

# TS 波型遷移過程と渦生成

東京大学大学院理学系研究科 高橋 直也(Naoya Takahashi )  
東京大学大学院理学系研究科 神部 勉 (Tsutomu Kambe )  
航空宇宙技術研究所 山本 稀義(Kiyoshi Yamamoto)

## 1 はじめに

乱流遷移の予測を難しくしている原因の一つは、そのメカニズムが非常に複雑な点にある。我々の目的はこの機構を解明し、正確な乱流遷移予測を可能とすることにある。しかしながら遷移機構は境界条件・初期条件にも依存するので、そのすべてを取り込んだシミュレーションを行なうのは不可能に近い。そこで我々は遷移機構の研究の第一段階として、チャンネル流及び平行流近似をした平板境界層の遷移の直接数値シミュレーション (DNS) を行なうことにした。

今回注目する現象は、風洞実験で振動リボンにより乱流を励起させるものである。リボンによって有限振幅をもつ線形波が導入される場合、亜臨界領域においても非線型不安定機構によって乱流へと遷移することが知られている。本研究ではまた超臨界遷移のシミュレーションも行なう。そして、これらの非線型過程において現れる  $\Lambda$  状の渦が崩壊していく様子を可視化する。

第2節では、数値計算法について説明し、3節では計算結果について述べる。最後の4節では結論を述べる。

## 2 計算方法

### 2.1 基礎方程式

壁面に沿って流れる剪断流を調べる目的で、二種類の境界条件下で直接数値計算 (DNS) を行なう。一つはチャンネル流であり、もう一つは平行流近似を行った境界層である。

DNSは、非圧縮条件のもとでの Navier-Stokes 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2)$$

を数値的に解いている。これらの方程式は次のように離散化する。

まず空間について、壁に垂直 ( $z$ ) 方向の計算には Chebyshev 選点法を用い、一方流れ方向 ( $x$ ) およびスパン方向 ( $y$ ) の取扱いを単純にするために周期的境界条件を適用する。このとき  $x, y$  方向について速度場は

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k_x, k_y} \mathbf{u}(z, k_x, k_y, t) \exp(ik_x x + ik_y y) \quad (3)$$

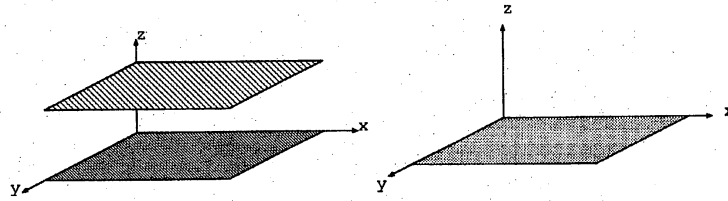


図 1: 計算領域の概念図。左:チャンネル流、右:境界層。

のように波数  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  についてフーリエ級数展開することが可能になる。このことから  $x, y$  方向についてはスペクトル法 [1] を適用する (図 1)。Chebyshev 選点法は壁際での格子点が細かく、また計算精度も高いという利点がある。このため今回の計算における壁からの流れ場への影響を十分に表現できるものと考えられる。

チャンネル流の場合は、Chebyshev-Gauss-Lobatto 点を用いることにより、 $z \in [-1, 1]$  の領域を離散化する。一方、境界層の場合では  $z \in [0, \infty)$  の領域を取り扱うが、Chebyshev-Gauss-Radau 点で  $\xi \in [1, -1)$  の領域で選点法を適用し、代数型の関数で  $z$  へと射影している。

時間微分の離散化は、粘性項及び圧力項には 2 次の Crank-Nicolson 法を、非線形項には 2 次の Adams-Bashforth 法をそれぞれ適用する。

また境界条件の取扱いについては、Kleiser-Schumann の Influence Matrix 法 [2] を用いる。計算はすべて科学技術庁航空宇宙技術研究所の数値風洞を用いて行なわれた。

## 2.2 初期条件

DNS を実行する際の流れの初期条件は

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0) = (U, 0, 0) + A_{2D} \mathbf{u}_{TS}(x, z) + A_{3D} \mathbf{u}_{3D}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

という形で与えた。

ここで  $U = 1 - z^2$ 、 $A_{2D}$  は 2 次元攪乱の大きさを制御するパラメタである。また  $\mathbf{u}_{TS}(x, z)$  は Orr-Sommerfeld 方程式での固有関数のひとつである。この固有値問題で計算されるモードは複数あるが、そのなかで最も不安定なものを用いている。この項は風洞実験における振動リボンに対応する。一方、 $A_{3D}$  は 3 次元攪乱の強さを表すものであり、 $\mathbf{u}_{3D}$  は 3 次元ノイズである。ここでは非圧縮条件および境界条件を満たすように与えられる。

## 2.3 エネルギースペクトル

エネルギースペクトルは流れ方向およびスパン方向にフーリエ変換した速度場  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$  を用いて

$$E(k_x, k_y, t) = \frac{1}{L_z} \int |\tilde{\mathbf{u}}(k_x, k_y, z, t)|^2 dz \quad (5)$$

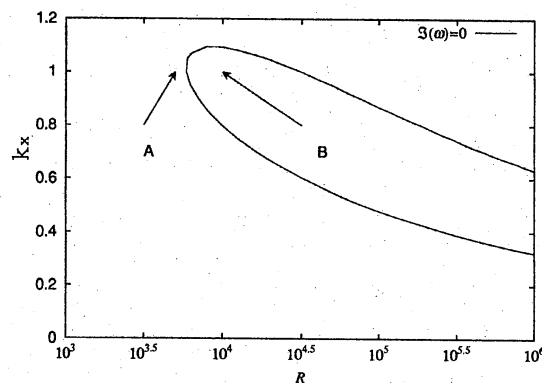


図 2: チャンネル流の中立安定曲線。縦軸は流れ方向の波数  $k_x$ , 横軸はレイノルズ数  $R$ . 曲線の内側が  $S\omega > 0$ , 外側が  $S\omega < 0$ . 図中の矢印 A:  $R=5000$ (亜臨界)、矢印 B:  $R=10000$ (超臨界)。

と定義する。式にある通り、 $E(k_x, k_y)$  は単位質量辺りのエネルギー (の 2 倍) のフーリエ成分である。

### 3 計算結果

#### 3.1 チャンネル流

まずはじめに、使用したパラメタを線形安定性理論による位置づけを見る。次にそれぞれの場合について、スペクトルの時間変化および渦度の等値面を可視化して渦の崩壊過程を見る。

##### 3.1.1 線形安定性理論とパラメタ

チャンネル流の中立曲線を図 2 に示す。 $\omega$  は複素振動数で、その虚数が攪乱の増幅率を示す。曲線の内側が攪乱の不安定 (増幅)、外側が安定 (減衰) 領域を示す。

今回は超臨界・亜臨界の場合の遷移過程における渦構造の違いを調べるため、レイノルズ数以外の条件を等しくして乱流場の振る舞いを調べた。解像度は  $128 \times 128 \times 129$  (流れ  $\times$  スパン  $\times$  壁に垂直)、計算領域は  $[4\pi \times 4\pi \times 2]$  とした。

##### 3.1.2 超臨界レイノルズ数の遷移

超臨界レイノルズ数  $R = 10000$  をもつ乱流場を直接計算したときのエネルギースペクトル  $E(k_x, k_y)$  の時間変化を図 3 に示す。初期に与えた有限振幅を持つ TS 波 ( $E(1, 0, t=0) = 1.0 \times 10^{-4}$ ) は、不安定領域にあるので  $t \sim 150$  までほぼ直線的に増幅していく。この間 TS 波の高調波に相当するモードの  $(2, 0), (3, 0)$  などが励起されていく。

その後3次元モードが急激に非線型増幅をはじめが、この領域では $\Lambda$ 状の渦が発生してくる(図3)。これは $t = 130$ 前後から兆候があらわれはじめ、 $t = 140$ にははっきりとその姿をとらえられる。

その後 $\Lambda$ 渦はスパン方向に連結し( $t = 140$ )、乱流へと遷移していく様子が確認された。

### 3.1.3 亜臨界レイノルズ数の遷移

亜臨界レイノルズ数( $R = 5000$ )の流れの遷移過程におけるエネルギースペクトル $E(k_x, k_y)$ の時間変化を示す(図4上)。初期に与えたTS波( $E(1, 0, t = 0) = 1.44 \times 10^{-4}$ )はこの場合弱い減衰を示す( $t < 250$ )。しかし有限振幅を持つように注入したので、減衰し切る前に3次元攪乱が励起していく( $t \simeq 50 \sim$ )。このように一度励起された3次元攪乱は次々と増幅されていき、最後に乱流へと遷移する( $t \simeq 350$ )。

図4下部は、このときの様子を渦度の等値面でとらえたものである。TS波がPeak-Valley構造を持ちはじめ( $t = 280$ )、 $\Lambda$ 状の渦構造が形成される( $t = 300$ )。これらは増幅と共に流れ方向に連結し( $t = 320$ )、その連結の度合いは大域的なものとなり( $t = 240$ )、乱流へと遷移する。

## 3.2 境界層

図5は境界層流における中立曲線であり、このうち矢印C,D,Eが今回DNSを行なったパラメタに対応する。これらは排除厚さ $\delta^*$ を長さの基準とした場合、レイノルズ数 $R_*$ はそれぞれ500,600,2561となる。このうち超臨界に対応する $R_* = 600$ (D)を、解像度 $64 \times 64 \times 65$ で行なったDNSの結果より、各モードの時間発展を描いたものを図6に示す。基本的な振舞いは、channel流の結果(図3)と酷似している;最初注入されたTS波(1,0)は、線形増幅をしていく過程で高調波(2,0),(3,0),...を次々と励起していく。その後TS波成分があるレベルに達したところで3次元攪乱の非線形増幅がはじまり、流れは急激に乱流へと遷移していく。

また線形増幅領域( $t < 5000$ )での増幅率を最小自乗法で求めたものは、線形安定性理論によるものと1%未満の精度で一致していた。この結果は亜臨界(D, $R_d = 500$ )及び $\mathcal{S}\omega$ がより大きなもの( $R_D = 2581$ )でも同様であった。

## 4 むすび

チャネル流および境界層の直接数値シミュレーションを行い、亜臨界および超臨界レイノルズ数をもつ乱流場の遷移過程を解析した。

渦度を可視化することにより乱流遷移段階での渦の崩壊過程をとらえることができた。どちらのレイノルズ数の場合でも、TS波から $\Lambda$ 状の渦が生成されるが、その後の渦構造の崩壊の過程が異なることが分かった。

亜臨界レイノルズ数を持つ乱流場の場合、 $\Lambda$ 状の渦は流れ方向に大域的に連結しながら

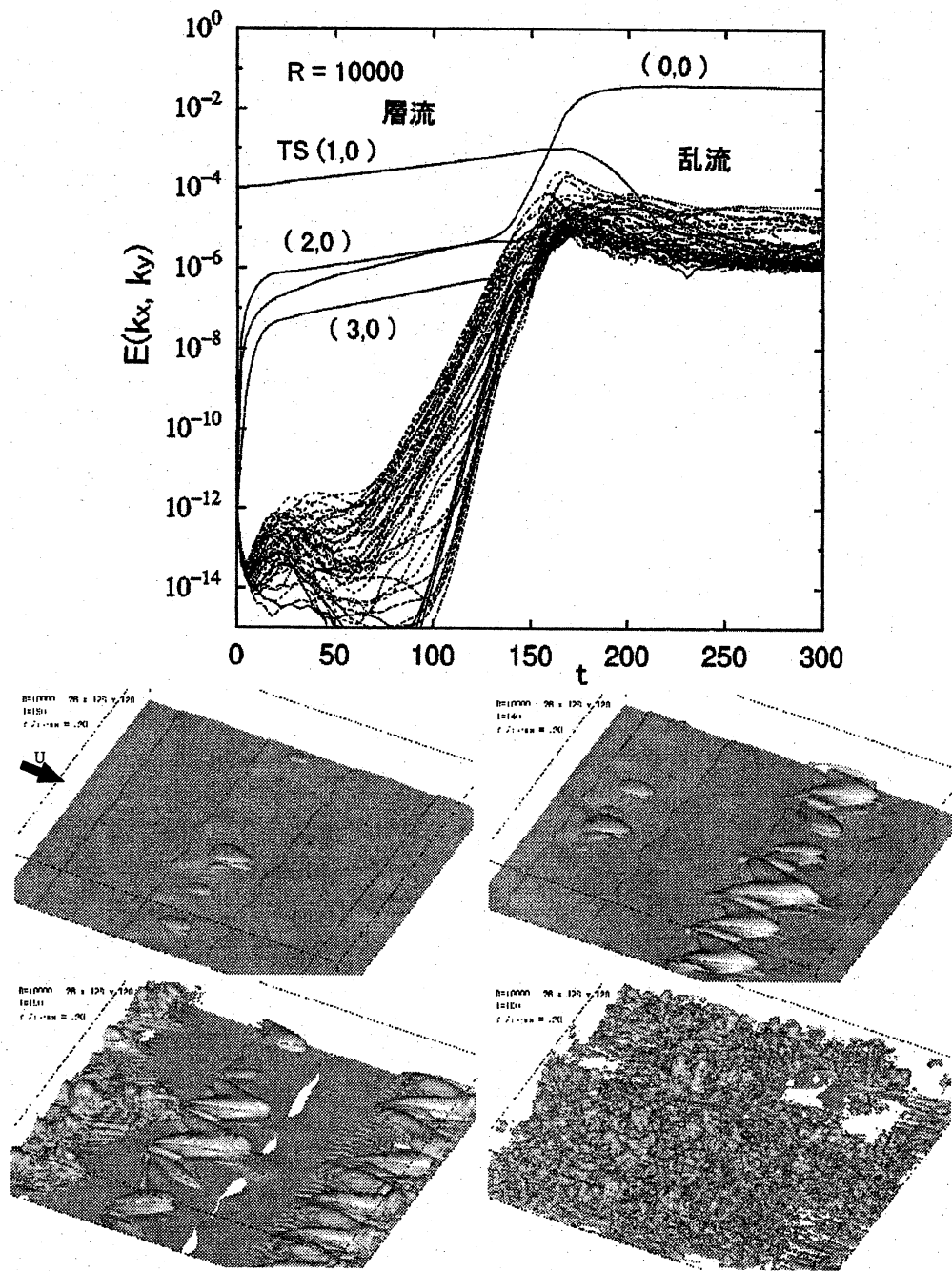


図 3: 上: $R=10000$  のときのエネルギースペクトル。下: $\Delta$  状の渦とその時間発展。左上から  $t=130, 140, 150, 160$ 。この渦は、スパン方向に連結し、乱流へと遷移した。

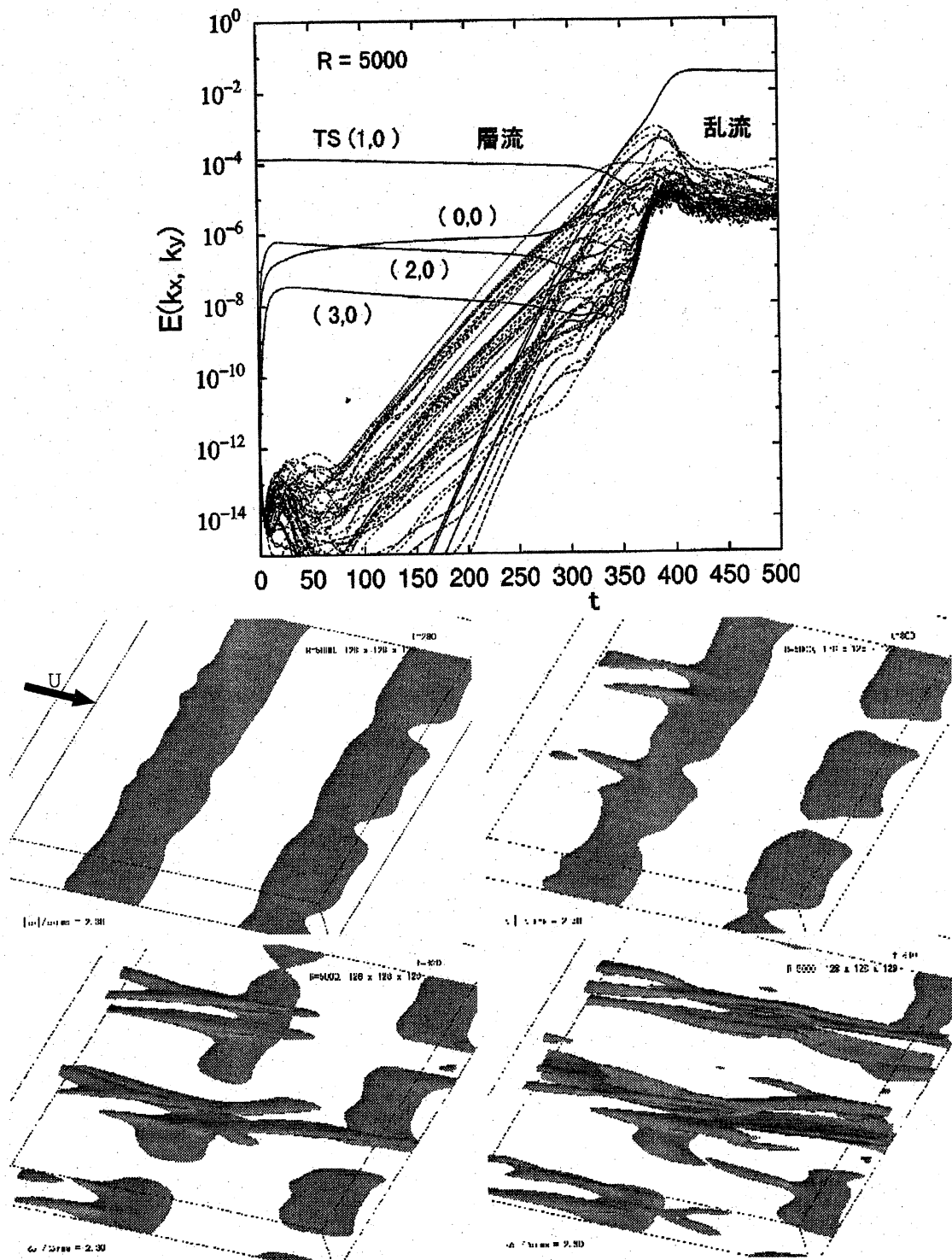


図 4: 上: $R=5000$  のときのエネルギースペクトル。下: $\Lambda$  状の渦とその時間発展。左から  $t=280, 300, 320, 340$ 。この渦は、流れに沿って連結し、乱流へと遷移した。

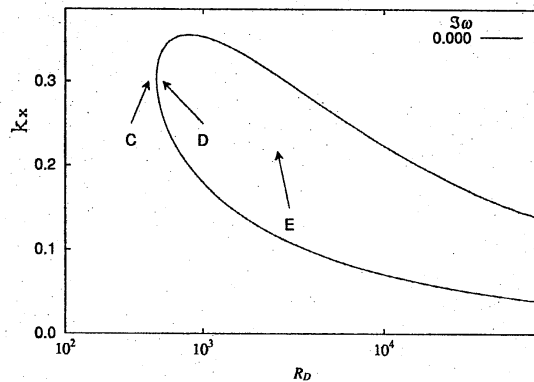


図 5: 境界層流の中立安定曲線。曲線の内側が $\omega$ の虚部が正。矢印 C:  $R=500$ ,  $\Im\omega = -1.627 \times 10^{-4}$ , 矢印 D:  $R=600$ ,  $\Im\omega = 5.426 \times 10^{-4}$ , 矢印 E:  $R=2581$ ,  $\Im\omega = 2.511 \times 10^{-3}$ 。

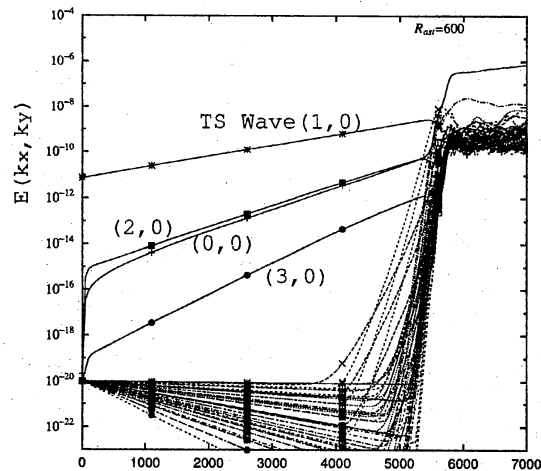


図 6:  $R_D = 600$  のときの各モードのエネルギー発展。

構造(ストリーク)を崩壊させ、乱流へと遷移する。一方超臨界レイノルズ数を持つ乱流場の場合はスパン方向に局部的に連結しながら構造を崩壊させ、非線型相互作用を深めて乱流へと遷移する。

境界層についても直接数値計算を行なった。各モード毎のエネルギーの線型増幅及び非線型増幅の傾向はチャンネル流の場合とほぼ一致している。また、その線形増幅領域における TS 波の増幅率は、線形安定性理論によって求めたものと非常に良く一致した。

## 参考文献

- [1] Claudio Canuto, M. Yousuff Hussaini, Alfio Quarteroni, and Thomas A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

- [2] Leonhard Kleiser and U. Schumann. Treatment of incompressibility and boundary conditions in 3-d numerical spectral simulations of plane channel flows. In Ernst Heinrich Hirschel, editor, *Proceeding[s] of the Third GAMM-Conference on numerical methods in fluid mechanics*, Vol. 2 of *Notes on numerical fluid mechanics*, pp. 165–173, Braunschweig, 1980. DFVLR, F. Vieweg.