

## 水平に置かれた同心二重円筒内に生じる熱対流

同志社大学工学部 水島 二郎 (Jiro Mizushima)  
林 幸子 (Sachiko Hayashi)  
足立 高弘 (Takahiro Adachi)

### 1 はじめに

水平に置かれた同心二重円筒間内に満たされた流体中に生じる熱対流の問題は熱交換器のもっとも単純で実用的なモデルとして、これまでさまざまな研究がなされてきた。内円筒を加熱し外円筒を冷却することにより内外円筒間に温度差を与えると、円筒間内の流体には熱対流が生じる。このとき、円筒間内に発生する熱対流のパターンは、円筒の内直径  $D_i$  と内外円筒間隔  $L$  の比で定義されるアスペクト比  $A = D_i/L$ 、温度差に比例するパラメータであるレイリー数  $Ra$ 、流体の物性値であるプラントル数  $Pr$  に依存して決まる。

レイリー数が小さいとき、発生する自然対流は定常流で、その対流パターンはアスペクト比  $A$  によらず円筒の中心を通る鉛直軸を挟み左右に対称な大きな2つの循環領域からなり、三日月形対流と呼ばれている。三日月形対流の速度場と温度場は実験的にも数値計算によってもこれまで十分に詳しく調べられている。たとえば、Kuehn and Goldstein[1]は、三日月形自然対流の速度場と温度場を数値計算と実験の両面から詳しく調べ、内外円筒面でのヌッセルト数を評価した。かれらの実験はマッハ・ツウエンダー干渉法を用いた可視化実験であり、可視化で得られた干渉写真から局所ヌッセルト数を評価した。実験は空気 ( $Pr = 0.7$ ) と水 ( $Pr = 7.0$ ) の二つの流体について行われた。数値計算においては定常方程式を差分近似しSOR法を用いて定常解を数値的に求めた。解析は主としてアスペクト比  $A = 1.25$  の場合について重点的に調べたが、局所ヌッセルト数のアスペクト比依存性についても計算が行われた。

ある初期条件から出発した解が三日月形対流となるまでの時間の評価は、Tsui and Tremblay[2]によって調べられ、非常に短時間で定常解へ遷移することが示されている。彼らの数値シミュレーションはアスペクト比  $A = 2, 4, 10$  の三つの場合について空気 ( $Pr = 0.71$ ) の熱対流を調べたものであり、得られた定常状態はKuehn and Goldsteinの数値計算および実験結果とよく一致している。ただし、定常状態において外円筒と内円筒のヌッセルト数が一致しないのは温度境界層内における格子点数が少なかったためであることがわかっている。[3]

Powe, Carley and Bishop[4]は空気 ( $Pr = 0.7$ ) を用いた可視化実験により、パラメータ  $Ra$  と  $A$  の広い範囲にわたって、円筒間内の流体に発生する自然対流のパターンを調べ、自然対流のパターンの分類を行った。その結果によると、レイリー数  $Ra$  が小さいとき、発生する自然対流は定常流であり、対流パターンは三日月形対流である。レイリー数  $Ra$  を大きくしていくと、 $Ra$  がある臨界値を超えたとき自然対流の対流パターンが変化する。

その変化の仕方は  $A$  の範囲によって異なる。アスペクト比が比較的小さいとき、すなわち  $0 < A < 2.8$  では、 $Ra$  がある臨界値を超えると自然対流は円筒の軸方向には速度をもたず鉛直中心面に対して振動する 2 次元振動流へと遷移し、 $2.8 < A < 8.5$  では円筒の軸方向に振動する 3 次元ら旋状流へ遷移する。また、 $8.5 < A$  では円筒間の上部に複数の渦をもつ 2 次元定常流に遷移することを示した。さらに、それらの遷移の臨界レイリー数  $Ra_c$  を実験的に求めた。

アスペクト比が比較的小さい場合 ( $A = 0.743, 1.37, 2.37$ ) に、空気の自然対流が不安定となり、振動流になったときの、振動の振幅、周期、波数などの詳細な実験データは Bishop, Carley and Powe[5] により求められた。発生した振動は円筒の軸方向に位相が異なっているおり、流れ場は 3 次元的な変化をしていることが報告されている。

Choi and Kim[6] は 2 次元定常解の 3 次元攪乱に対する線形安定性を数値シミュレーションの手法で調べた。かれらは空気 ( $Pr = 0.71$ ) の自然対流をアスペクト比  $2 \leq A \leq 10$  の範囲で数値計算を行い、 $A \geq 2.1$  のときは安定性の交替が起こり、最初の不安定性では振動流とはならないことを確認した。各アスペクト比について 2 次元定常解が 3 次元攪乱に対して線形不安定となる臨界レイリー数を評価し、その結果は Powe, Carley and Bishop[4] の結果と比較的よく一致する結論を得た。

Rao et al.[7] は 2 次元および 3 次元数値シミュレーションを行い、空気の場合 ( $Pr = 0.7$ ) について主にアスペクト比  $A = 10, 11.4, 13$  の場合に流れ場の構造を数値シミュレーションによって調べ、三日月形の対流が複数の渦をもつ流れに遷移することを示した。また、Yoo[8] は空気 ( $Pr = 0.7$ ) の場合の数値シミュレーションをアスペクト比  $0.1 \leq A \leq 10$  の範囲で行った。かれは流れ場が 2 次元性であると仮定して、差分近似を用いて計算を行った。その結果、小さいアスペクト比  $A = 1.25$  ではある臨界レイリー数より小さいレイリー数のときは対流は定常流で三日月形の対流のみが現れ、臨界レイリー数よりも大きくなると三日月形の対流だけでなく、内円筒の頂上部に 1 対 2 個の渦をもち、頂上部で下降流である下降 2 渦流も生じること、すなわち定常解として二つの安定な解が同時に存在することを示した。ここで、三日月形の対流は内円筒の頂上で上昇流である。中間のアスペクト比  $2.8 < A < 8.5$  と大きいアスペクト比  $A = 10$  では、ある臨界レイリー数よりも大きなレイリー数で三日月形の対流と下降 2 渦流が同時に存在するレイリー数の領域があり、さらに大きなレイリー数では三日月形対流が不安定となり、内円筒の頂上部で 2 対 4 個の渦をもち、頂上部で上昇流となる上昇 4 渦流に変化することを示した。

ここでは、水平に置かれた同心二重円筒内に生じる熱対流について、その安定性と乱流への遷移現象を明らかにするため、2 次元性の仮定のもとで、数値シミュレーション、非線形平衡解の直接計算とその平衡解の線形安定性を調べる。特に解の分岐の構造について詳しく調べ、対流のパターンや対流の力学的特性が変化する臨界レイリー数を求める。発生する自然対流の速度および温度場とその安定性はプラントル数に依存するが、ここでは空気 ( $Pr = 0.7$ ) の場合に限定して議論することにする。アスペクト比は  $A = 1$  から

20 までの範囲で計算を行う。

## 2 基礎方程式

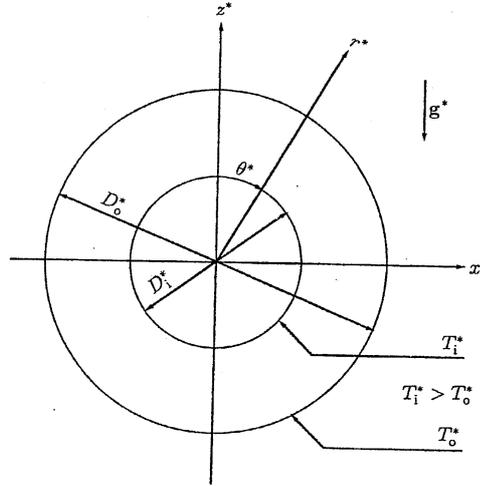


図 1: Co-ordinate system of the problem.

一定の重力場に水平に置かれた外直径  $D_o^*$ 、内直径  $D_i^*$  の同心二重円筒間内に満たされた流体を考える。流れの場は 2 次元であると仮定する。座標系は図 1 に示すように、直角座標系として円筒の中心を通過して鉛直方向に  $z^*$  軸、水平方向に  $x^*$  軸 をとり、極座標系として半径方向に  $r^*$  軸、周方向には円筒の鉛直上端から時計周りに  $\theta^*$  軸をとる。円筒の内壁および外壁は、完全熱伝導性をもつ固体壁であるとし、内円筒表面の温度を  $T_i^*$ 、外円筒の温度を  $T_o^* (< T_i^*)$  に保つ。なお、アスタリスクをつけた量は、次元を有する物理量を表す。

全ての方程式を、代表的な長さ  $L^* = (D_o^* - D_i^*)/2$ 、代表的な時間  $(L^*)^2/\kappa$ 、および代表的な温度として  $\delta T^* = T_i^* - T_o^*$  を用いて無次元化する。流れ場は 2 次元であると仮定しているので流れ関数  $\psi$  を用いる。また、無次元温度  $\phi$  を円筒の境界条件を満たす調和関数  $\Phi$  と流体の無次元温度  $T$  との差で定義する。すなわち、

$$T = \Phi + \phi, \quad \Phi = a \log r + b,$$

$$a = \left\{ \log \left( \frac{A}{A+2} \right) \right\}^{-1}, \quad b = -a \log \frac{A+2}{2}. \quad (1)$$

浮力項を除いては流体の物質的な性質は変わらないとするブジネスク近似を用いると、流れ関数  $\psi$  と温度  $\phi$  を支配する方程式は無次元系で次のように書くことができる。

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \frac{1}{r} J(\psi, \Delta \psi) = Pr \Delta^2 \psi + \frac{1}{r} Pr Ra \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \cos \theta + Pr Ra \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{a}{r} \right) \sin \theta, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{r} J(\psi, \phi) + \frac{a}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \Delta \phi. \quad (3)$$

ここで、流れの場を特徴づける無次元パラメータは、次式で定義される円筒のアスペクト比  $A$ 、レイリー数  $Ra$ 、およびプラントル数  $Pr$  である。

$$A = \frac{D_i^*}{L^*}, \quad Ra = \frac{\gamma g \delta T^* (L^*)^3}{\kappa \nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}. \quad (4)$$

また、 $J(r, \theta)$  と  $\Delta$  は次式で示される、ヤコビアンとラプラシアンである。

$$J(f, g) = \frac{\partial(f, g)}{\partial(r, \theta)}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (5)$$

速度  $\mathbf{u}$  は、 $\psi$  を用いて無次元形で  $\mathbf{u} = (u, v) = ((1/r)(\partial\psi/\partial\theta), -\partial\psi/\partial r)$  となる。境界条件は、円筒の内壁および外壁が固定かつ完全熱伝導であると仮定する。すなわち、

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \quad \phi = 0, \quad \text{at } r = \frac{A}{2}, \frac{A}{2} + 1 \quad (6)$$

とする。また、周方向には周期境界条件が成り立つ。

### 3 発展方程式の数値シミュレーション

発展方程式 (2) および (3) を関数展開法を用いて展開し、数値シミュレーションを行い解の挙動を調べる。ここでは、流れ関数  $\psi$  と温度  $\phi$  を、周方向にはフーリエ級数展開し、半径方向にはチェビシエフ多項式によって展開する。ここで、次式を用いて基礎方程式 (2), (3) を変換し、 $-1 \leq \eta \leq 1$  の範囲でチェビシエフ多項式を用いる。

$$\eta = 2 \left( r - \frac{1}{2}(A+1) \right). \quad (7)$$

このとき、流れ関数  $\psi$  および温度  $\phi$  は次式のように表せる。

$$\begin{aligned} \psi(\eta, \theta, t) &= \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} \sum_{n=0}^N a_{mn}(t) \tilde{T}_n(\eta) e^{im\theta}, \\ \phi(\eta, \theta, t) &= \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} \sum_{n=0}^N b_{mn}(t) \tilde{T}_n(\eta) e^{im\theta}. \end{aligned} \quad (8)$$

流れ関数  $\psi$  および温度  $\phi$  は実数であるので、 $a_{(-m)n} = a_{mn}^*$ 、 $b_{(-m)n} = b_{mn}^*$  が成り立つ。ここで、 $*$  は共役複素数を表す。 $M, N$  は展開の打ち切り項数であり、 $(a_{mn}(t), b_{mn}(t))^T$  のみが時間に依存するとする。また、 $\tilde{T}_n(\eta)$ 、 $\tilde{\tilde{T}}_n(\eta)$  は、次式で示される境界条件を満たすように変形された、 $n$  次の変形チェビシエフ多項式である。

$$\tilde{T}_n(\eta) = (1 - \eta^2) T_n(\eta), \quad \tilde{\tilde{T}}_n(\eta) = (1 - \eta^2)^2 T_n(\eta). \quad (9)$$

展開式(8)を式(2), (3)に代入し, 各フーリエモード毎に方程式を分離し  $\eta$  方向にコロケーション法を用いると次の形の常微分方程式系が得られる.

$$C \frac{d}{dt} \mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{Z}. \quad (10)$$

ここで, コロケーションポイントは,  $\eta$  方向について, 両円筒間の中心で疎, 両円筒の壁近傍で密となるよう  $\eta_i = \cos((i+1)\pi/(N+2))$ , ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) ととる. 非線形項の計算においては, 周方向にFFTを用いた擬スペクトル法により計算を行う.

まず数値シミュレーションにより, アスペクト比  $A = D_i^*/L^* = 10$  の場合について発展方程式(2)および(3)の初期値問題の解としてどのような自然対流が発生し, その解がどのような時間変化をするかを調べる. 代表的な計算例として, レイリー数  $Ra = 1800$  と  $Ra = 5000$  の結果を示す. 数値計算においては, 式(7)の展開打ち切り項数を  $M = 64$ ,  $N = 14$  とし, 時間刻み幅を  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$  とした. 展開打ち切り項数  $M$  と  $N$  および時間刻み幅  $\Delta t$  についてはその値を変えても,  $Ra \leq 5000$  の範囲内では数値シミュレーションの結果が有効数字4桁の範囲で変わらないことを確かめた. 初期条件として主に, 次の2通りの初期条件 A と初期条件 B を用いた.

$$\text{初期条件 A: } \operatorname{Re}(a_{mn}) = \operatorname{Im}(b_{mn}) = 0.0, \quad \operatorname{Im}(a_{mn}) = \operatorname{Re}(b_{mn}) = 0.2, \quad \text{for all } (m, n), \quad (11)$$

$$\text{初期条件 B: } \operatorname{Re}(a_{mn}) = \operatorname{Im}(b_{mn}) = 0.0, \quad \operatorname{Im}(a_{mn}) = \operatorname{Re}(b_{mn}) = -0.2, \quad \text{for all } (m, n). \quad (12)$$

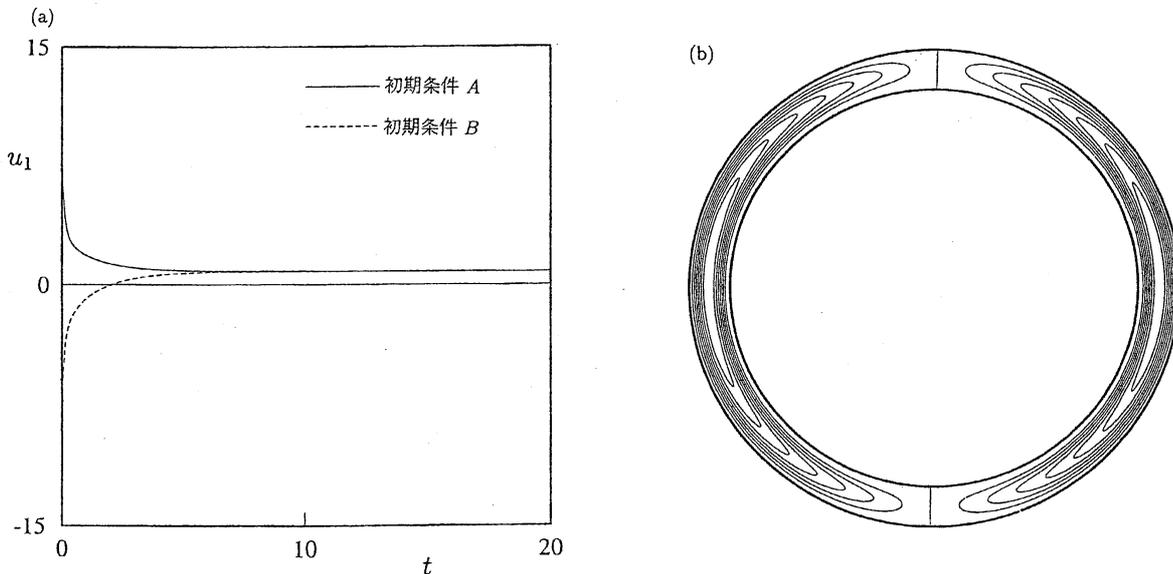


図 2: Results of numerical simulation .  $Ra = 1800$  (a):Time evolution of  $u_1$ , (b):Flow field at steady state.

レイリー数が比較的低い  $Ra = 1800$  での計算結果を図2(a), (b)に示す. 数値シミュレーションで得られる非線形解を特徴づける代表物理量として, ここでは  $(\eta, \theta) = (0.0, 0.0)$

での  $\eta$  方向の速度  $u_1$  を用いる。

$$u_1 = -\frac{2}{\eta + A + 1} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \quad (13)$$

図2(a)は、速度  $u_1$  の時間変化である。この図において実線は初期条件Aから出発した場合であり、点線は初期条件Bから出発した場合である。図に示されるように速度  $u_1$  は初期条件として初期条件A、初期条件Bのどちらの初期値を用いても一定の値  $u_1 = 0.846$  に収束し流れ場は図2(b)となる。流れ場は図2(b)で示されるように  $z$ -軸に対称な、大きな2つの渦からなる対流となる。水平同軸円筒間の熱対流は水平平板間の熱対流とは異なり、どんなに小さいレイリー数においても対流は発生し、その対流はほぼ図2(b)で示されるような三日月形対流となる。そのときの温度場は等温線がほぼ同心円状に並ぶ温度分布であり、流体運動がないと仮定したときの熱伝導方程式の解と似た温度分布となる。

レイリー数が比較的大きい  $Ra = 5000$  においても、十分時間が経過すると流れは定常流となる。この様子を見るために、速度  $u_1$  の時間変化を図3(a)に示す。 $Ra = 1800$  の場合と同様、この図においても、実線は初期条件Aから出発した場合であり、点線は初期条件Bから出発した場合である。この図から、初期条件Aから出発したときと初期条件Bから出発したときでは到達する定常解が異なることがわかる。

初期条件Aを用いると、速度  $u_1$  は図3(a)における実線で示されるように、一定の値  $u_1 = 9.66$  に収束漸近する。このときの流れ場を図3(b)に示すような上昇4渦流である。このときの温度場は図3(c)で示されるように、 $z$ -軸上 ( $\theta = 0$ ) とその両脇 ( $\theta \sim \pm 30^\circ$ ) の計3箇所において上方へ隆起している。

また、初期条件Bを用いると、速度  $u_1$  は図3(a)における点線で示されるように、一定の値  $u_1 = -12.77$  に漸近する。このときの流れ場は図3(d)からわかるように下降2渦流である。また、温度場は図3(e)で示されるように、等温線は  $z$ -軸上で下に陥没し、 $z$ -軸を挟んで2箇所 ( $\theta \sim \pm 15^\circ$ ) において上方へ隆起している。

ここで求めたような三日月形対流、上昇4渦流、下降2渦流はこれまでも数多く報告されている。Powe, Carley and Bishopは空気を用いた実験でアスペクト比  $A = 10$  のときにはレイリー数  $Ra = 4830$  以下で三日月形対流が観測されるが、 $Ra < 4060$  以下では三日月形の大きな渦が円筒間隙の上方部分まで十分に埋め尽くさないことを報告している[4]。最近では、Yooが数値シミュレーションを行い、アスペクト比  $A = 10$  の場合、レイリー数が臨界点  $Ra = 1900$  より小さいときは初期条件によらず対流は三日月形対流となるが、レイリー数が臨界点より大きくなると三日月形対流と下降2渦流の2重解が得られることを示した[8]。さらに、レイリー数が大きくなり、 $Ra = 3000$  を越えると三日月形対流は上昇4渦流に変化するとしている。

ここで行った数値シミュレーションの結果はこれまでのKuehn and Goldstein [1], Rao et al.[7], Yoo[8]などの結果と矛盾しない結果ではあるが、レイリー数が変化したときの対流のパターンの変化について十分に理解できるだけの情報が得られたわけではない。た

たとえば、三日月形対流が不安定となって下降2渦流になるというのどのような不安定性であり、上昇4渦流と下降2渦流とはどのような関係があるのだろうか。この疑問を解決するために次節では安定解と不安定解を含めて非線形平衡解をすべて求め、その解の分岐の構造を調べ、さらにその平衡解の安定性を調べることにする。

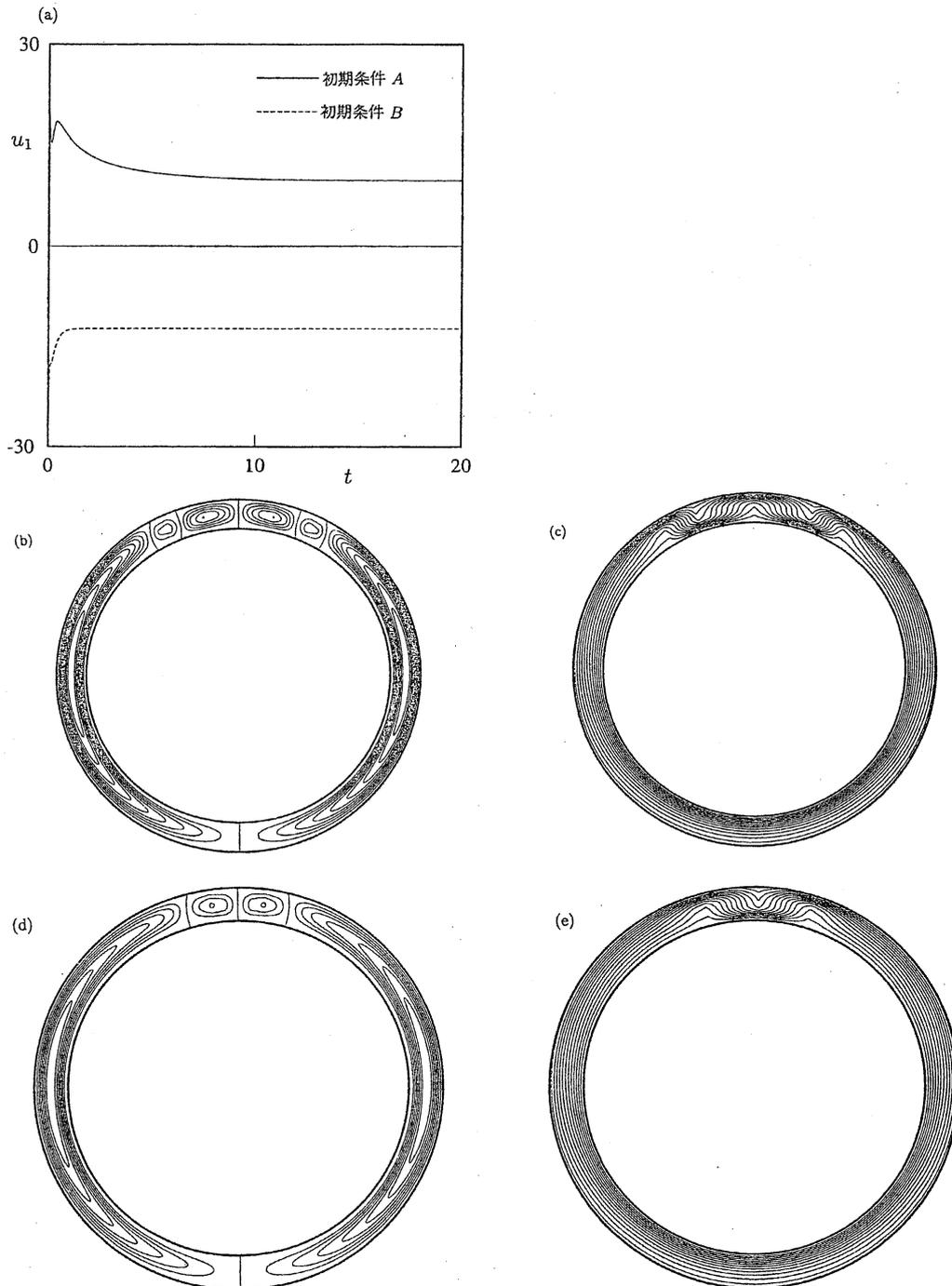


図 3: Results of numerical simulation .  $Ra = 5000$  (a):Time evolution of  $u_1$ , (b):Flow field (initial condition A), (c):Temperature field (initial condition A), (d):Flow field (initial condition B), (e):Temperature field (initial condition B).

## 4 非線形平衡解と安定性

同心二重円筒内熱対流は、レイリー数がどんなに小さくても対流が生じる。ここでは、発生する対流の非線形平衡解を数値的に求める。方程式 (2), (3) において  $\partial/\partial t = 0$  とおくと、平衡解  $(\bar{\psi}, \bar{\phi})$  が満たす方程式は次のようになる。

$$-\frac{1}{r}J(\bar{\psi}, \Delta\bar{\psi}) = Pr\Delta^2\bar{\psi} + \frac{1}{r}PrRa\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\theta}\cos\theta + PrRa\left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial r} + \frac{a}{r}\right)\sin\theta, \quad (14)$$

$$-\frac{1}{r}J(\bar{\psi}, \bar{\phi}) + \frac{a}{r^2}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\theta} = \Delta\bar{\phi}. \quad (15)$$

方程式 (14), (15) を (6) 式の境界条件のもとで解くことにより平衡解  $(\bar{\psi}, \bar{\phi})$  が求められる。ただし、平衡解を求める際には、二重円筒の鉛直面に関して次式で表される対称性を仮定する。

$$\psi(r, \theta) = -\psi(r, -\theta), \quad \psi(r, \pi + \theta) = -\psi(r, \pi - \theta), \quad (16)$$

$$\phi(r, \theta) = \phi(r, -\theta), \quad \phi(r, \pi + \theta) = \phi(\pi - \theta) \quad (17)$$

さらに、得られた平衡解  $(\bar{\psi}, \bar{\phi})$  の線形安定性を調べるため、流れ関数および温度を平衡解と攪乱の和として次式のようにおく。

$$\psi(r, \theta, t) = \bar{\psi}(r, \theta) + \psi'(r, \theta, t), \quad \phi(r, \theta, t) = \bar{\phi}(r, \theta) + \phi'(r, \theta, t). \quad (18)$$

ここで、 $\psi'(r, \theta, t)$  および  $\phi'(r, \theta, t)$  の時間依存性を  $\psi'(r, \theta, t) = \hat{\psi}(r, \theta) e^{\lambda_0 t}$  および  $\phi'(r, \theta, t) = \hat{\phi}(r, \theta) e^{\lambda_0 t}$  と仮定する。 $\lambda_0$  は線形増幅率を表す。(18) 式を (2), (3) 式に代入し、平衡解が満たすべき (14) および (15) 式を考慮し、攪乱  $(\hat{\psi}, \hat{\phi})$  について線形化を行うと、攪乱を支配する方程式は

$$\lambda_0\Delta\hat{\psi} = \frac{1}{r}\{J(\bar{\psi}, \hat{\phi}) + J(\hat{\psi}, \bar{\phi})\} + Pr\Delta^2\hat{\psi} + \frac{1}{r}PrRa\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\theta}\cos\theta + PrRa\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial r}\sin\theta, \quad (19)$$

$$\lambda_0\hat{\phi} = \frac{1}{r}\{J(\bar{\psi}, \hat{\phi}) + J(\hat{\psi}, \bar{\phi})\} - \frac{a}{r^2}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta} + \Delta\hat{\phi} \quad (20)$$

となる。

平衡解の安定性は、この  $\lambda_0$  の符号によって決定される。すなわち、 $\lambda_0$  の実部を  $\text{Re}(\lambda_0)$ 、虚部を  $\text{Im}(\lambda_0)$  とすると、 $\text{Re}(\lambda_0) > 0$  なら、攪乱は時間とともに成長するので平衡解は不安定あり、 $\text{Re}(\lambda_0) < 0$  なら、攪乱は時間とともに減衰するので平衡解は安定である。また、 $\text{Re}(\lambda_0) = \text{Im}(\lambda_0) = 0$  のとき、平衡解はピッチフォーク分岐、サドル・ノード分岐あるいはトランス・クリティカル分岐を生じ、 $\text{Re}(\lambda_0) = 0$  のとき  $\text{Im}(\lambda_0) \neq 0$  ならば、振動数  $f = \text{Im}(\lambda_0)/(2\pi)$  をもったホップ分岐を生じる。

平衡解および安定性の計算において、ここでも、流れ関数  $\psi$  および温度  $\phi$  とそれぞれの攪乱  $\hat{\psi}, \hat{\phi}$  を関数展開する。周方向には、フーリエ級数展開を行い、半径方向には式

(7)を用いて、変数変換を行い、 $-1 \leq \eta \leq 1$ の範囲で発展方程式の数値シミュレーションの場合と同様に、境界条件を満たすように変形された  $m$  次の変形チェビシェフ多項式を用いて展開する。このとき、 $\psi$  および  $\phi$  を次のように流れ場の速度の対称性により2つのモード、すなわち対称モードと反対称モードに分類する。

対称モード

$$\begin{aligned}\psi(\eta, \theta) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{mn} \tilde{T}_m(\eta) \sin\{(n+1)\theta\}, \\ \phi(\eta, \theta) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N b_{mn} \tilde{T}_m(\eta) \cos(n\theta),\end{aligned}\quad (21)$$

反対称モード

$$\begin{aligned}\psi(\eta, \theta) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{mn} \tilde{T}_m(\eta) \cos(n\theta), \\ \phi(\eta, \theta) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N b_{mn} \tilde{T}_m(\eta) \sin\{(n+1)\theta\}.\end{aligned}\quad (22)$$

ここで、対称モードは速度場が鉛直面に対し対称なモードであり、反対称モードは速度場が鉛直面に対して反対称なモードである。平衡解を求める場合には、二重円筒の中心を通る鉛直面に関する対称性、すなわち式(16), (17)から、対称モードを用いる。得られた平衡解の安定性は、対称モードおよび反対称モード、それぞれの場合について調べる。

平衡解を求めるためには、式(21)と式(22)で表される展開を行い、コロケーション法を用いて展開係数に対する代数方程式を導き、この代数方程式をニュートン・ラフソン法により数値的に解く。平衡解の線形安定性はコロケーション法により次式で示されるような線形増幅率  $\lambda_0$  を固有値とする行列の固有値問題に帰着させて計算を行う。この行列の固有値の中で  $\text{Re}(\lambda_0)$  が最大となる  $\lambda_0$  が平衡解の安定性を決定し、それに属する固有関数が流れ場および温度場の平衡解に対する攪乱を与える。

$$\mathbf{Aa} = \lambda_0 \mathbf{Ba}, \quad (23)$$

ここで、展開係数  $\mathbf{a} = (a_{00}, a_{01}, \dots, a_{M,N}, b_{00}, b_{01}, \dots, b_{M,N})^T$  は定数で、 $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  は  $2 \times \{(M+1) \times (N+1)\} \times 2 \times \{(M+1) \times (N+1)\}$  の行列を表す。また、半径方向および周方向のコロケーションポイントは  $\theta_i = (2i+1)\pi/(2(M+1))$ , ( $i = 0, 1, \dots, M$ ),  $\eta_j = \cos(j+1)\pi/(N+2)$ , ( $j = 0, 1, \dots, N$ ) と採る。固有値問題の解法にはQR法を用いる。

数値シミュレーションにより  $Ra < 5000$  の範囲では十分な時間の後流れは定常流へ漸近し、定常流の対流パターンはレイリー数と初期条件に依存して、上昇0渦流れ、下降2渦流れ、上昇4渦流れのいずれかになることがわかった。この節では、これらの3つの異なるパターンに対応する解として、式(14)および(15)で表される方程式系の解としてどのような平衡解が存在し、その平衡解はどのような解の分岐構造をもつのかを調べ、さらにその平衡解の線形安定性を調べる。平衡解はアスペクト比  $1 \leq A \leq 20$  , レイリー数

$Ra \leq 5000$  の範囲内で求め、その安定性を調べた。数値計算においては、式(21), (22) の展開の打ち切り項数を  $M = 64, N = 14$  とした。

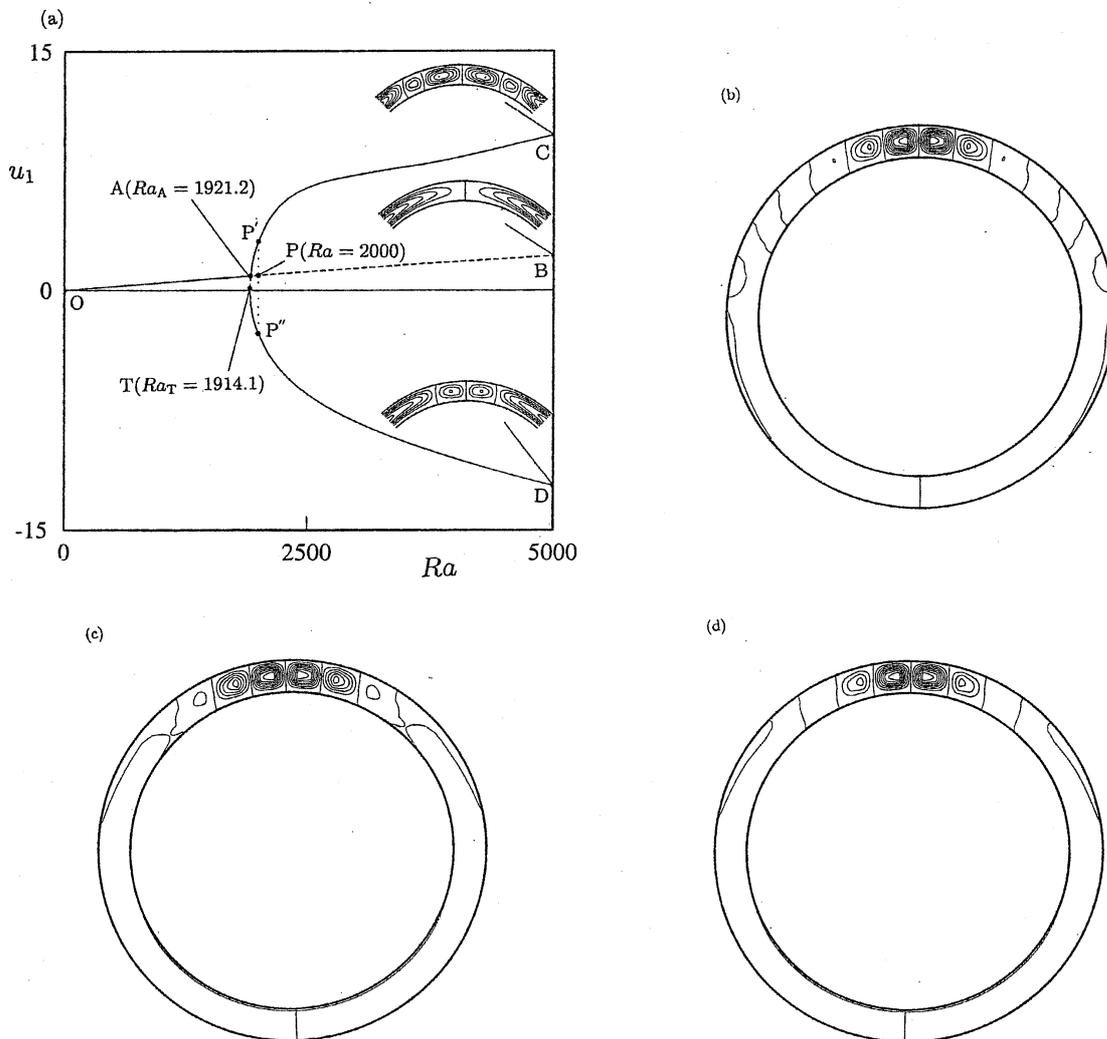


図 4: Nonlinear equilibrium solution. (a): Bifurcation diagram.  $A = 10$ , (Solid lines: stable solution, Dashed lines: unstable solution.) (b): Flow field of disturbance on P, (c): Flow field of disturbance on AC.  $Ra = 2000$ , (d): Flow field of disturbance on AD.  $Ra = 2000$ .

アスペクト比  $A = 10$  の場合の平衡解のレイリー数依存性を図4(a)に示す。この図において、熱対流を特徴づける物理量として式(13)で定義した円筒間隙の頂上部における間隙の中心での半径方向の速度  $u_1$  を用いる。この図からわかるように、レイリー数が非常に小さいときに存在する三日月形の熱対流はOABで表されている。この解以外にも曲線CATDで示されるもう2つの解が存在する。曲線ACで表される平衡解は上昇4渦流れに対応し、曲線ADで表される平衡解は下降2渦流れに対応している。したがって、上昇4渦流れと下降2渦流れは点Aから分岐した一対の分岐解である。図中に各分枝の代表

として,  $Ra = 5000$  における流れ場のパターンを  $-45^\circ < \theta < 45^\circ$  の範囲で描いた.

点Tと点Aに対応するレイリー数はそれぞれ  $Ra_T = 1914.1$  と  $Ra_A = 1921.2$  であり, 点Aよりも点Tの方が低いレイリー数に対応している. ここで, 点Tは転回分岐点であり, 点Aは臨界横断分岐点のように見える. しかし, 後に示すように, 点Aは分岐点ではないというのが, この論文での推測である.

図4(a)で得られた平衡解の安定性を調べた結果, 点Oから出る三日月形の対流パターンを与える解の分枝OBのうちOAは安定であるが, 点Aで安定性の交替が起こり, ABは不安定となる. 点Aから出る解ACも安定である. しかし, 点Aから出るもうひとつの分枝ATDのうちATは不安定, TDは安定であることがわかった. これらの安定性をまとめて, 図4(a)では安定な平衡解を実線で, 不安定な平衡解を点線で表した.

アスペクト比  $A = 10$  の場合の分岐構造をまとめると次のようになる. すなわち,  $Ra < Ra_T = 1914.1$  においては平衡解の数は1個であるが,  $Ra = Ra_T$  で平衡解の個数が増え,  $Ra_T < Ra < Ra_A = 1921.2$  では3個となる. そのうち1個は不安定であり, 他の2個は安定である.  $Ra = Ra_A$  では平衡解の個数は変化しないが, 解の分枝OBが安定平衡解から不安定平衡解に変わり, 解の分枝TACが不安定から安定に変わる. こうして2つの平衡解の安定性が入れ替わる.

図4(a)から, 数値シミュレーションにより得られた解の挙動が説明できる. 図2(a)で示される  $Ra = 1800$  の場合の計算結果は, 図4(a)では解の分枝OAの上であり, しかも  $Ra < Ra_T$  の範囲にあるので, このとき安定な解は1つしか存在せずどのような初期条件から出発しても到達できる平衡解はただ1つに決まる. その平衡解は三日月形の対流パターンをもつ. 図3(a)で示される  $Ra = 5000$  の場合は, 図4(a)からわかるように解が3つ存在し, そのうち1つは不安定であるが, 他の2つの解が安定である. したがって, 初期条件により上の分枝ACに到達するときには上昇4渦流れとなり, 下の分枝TDに到達するときには下降2渦流れとなる. ただし, 不安定な解ABはどのような初期条件を採っても実現不可能かという問題については, 適当な初期条件を選べばある比較的短い時間においては実現可能である. しかし, この解は不安定であるので十分時間が経過すると上の分枝ACか下の分枝TDに遷移することになる.

また, 図4(a)において, AB上の点P ( $Ra = 2000$ ) における平衡解を用いて安定性解析により流れ場の攪乱を求めた. これを図4(b)に示す. さらに, 曲線AC上の点P' における平衡解と曲線AD上の点P'' における平衡解を求め, それぞれの解から点Pにおける平衡解を引くことにより流れ場の攪乱を求めた. 図4(c), (d)にそれぞれの攪乱を示す. これら3つの図は, ほぼ一致している. したがって, 分岐AC上の三日月形対流である不安定な平衡解に線形安定性解析により求めた攪乱を加えることによって, 曲線AC上の上昇4渦流および曲線AD上の下降2渦流となる安定な平衡解を求められるということがわかった.

アスペクト比が  $A = 10$  における平衡解の分岐は図4(a)の点A付近でその構造が明確

にはならなかった. このようなときにその構造を調べる方法は, アスペクト比  $A$  を変えて計算をし, その分岐構造が  $A$  の変化と共にどのように変わるのかを調べるのが常套手段である.

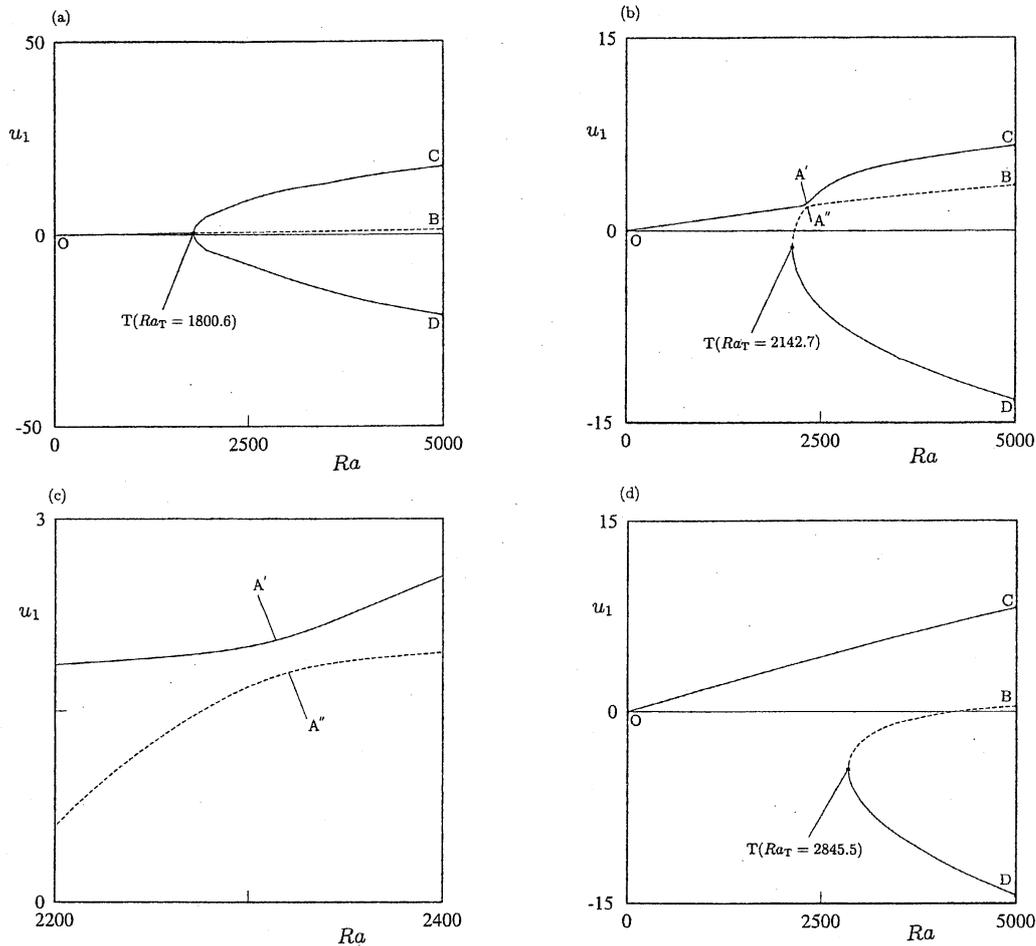


図 5: Bifurcation diagrams. (a):  $A = 20$ , (b):  $A = 5$ , (c): Enlargement of Fig. (b), (d):  $A = 2$ .

アスペクト比  $A = 20$  の場合の平衡解の分岐構造を図 5(a) に示す. この図では解は点 A と点 T が極端に近づいており, 三日月形の対流パターンをもつ解の分枝 OB はピッチフォーク分岐を生じているようにも見える. しかし, この場合にも解の分岐の構造は  $A = 10$  の場合と同じであり, 点 T で転回点分岐が起こっている. ただし, 数値計算では  $Ra_T \sim Ra_A$  であり, ピッチフォーク分岐と転回点分岐との区別は困難であり, また, その区別は物理的にあまり重要な意味を持たない.

アスペクト比が  $A = 5$  のときの解の分岐構造を図 5(b) に示す.  $A = 10$  の場合に臨界横断分岐が生じていると思われていた点 A はこの図では明確に定義できない. この図では曲線 OC と TB がもっとも接近する点を  $A''$ ,  $A'$  で示した. 点  $A''$ ,  $A'$  の近傍を拡大した図が図 5(c) である. この図からも明らかのように,  $A = 5$  のときの分岐の構造は臨界横断分岐を持たず, 点 T での転回点分岐となめらかな遷移  $OA'C$  の 2 つから成り立っている.

では、元の  $A = 10$  の場合に戻って、このときの分岐構造は臨界横断分岐を含んでいるのであろうか。この問題に対する結論は弱非線形安定性理論を用いて解析することによって明らかになるが、ここではこの問題に深く立ち入ることはやめ、 $A = 10$  の場合も  $A = 5$  の場合と同様に臨界点横断分岐は生じないだろうと云う推測を述べるにとどめておこう。アスペクト比がさらに小さく  $A = 2$  のときの分岐構造を図5(d) に示す。 $A = 2$  の場合には、 $A = 5$  の場合に定義したような  $A', A''$  などは明確に定義できず、点Tにおける転回点分岐しか確認できなかった。

いろいろなアスペクト比  $A$  について転回点のレイリー数  $Ra_T$  を計算した。その結果を表1に示し、図6に図示する。

表 1: Critical Rayleigh numbers  $Ra_T$  for various aspect ratios  $A$ .

$A$	$Ra_T$
1	4471.6
2	2845.5
3	2434.5
4	2250.9
5	2142.7
10	1914.1
20	1800.6

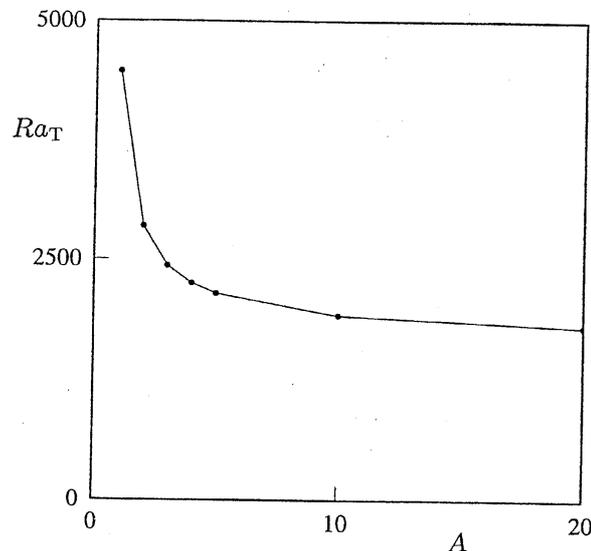


図 6: Critical Rayleigh numbers  $Ra_T$  for various aspect ratios  $A$ .

また、 $Ra_T$  と  $A$  との関係を表す実験式として、最小2乗法により次の関係式を得た。

$$Ra_T = \frac{1699.5}{1 - 1.12/A}. \quad (24)$$

この式で,  $A \rightarrow \infty$  のとき  $Ra_T \rightarrow 1699.5$  となる. このときの  $Ra_T$  の値は無限平行平板間におけるベナール対流において,  $A \rightarrow \infty$  とした場合の臨界値  $Ra_c = 1707.8$  とよく一致する. すなわち, アスペクト比が非常に大きい極限では水平二重円筒間の熱対流の平衡解の分岐構造はベナール対流と同様に ピッチフォーク分岐となると考えられる.

## 参考文献

- [1] T. H. Kuehn and R. J. Goldstein: J. Fluid Mech. **74** (1976) 695-719.
- [2] Y. T. Tsui and B. Tremblay: Int. J. Heat Mass Transfer **27** (1984) 103-111.
- [3] 加藤, 棚橋と太田: 機械論文 **58** (1992) 686-691.
- [4] R. E. Powe, C. T. Carley and E. H. Bishop: ASME Journal of Heat Transfer **91** (1969) 310-314.
- [5] E. H. Bishop, C. T. Carley and R. E. Powe: Int. J. Heat Mass Transfer **11** (1968) 1741-1752.
- [6] J. Y. Choi and M. U. Kim: Int. J. Heat Mass Transfer **36** (1993) 4173-4180.
- [7] Y.-F. Rao, Y. Miki, K. Fukuda, Y. Tanaka and S. Hasegawa: Int. J. Heat Mass Transfer **28** (1985) 705-714.
- [8] J. S. Yoo: Int. J. Heat and Fluid Flow **17** (1996) 587-593.