逸率の構造をみることと同じである。これに対して、NS3D系の渦構造と運動エネルギー散逸率の空間構造との関係は自明なものではない。

さらに、FC2D系が 2 次元であることから、T-渦度は温度場の勾配に対応し、高 T-渦度層のダイナミクスは温度界面のダイナミクスをみることと等価である。界面というはっきりした物理的対象を念頭におくことができるのは FC2D系のメリットである。

本研究で示したことは以下の 2 点である。

1. T-渦度の構造には局所的に (2) 式の平衡解で記述できる部分があること。(この平衡解は NS3D系のバーガス渦層に相当する。)
2. スケール  $l$  でのエントロピー散逸率の空間平均を求め、 $\langle \epsilon_{\theta l}^p \rangle \sim l^{\tau_p}$  の間欠性指数  $\tau_p$  を ESS (Extended Self Similarity) を用いて調べた。

以下、第 2 節で基礎方程式、数値計算にふれる。第 3 節では T-渦度の平衡解と数値計算との比較について述べる。第 4 節ではエントロピー散逸の間欠性指数について述べる。第 5 節が議論と結論である。

## 2 基礎方程式および数値計算

FC2D系の基礎方程式はブシネ近似を用いており、速度  $\mathbf{u}$ 、温度  $T$  について、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \alpha g T \mathbf{e}_y + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (6)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa \Delta T, \quad (7)$$

である。ここで  $\mathbf{e}_y$  は  $y$  方向の単位ベクトルで重力の向きは  $-\mathbf{e}_y$  である。また、流体の平均密度は定数で 1 に規格化してある。この場合の渦度方程式は

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \alpha g \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (8)$$

となる。

本研究の数値計算では  $x, y$  方向それぞれに対し周期  $2\pi$  の周期境界条件を課して、フーリエ・ガラキン近似を用いた。モード数  $N$  は  $x, y$  方向ともに 1024 である。擬スペクトル法を用い、時間

表 1: 本計算でのパラメータ

$L$	正方形の一辺の長さ	$2\pi$
$N$	一空間方向の分割数	1024
$\Delta t$	時間ステップ	$5.0 \times 10^{-4}$
$\nu$	動粘性率	$2.0 \times 10^{-4}$
$\kappa$	熱拡散係数	$2.0 \times 10^{-4}$
$\alpha \times g$	(熱膨張係数)×(重力加速度)	1.0 と規格化した。
$f_0$	温度場の外力	$2.0 \times 10^{-1}$
$k_0$	渦度場の人工散逸の波数閾値	3.0
$D_0$	渦度場の人工散逸の大きさ	$2.0 \times 10^{-1}$

表 2: 一つのスナップショットから空間平均してもとめた長さスケール

記号	意味	数値	メッシュサイズ規格化
$L_{BO}$	ボルギアーノ・オブコフ長さ	$1.42 \times 10^{-2}$	2.32
$\eta$	コルモゴロフ長さ (運動エネルギー)	$6.14 \times 10^{-3}$	1.00
$\eta_\theta$	コルモゴロフ長さ (エントロピー)	$7.06 \times 10^{-3}$	1.15
$\lambda_x$	温度に関するテイラー長さ ( $x$ )	$4.64 \times 10^{-2}$	7.58
$\lambda_y$	温度に関するテイラー長さ ( $y$ )	$4.60 \times 10^{-2}$	7.50

発展は4次のルンゲ・クッタ法を用いた。エイリアジング誤差の除去は1/2位相シフトと Orszag のトランケーション [4](八角形) によって行ったので、実効モード数は  $(2\sqrt{2}N/3)^2$  である。

また、流れ場を統計的に定常にするために温度場に外力をいれる。特定の波数モード  $(k_x, k_y) = \frac{2\pi}{L}(2, 2), \frac{2\pi}{L}(-2, -2), \frac{2\pi}{L}(2, -2), \frac{2\pi}{L}(-2, 2)$  に対して、定数  $f_0$  の外力を加える。

さらに、運動エネルギーの逆輸送の影響を除くために大きなスケールで運動エネルギーを抜く。いわゆるドラッグ項  $-D_0 \frac{1}{k^2} \hat{\omega}$  を  $|\mathbf{k}| \leq k_0$  に対して渦度方程式に加える。本計算のパラメータを表 1 に示す。プラントル数  $Pr = \nu/\kappa$  は 1 である。

計算はランダムな初期条件からはじめて、長時間に渡って計算し、統計的に定常になったとみなせる時間帯を解析の対象とした。統計的に定常になった後の長さスケール (9)(10) を表 2 に示す。

$$L_{BO} = \frac{\epsilon^{5/4}}{\epsilon_\theta^{3/4} (\alpha g)^{3/2}}, \quad \eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}, \quad \eta_\theta = \left\{ \frac{\kappa^5}{\epsilon_\theta (\alpha g)^2} \right\}^{1/8} \quad (9)$$

$$\lambda_x = \sqrt{\frac{\langle T^2 \rangle}{\langle \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 \rangle}}, \quad \lambda_y = \sqrt{\frac{\langle T^2 \rangle}{\langle \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \rangle}} \quad (10)$$

また、(10) 式であたえられるテイラー長さからレイリー数  $Ra_\lambda$  を定義しておく。

$$Ra_{\lambda_x} \equiv \frac{\alpha g \langle T^2 \rangle^{1/2} \lambda_x^3}{\kappa \nu} = 1.33 \times 10^3 \quad (11)$$

$$Ra_{\lambda_y} \equiv \frac{\alpha g (T^2)^{1/2} \lambda_y^3}{\kappa \nu} = 1.28 \times 10^3 \quad (12)$$

ここで $\lambda_x \sim \lambda_y$ であることに注意して欲しい。これは微視スケールでは乱れが等方化することを示唆するものである。

### 3 平衡解との比較

この節では T-渦度の平衡解と数値計算で得られた構造との比較を行う。

#### 3.1 平衡解

外場として線形淀み点流を考え、速度場が以下のように与えられるものとする。(Aは正の定数。)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (-Ax, Ay) + (0, v(x, t)) \quad (13)$$

さらに温度が $x, t$ にのみ依存すると仮定すると、T-渦度は

$$\chi = \left(0, -\frac{\partial T}{\partial x}(x, t)\right) = (0, \chi(x, t)) \quad (14)$$

となる。このとき、T-渦度の方程式(2)式は

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} - Ax \frac{\partial \chi}{\partial x} = A\chi + \kappa \Delta \chi \quad (15)$$

となり、 $\chi(x, t) = e^{At} \tilde{\chi}\left(e^{At}x, \frac{e^{2At}-1}{2A}\right)$  と変数変換することによって $\tilde{\chi}(\tilde{x}, \tilde{t})$  は一次元熱伝導方程式に帰着される。解は、任意の初期条件 $\chi_0(x)$ について

$$\chi(x, t) = e^{At} \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp\left\{-\frac{(\tilde{x} - x')^2}{4\kappa t}\right\} \chi_0(x') \quad (16)$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{A}{2\pi\kappa}} \exp\left(-\frac{A}{2\kappa}x^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \chi_0(x') dx' \quad (t \rightarrow \infty) \quad (17)$$

と表される。これは NS3D 系でのバーガース渦層と同じものである。これを $t=0$ での無限遠方間の温度差 $\Theta$ をもちいて表しておく。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_0(x') dx' = T_0(+\infty) - T_0(-\infty) = \Theta_0 \quad (18)$$

$$\chi(x) = \Theta_0 \sqrt{\frac{A}{2\pi\kappa}} \exp\left(-\frac{A}{2\kappa}x^2\right) \quad (19)$$

また、(19)式の平衡解をもちいて渦度 $\omega(x) = dv/dx$ の平衡解について考察する。淀み点流(13)の収縮方向に $x$ 軸、伸長方向に $y$ 軸をとったので、このとき重力が $-g(\cos\theta, \sin\theta)$ で表されるものとする。(e<sub>y</sub>と淀み点流の $x$ 軸のなす角を $\theta$ とした。)すると、(8)式は

$$\nu \frac{d^2 \omega}{dx^2} + Ax \frac{d\omega}{dx} - \alpha g \sin \theta \chi = 0 \quad (20)$$

となる。境界条件  $x \rightarrow \pm\infty$   $\omega(x) = 0$  のもとで、(20) 式の解は、 $\kappa = \nu$  のとき以下のようなになる。

$$\omega(x) = -\frac{\Theta_0 \alpha g \sin \theta}{A} \sqrt{\frac{A}{2\pi\kappa}} \exp\left(-\frac{A}{2\kappa} x^2\right) \quad (21)$$

以上をまとめると線形淀み点流 (13) 式のもとで  $T(x)$  と、渦度  $\omega(x)$  の局在を仮定するとき、平衡解は (19)(21) 式で表されることがわかった。T-渦度  $\chi$  は重力の方向に依存しない。一方、渦度  $\omega$  は重力の向き及び、T-渦度  $\chi$  の大きさに依存して誘導される。つまり、バーロクリニックな効果により、渦度  $\omega$  が生成されるのである。

### 3.2 構造の追跡

流れ場のスナップショット (ある時刻  $t_0$  での温度場  $T(x, y, t_0)$  が計算領域全体で記録されているもの) で、T-渦度の構造を空間的に同定、追跡して平衡解との比較を行う。

T-渦度の絶対値  $\chi(x, y) = |\chi|$  を格子点  $(X_i, Y_j)$  近傍で二次函数補間を行う。

$$\chi(x, y) = a(x - X_i)^2 + 2c(x - X_i)(y - Y_j) + b(y - Y_j)^2 + d(x - X_i) + e(y - Y_j) + f \quad (22)$$

この補間には 6 格子点の情報が必要になる。点  $(x, y)$  の最近接 6 格子点の選び方は図 3 によって、

- 領域 1 にある場合 点 P  $(X_{i-1}, Y_{j+1})$
- 領域 2 にある場合 点 Q  $(X_{i+1}, Y_{j+1})$
- 領域 3 にある場合 点 R  $(X_{i-1}, Y_{j-1})$
- 領域 4 にある場合 点 S  $(X_{i+1}, Y_{j-1})$

ときめる。(22) 式の補間が有効な領域はこの領域内とする。

T-渦度の構造は  $\chi$  の「尾根」(すなわち頂上を結んだもの) に相当する。その同定には二次式 (22) 式の主軸変換で  $a, b, c$  のつくる対称行列の固有値を見れば判定が可能である。二つの固有値のうち、絶対値の大きいものの符号が負であれば、この領域は「山」であることがわかる。構造の中心は (22) 式の主軸変換 (格子点  $(X_i, Y_j)$  を中心とした適当な角度の回転) によって、

$$\chi(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lambda_1(\tilde{x} - \tilde{x}_*)^2 + \lambda_2(\tilde{y} - \tilde{y}_*)^2 + \tilde{f} \quad (23)$$

となるとき点  $(\tilde{x}_*, \tilde{y}_*)$  を逆変換でもとに戻した点  $(x_*, y_*)$  が展開 (22) 式の領域内にあればこの点を構造の中心と定義する。また、主軸変換から、この点で局所的に構造に平行な方向  $\mathbf{v}_{\parallel}$  (絶対値の小さい固有値に属するもの)、構造に垂直な方向  $\mathbf{v}_{\perp}$  (絶対値の大きい固有値に属するもの) を判定することが可能である。

以上の方法で同定した中心点を結んでいけば構造が空間的に追跡できたことになる。この連結は以下のように行った。

- 1 構造の中心点を始点  $\mathbf{x}_0$  として与え、構造に平行な方向  $\mathbf{v}_{\parallel}$ 、垂直な方向  $\mathbf{v}_{\perp}$  を求める。
- 2 始点から  $\mathbf{v}_{\parallel}$  方向に  $\delta s_{\parallel}$  だけすすむ。
- 3 到着点  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta s_{\parallel} \mathbf{v}_{\parallel}$  において、主軸変換をおこない固有値をしらべてこの点が構造に含まれているかどうかを調べる。含まれていなければ構造は  $\mathbf{x}_0$  で終ったとみなす。含まれていければ、 $\mathbf{v}_{\perp}$  方向の断面上の点  $\mathbf{x}'_i = \mathbf{x} + i \delta s_{\perp} \mathbf{v}_{\perp}$  ( $i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm I$ ) で  $\chi$  を求める。

- 4 この断面上で極大値を探し、極大値があればこれを次の始点とし、1へもどる。無ければ構造はそこで終わったとする。

以上で、点 $x'_i$ など、任意の点(格子点以外の点)での $\chi$ は(22)式の補間をこの点が入っている領域で求めることで計算する。実は以上の方法をとると、構造の中心点は追跡の出発点として必要になるだけであり、後は構造方向のベクトル $v_{\parallel}$ にそって伸ばしていくことで構造を追跡できる。また、この方法では閾値を一切必要としない。

この連結方法で、こちらが与えるパラメータは $\delta s_{\parallel}$ 、 $\delta s_{\perp}$ 、 $I$ である。 $I$ は小さい値で良いはずで、実際、 $I = 4$ 程度で良い結果が得られた。 $\delta s$ については経験的に決めるほか無いように思われる。(小さければ小さい程良いかという点も必ずしもそうとはいえなかった。)とくに構造がらせん状に巻いているところでは $\delta s_{\parallel}$ を小さくするとうまく追跡することが不可能であった。

### 3.3 平衡解と数値計算との比較

以上の方法で同定した構造の局所的な振舞と平衡解(19)(21)式との比較を行った。図4に追跡した構造の中心を示す。図4に書かれた直線は各点での構造に垂直な方向( $v_{\perp}$ 方向)をあらわし、これらに沿って各点での断面を調べた。(図5は図4のBの断面。)

さらに以下の量をもちいて断面を規格化する。

- $A_0(\geq 0)$  構造の中心点における変形速度テンソルの固有値。
- $\chi(x, y) = \chi(x, y) \cdot v_{\parallel}$  構造方向のT-渦度成分

構造に垂直な方向を式(24)のように規格化し、

$$x' = \frac{x}{\sqrt{\frac{2\kappa}{A_0}}} \quad (24)$$

$$\frac{\chi(x')}{\chi(0)}, -\frac{A_0}{\alpha g \sin \theta \chi(0)} \omega(x') \quad (25)$$

をプロットしたものが図6である。(x=0は構造の中心点を表す。)これは図4の断面Bである。平衡解(19)(21)式によれば、(25)式に相当するものは

$$\chi(0) = \Theta \sqrt{\frac{A}{2\pi\kappa}} \quad (26)$$

$$\frac{\chi(x)}{\chi(0)} = -\frac{A}{\alpha g \sin \theta \chi(0)} \omega(x) = \exp \left\{ -\left( \sqrt{\frac{A}{2\kappa}} x \right)^2 \right\} \quad (27)$$

となることを示している。実際、図6によると、ここでは構造は平衡解に非常に近い振舞を示していることがわかる。このような振舞は断面すべてにわたって見られるわけではなく、図4の範囲では、断面A、B、Cで見られている。特に構造が、らせん状に巻いているところではこのような振舞はみられない。等値面(図2)をみるとらせん状の領域では渦の回転効果がストレインによる伸長効果よりも支配的で、構造はいずれ「切れる」ようである。

## 4 エントロピー散逸の間欠性

### 4.1 指数の評価

数値計算で得られた温度場、速度場からエントロピー散逸率  $\epsilon_\theta(x, y) = \kappa(\nabla T(x, y)) \cdot (\nabla T(x, y))$  のスケーリング則  $\langle \epsilon_{\theta l}^p \rangle \sim l^\tau$  を考察し、ESS をもちいて指数  $\tau_p$  を決定する。

以下では、間隔  $l$  での速度差、温度差として

$$\delta u_l(x, y) = u(x+l, y) - u(x, y) \quad (\text{速度 } x \text{ 成分縦速度差}) \quad (28)$$

$$\delta T_l(x, y) = T(x+l, y) - T(x, y) \quad (29)$$

をもちいる。散逸率  $\epsilon_\theta$  は格子間隔を  $\Delta = 2\pi/1024$  として、 $l/\Delta = 1, 2, 3, \dots, 16$  でサンプルした、一辺  $2l$  の正方形内での平均、

$$\epsilon_{\theta l}(X, Y) = \frac{1}{(2M)^2} \sum_{m_1=-M}^M \sum_{m_2=-M}^M \epsilon_\theta(X + m_1\Delta, Y + m_2\Delta) \quad (M = l/\Delta) \quad (30)$$

を使った。また、ここでの平均  $\langle \cdot \rangle$  はスナップショットにおける空間平均をさらに複数のスナップショットに渡って時間平均をとったものである。

さて、NS3D 系でのコルモゴロフの 4/5 乗則に対応する関係が (7) 式より、

$$\langle \delta T_l^2 \delta u_l \rangle = -\frac{4}{3} \bar{\epsilon}_\theta l \quad (31)$$

と導かれる。[5] ( $\bar{\epsilon}_\theta = \int \epsilon_\theta(x) d^2x / L^2$ ) 図 7 に  $\langle \delta T_l^2 \delta u_l \rangle$  と実際の長さ  $l$  の関係を示す。 $l$  の大きいところでは (31) に近い振舞が見れる。

ESS の考え方は実際の長さスケール  $l$  とのスケーリング関係を求めるのではなく、

$$\mathcal{L} = \frac{\langle \delta T_l^2 \delta u_l \rangle}{\bar{\epsilon}_\theta} \quad (32)$$

で与えられる長さスケール  $\mathcal{L}$  とのスケーリングを求めることである。[6] 以下では、 $\bar{\epsilon}_\theta$  は定数であるとして  $\langle \delta T_l^2 \delta u_l \rangle$  とのスケーリングを求めていく。

また、NS3D 系の Refined Similarity Hypothesis (以下 RSH)、

$$\epsilon_l \sim \delta u_l^2 \frac{\delta u_l}{l} \quad (33)$$

に対応する現象論的關係、

$$\epsilon_{\theta l} \sim \delta T_l^2 \frac{\delta u_l}{l} \quad (34)$$

の成立を調べる。(34) 式が成立する長さスケール  $l$  においては、

$$\langle (\delta T_l^2 \delta u_l)^p \rangle \sim \langle \epsilon_{\theta l}^p \rangle l^p \sim \langle \epsilon_{\theta l}^p \rangle \langle T_l^2 \delta u_l \rangle^p \quad (35)$$

となり、

$$\frac{\langle (\delta T_l^2 \delta u_l)^p \rangle}{\langle \epsilon_{\theta l}^p \rangle \langle T_l^2 \delta u_l \rangle^p} = (\text{スケールによらない定数}) \quad (36)$$

となるはずである。これを  $p = n/3$  ( $n = 1, 2, \dots, 9$ ) についてプロットしたものを図 8 に示す。この  $p$  の範囲では  $l \geq 10\Delta$  ではほぼ一定となっているようである。つまり、この範囲では ESS の考え方にもとづく RSH (36) 式が成立していると見てよさそうである。

さらにエントロピー散逸率  $\langle \epsilon_{\theta l}^p \rangle$  と  $\langle \delta T_l^2 \delta u_l \rangle$  の関係を図 9 に示す。 $(p = 3 \text{ まで})$  これらのグラフを直線でフィッティングすることで得られた指数  $\tau_p$  は表 3 のとおりである。

表 3: エントロピー散逸率の指数

$p$	$\tau_p$	$p$	$\tau_p$
1/3	0.0402	2	-0.260
2/3	0.0374	7/3	-0.378
1	0	8/3	-0.501
4/3	-0.0659	3	-0.626
5/3	-0.154		

## 4.2 指数と間欠性モデルの比較

以上で得られた指数 $\tau_p$ を She-Lévêque のモデル [7](以下、SL モデル。)を用いてフィッティングする。SL モデルを選んだ理由は、このモデルが含むパラメータが乱流中の散逸場の構造と関連づいていることにある。エントロピーカスケードと T-渦度場の構造 (散逸場の構造と同一) との関連をあきらかにすることができるかもしれない。SL モデルでは指数が、

$$\tau_p = ap + C_0 \left\{ 1 - \left( 1 + \frac{a}{C_0} \right)^p \right\} \quad (37)$$

( $C_0$ は特異構造の余次元で、 $a$ は $\epsilon_{\theta l}^{(\infty)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \langle \epsilon_{\theta l}^{p+1} \rangle / \langle \epsilon_{\theta l}^p \rangle \sim l^a$ なる指数。)である。いま、 $\epsilon_{\theta l}$ に最も大きい寄与をする特異構造の次元が1であると仮定すると、余次元は $C_0 = 1$ となる。そして残るパラメータ $a (< 0)$ をフィッティングによって決定する。 $1/3 \leq p \leq 3$ でフィットしたところ、 $a = -0.5047 \pm 0.0013$ が得られた。これから、我々は $a = -1/2$ と予測する。つまり、

$$\tau_p = -\frac{1}{2}p + 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^p \quad (38)$$

である。 $\tau_p$ のグラフを図10に示す。

NS3D系でのSLモデルの議論によれば(37)式の指数 $a$ は eddy turn over time  $t_l \sim l^{2/3}$ から決められている。FC2D系の場合、これに相当するものはボルギアーノ・オブコフスケーリング( $\alpha_g, \bar{\epsilon}_\theta, l$ による次元解析)によって決定することが可能である。つまり、

$$\delta u_l \sim \bar{\epsilon}_\theta^{-1/5} (\alpha_g)^{2/5} l^{3/5} \quad (39)$$

から、FC2D系の eddy turn over time に相当する時間 $t_{\theta l}$ は

$$t_{\theta l} \sim l / \delta u_l \sim \bar{\epsilon}_\theta^{-1/5} (\alpha_g)^{-2/5} l^{2/5} \quad (40)$$

と決められる。指数 $a$ が $t_{\theta l}$ だけから決定されるとの議論がこの場合に正しければ、 $a = -2/5$ となるはずである。しかし、そうならないと我々は結論する。この指数 $a$ は構造のなんらかのダイナミクスと関連づいているのではないかと考えられる。

## 5 議論・結論

T-渦度の構造を局所的に見ると、平衡解で記述できる部分があることがわかった。このことは、構造を平衡に維持する機構の変動が周囲の流れ場の変動に較べて十分に速い(部分がある。)とい

える可能性を示し、乱流の時間スケールの縮約可能性を示唆する。このさらなる検証には1本の構造の時間発展を追跡する必要がある。

局所平衡な構造が移流しているということをもっと大きなスケールで見ることによって構造のつなぎ変えを論じることが可能である。等温線で囲まれる閉領域が流れに引き伸ばされ、等温線の間隔が密になっていき、粘性が効果的になるスケールにまで密になると拡散によって勾配がぼやけていき構造が切れるというシナリオを立てることができるであろう。そして、構造が切れる場所では渦度が強くなっており、構造の巻きあがりがおきていると考えられる。例えば  $|\chi|$  の等高線 (図2) の下部を見ると、もともと繋がっていたものであると予想される。このような描像を描くことが可能になるのも2次元性の利点である。

エントロピー散逸の間欠性を ESS を用いて指数を決定した。我々は、これから  $\epsilon_{\theta l}^{(\infty)} \sim l^{-1/2}$  と結論する。この指数  $-1/2$  の意味がはたして、構造のダイナミクスとどのように関連づくかを明らかにする必要がある。NS3D系での SL モデルではこの指数は eddy turn over time  $t_l \sim l^{2/3}$  から決められているが、その理由は自明なものではない。

平衡解 (バーガス渦層解) で記述できる部分は、よく知られているように  $\kappa \rightarrow 0$  で (単位長さあたりの散逸率)  $\rightarrow 0$  である。おそらく、この極限で散逸率  $\epsilon_{\theta l}$  に主要な寄与をするのは平衡解で記述できる部分ではないと考えられる。主要な寄与をするのは構造がらせん状に巻いている部分であると我々は予想している。

このらせんを特徴づける長さスケール、時間スケールを構造のダイナミクスに基づいて導き出すことが、エントロピー散逸の間欠性を理解する上での鍵になると思われる。このことを通して、間欠性モデルの物理的な内容 (たとえば、物理量が  $l \rightarrow \infty$  で発散することの意味) がさらに明らかになると我々は考えている。

## 参考文献

- [1] Frisch, U. *Turbulence* Cambridge Univ. Press. (1995) pp.185
- [2] L'vov, V.S. "Spectra of Velocity and Temperature Fluctuations with Constant Entropy Flux of Fully Developed Free-Convective Turbulence" *Phys.Rev.Lett* **67**(1991)687
- [3] Toh, S. & Suzuki, E. "Entropy Cascade and Energy Inverse Transfer in Two-Dimensional Convective Turbulence" *Phys.Rev.Lett* **73**(1994)1501
- [4] Orszag, S.A. "Numerical Simulation of Incompressible Flows Within Simple Boundaries. I Galerkin (Spectral) Representations" *Stud.Appl.Math* **50**(1971)293
- [5] Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. *Fluid Mechanics* 2nd edition Pergamon Press (1987) pp.214
- [6] Benzi, R., Biferale, L., Ciliberto, S., Struglia, M.V. & Tripiccion, R. "Generalized scaling in fully developed turbulence" *Physica D* **96**(1996)162
- [7] She, Z.S. & Lévéque, E. "Universal Scaling Laws in Fully Developed Turbulence" *Phys.Rev.Lett* **72**(1994)336

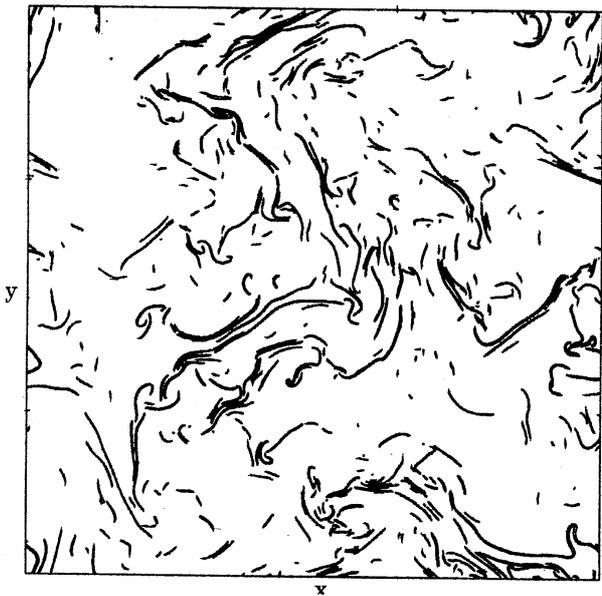


図 1: T-渦度の集中領域。| $\chi$ | = 40 の等高線で、計算領域全体。囲まれる面積は全体の7%。



図 2: | $\chi$ | の等高線図。等高線は 4, 10, 20, 30, 40, 60, 80。

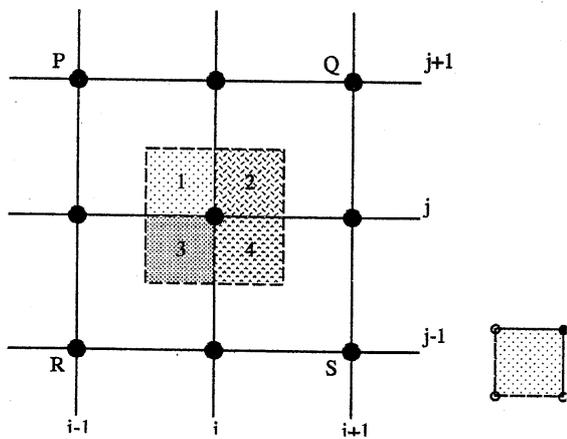


図 3: 補間の領域。境界は右下を参照。

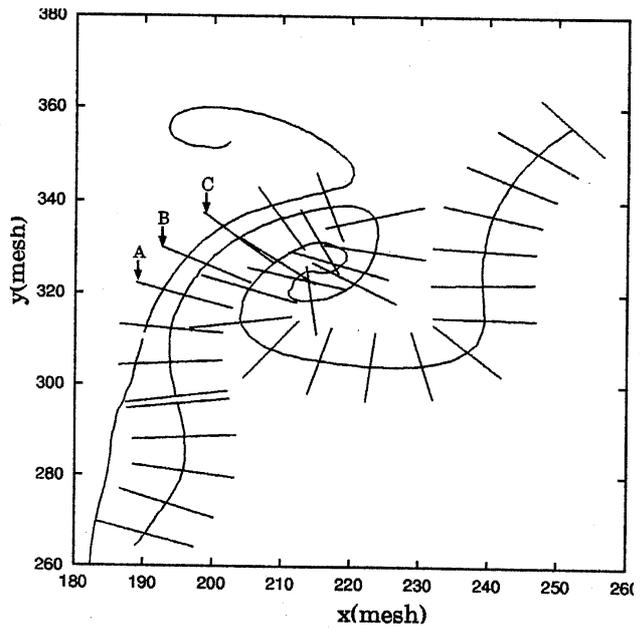


図 4: 追跡した構造の中心。直線は断面を上から見たもの。図 2 に対応している。

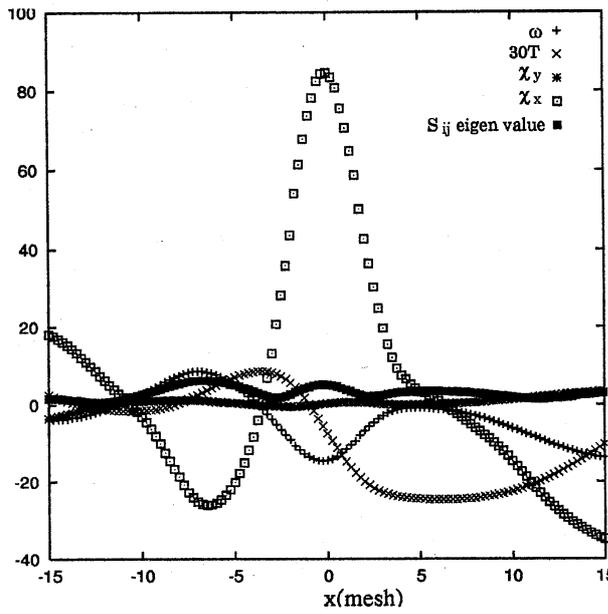


図 5: 構造の断面 (B)

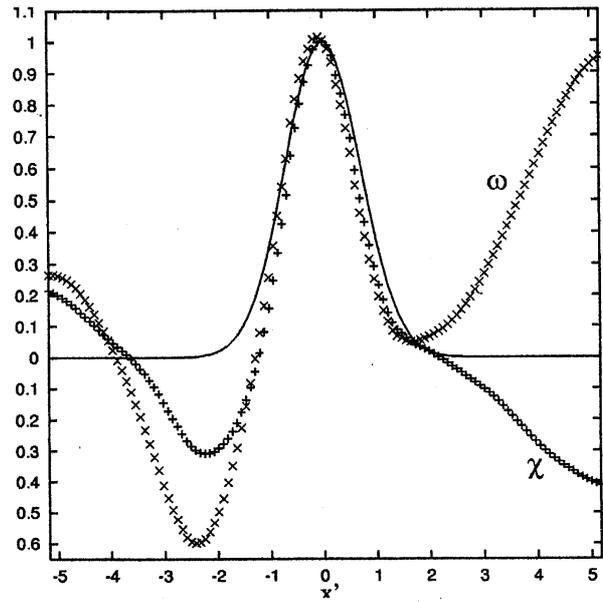


図 6: 規格化した構造の断面 (B)。実線は  $\exp(-x'^2)$ 。

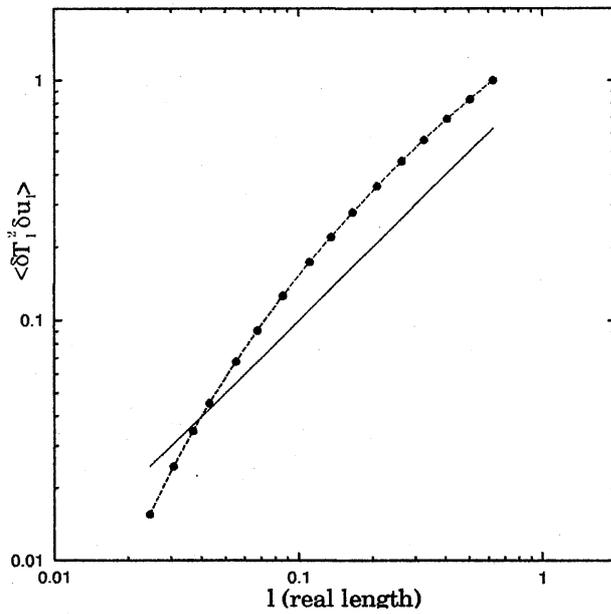


図 7:  $l$  と  $\langle \delta T_l^2 \delta u_l \rangle$ 。実線は  $\langle \delta T_l^2 \delta u_l \rangle \sim l$  を表す。

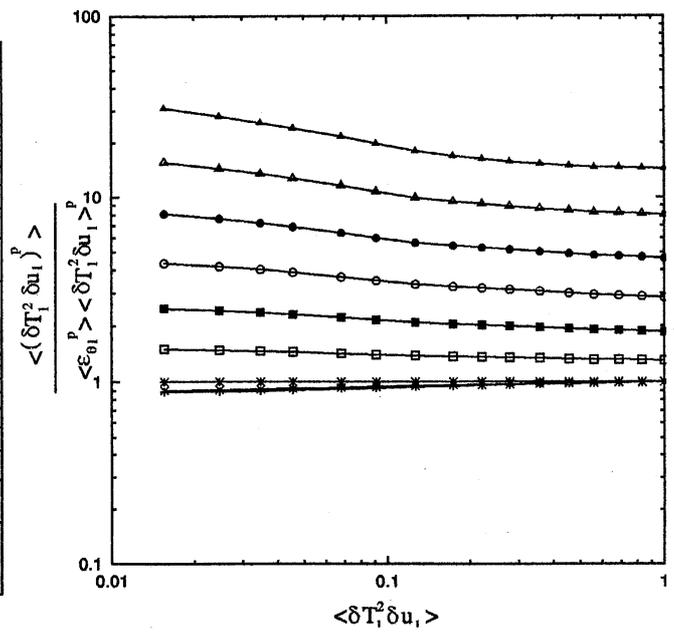


図 8: RSH の検証。 $\langle \delta T_l^2 \delta u_l \rangle$  の大きいところではほぼ水平になっている。下から、 $p = 1/3, 2/3, \dots, 8/3, 3$ 。

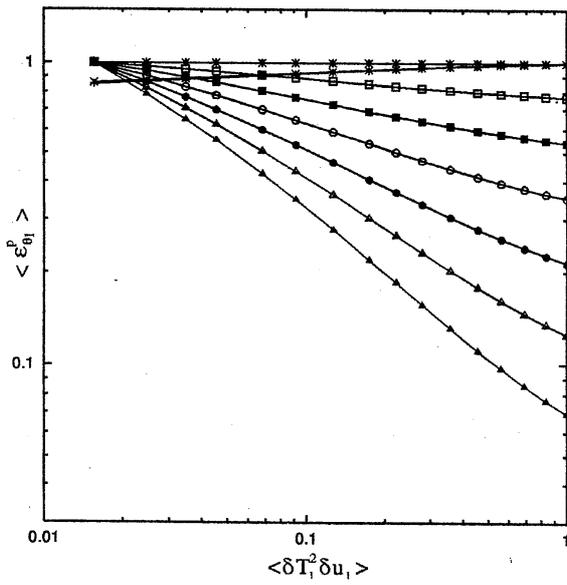


図 9:  $\epsilon_{\theta 1}$ と  $\langle \delta T_1^2 \delta u_1 \rangle$  の関係。下から  $p = 3, 8/3, \dots$ 。

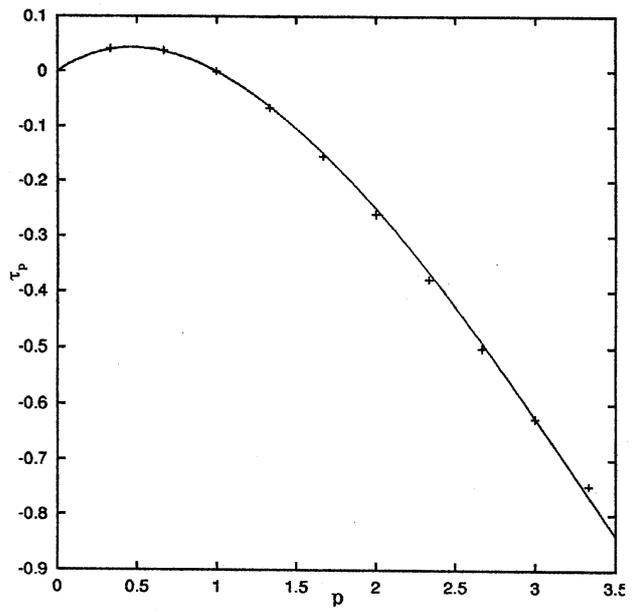


図 10: 指数  $\tau_p$ 。実線はフィテイングによって得られた  $-p/2 + 1 - (1/2)^p$ 。