数理解析研究所講究録
1122巻 2000年 134-139

On Characteristic Classes of Fibers/Images of Mappings

大本　亨　鹿児島大学理学部
Toru Ohmoto, Department of Math. and Computer Sci. , Kagoshima University

§0 はじめに

この講演では，複素解析的写像の特異ファイバー（または像集合）のホモロジー特性類について話します．特に，写像として，コンパクト複素解析特異多様体 X の変形 $f:\mathcal{X}\to S$, $X=f^{-1}(p),(p\in S)$ を考えることにします．ここで，f は固有（proper），S は非特異複素曲線（$\mathbf{C}$ の原点周りの disc でよい）であるとします．(写像の像集合を考える場合は，解析的写像 $h:N\to P$（N および P は非特異かつコンパクトで，$\dim N<\dim P$）の像集合を $X(:=h(N))$ とおき，さらに f を安定変形族 $F:N\times S\to P\times S$（$F(x,p)=(h(x),p),x\in N$，さらに各 $F_q(q\neq p\in S)$ は通常特異点（安定特異点）のみ有するもの）が与えられているものとします．$\mathcal{X}:=\mathrm{Image}(F)$ とおき，$f:\mathcal{X}\to S$ を第2成分への射影とすることで，始めの状況に移すことができます.)

一般に，良く知られた Euler 標数 χ は，しかるべき集合族に対して，有限加法性

$$\chi(A\cup B)=\chi(A)+\chi(B)-\chi(A\cap B)$$

が成立することから， Euler 標数を（整数値をとる）測度とみなした積分論が展開できます（[16], [9], [7]）．本稿の話題は，X の各点に対して定義される適当な不変量を X 上の“可測関数”（後ほど構成的関数と呼ぶ）と見なして積分することです（もっとも単純な例として，X 上の定数関数 $\mathbf{1}_X$ の積分は X の Euler 標数に他ならない）．この Euler 標数測度による積分の一般化として，X の整係数ホモロジー群 $H_*(X;\mathbf{Z})$ $(=\oplus H_i(X;\mathbf{Z})$ ）に値をとるチャーン・マクファーソン変換があり（ドリーニュ，グロタンディエクが予想した特異多様体に対するリーマン・ロッホ型定理の一つ），この machinary を通して，局所不変量からホモロジーの元を得る筋立てです．X の各点における f の“ミルナー数”は X 上の“可測関数”となり，それにチャーン・マクファーソン変換を施して得るホモロジー類を，X の変形 f の ミルナー特性類と呼び，$\mathcal{M}(f,X)$ で表します．これに関するいくつかの性質について後述します（與倉氏（鹿児島大理）との共著 [10] の一部）．

注として,（f に対してではなく）より一般に局所完全交互特異多様体 X に対してミルナー特性類 $\mathcal{M}(X)$ が定義されます（諏訪立雄氏，與倉昭治氏，A. Parusinski， P. Pragacz, J. P. Brasselet， J. Seade， P. Aluffi の仕事；[1], [12], [17] etc）．

§1 ミルナーファイブレーション

孤立特異点の芽 $f:\mathbf{C}^m,0\to\mathbf{C},0$ に関する良く知られている J. Milnor のファイブレーション定理は，Lé によって次の形に一般化されている．

定理 1.1： (Lê [6] , Theorem (1.1))
$(\mathcal{X}, x_0)$ を $\mathbf{C}^m$ に埋め込まれた analytic variety の芽，$f : \mathcal{X}, x_0 \to \mathbf{C}, 0$ を $\mathcal{X}$ 上の analytic function の芽とする．f の代表も同様に $f : \mathcal{X} \cap U \to \mathbf{C}$ で表すことにする（U は $x_0 \in \mathbf{C}^m$ の開近傍）．このとき，ある $\epsilon > 0$ と $\eta > 0$ が存在して，f が誘導する次の写像が位相的ファイブレーションになる：

$$f^{-1}(D_\eta - \{0\}) \cap \mathcal{X} \cap B_\epsilon \to \mathrm{Int}\, D_\eta - \{0\}.$$

ただし，ここで B_ϵ は x_0 を中心とする半径 ϵ の closed ball，D_η は $\mathbf{C}$ の原点中心の半径 η の開円板とする．

$\mathcal{X}$ や f は孤立特異点でなくとも構わないことに注意する．証明は，$f^{-1}(0)$ を細分するような Thom の a_f-condition を満たす f の Whitney stratification（いわゆる good stratification）が存在すること（ target が 1 次元ならば常に存在することが広中 [5] により知られている），及び Thom-Mather の first isotopy lemma による．

§2 構成的関数とマクファーソン自然変換

X を compact complex analytic variety とする．以降，variety X はある complex manifold に埋め込まれたもののみ扱う．X の subvarieties から $\cup$，$\cap$，補集合を取る操作を有限回施して得られる X の部分集合を，X の構成的部分集合（constructible subset）と呼ぶ．X 上の整数値関数 $\alpha : X \to \mathbf{Z}$ が構成的関数（constructible function ）であるとは，X の有限個の構成的部分集合への分割 $\{V_i\}_{1 \le i \le s}$ が存在して，各 V_i 上で α が一定の値をとるときにいう（ α のとる値は有限で，各 $\alpha^{-1}(n)$, $n \in \mathbf{Z}$, が構成的部分集合になるもの，と言ってよい）．X の構成的部分集合 W の特性関数（ W 上で値 1 をとり，W の補集合上で値 0 をとる関数）を $\mathbf{1}_W$ で表すことにすると，任意の構成的関数 α は，$\alpha = \sum_{i=1}^{s} m_i \mathbf{1}_{V_i}$ （V_i は構成的，$m_i \in \mathbf{Z}$ ）で表される．X 上の構成的関数全体を $\mathcal{F}(X)$ で表す．これは $\mathbf{1}_W$ （ W は analytic subvariety）で生成されるアーベル群である．また，analytic map $f : X \to Y$ に対して，構成的関数全体がなすアーベル群の間の準同型写像 $f_* : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ を次で定める：

$$f_*(\mathbf{1}_W)(y) := \chi(f^{-1}(y) \cap W), \quad y \in Y.$$

ここで右辺の χ はコンパクトな台を持つコホモロジー群の Euler 標数とする (stratification $X = \coprod V_i$ に対して，$\chi(X) = \sum \chi(V_i)$ となる性質が大事)．$\mathcal{F}$ は compact analytic variety の圏からアーベル群の圏への covariant functor になることに注意する．

W を X の closed subvariety，$\alpha \in \mathcal{F}(X)$ とし，$\alpha = \sum_{i=1}^{s} m_i \mathbf{1}_{V_i}$ （V_i は構成的，$m_i \in \mathbf{Z}$ ）と表されているものとする．構成的関数 α の W 上での積分（または α の W 上での Euler 標数）を次で定義する：

$$\int_W \alpha \quad (= \int_W \alpha \, d\chi) := \sum_{i=1}^{s} m_i \chi(V_i \cap W).$$

補題 2.1 (**Fubini 型公式**):
analytic map $f : X \to Y$ と X の構成的関数 α に対して，次が成り立つ：

$$\int_X \alpha = \int_Y f_*\alpha.$$

各点 $y \in Y$ に対して $f_*\alpha(y) = \int_{f^{-1}(y)} \alpha$ であるから，右辺は $\int_Y \int_{f^{-1}(y)} \alpha$ のように２重積分のような形で表される．この補題は積分をとる操作 $\int : \mathcal{F} \to \mathbf{Z}$ の自然性（射 f_* との可換性）を示していると言える．この意味で$\int$ を一般化したものとして，構成的関数のアーベル群からホモロジー群へのマクファーソン自然変換がある．

定理 2.2： (R. MacPherson [7])
compact complex analytic variety の圏からアーベル群の圏への２つの covariant functor $\mathcal{F}$ および $H_*(\,:\mathbf{Z})$ の間の自然変換 (*) $C_* : \mathcal{F} \to H_*(\,:\mathbf{Z})$ で，非特異多様体 X に対して $C_*(\mathbf{1}_X) = c(X) \cap [X]$ を満たすものが唯一存在する．ここで $c(X)$ は TX の total Chern class を意味する．

(*) $C_* : \mathcal{F}(X) \to H_*(X : \mathbf{Z})$ が準同型であって，射に対する可換性を満たすこと．

$\int_X \alpha$ は $C_*(\alpha)$ の０次の部分の和となっている．実際，X から一点への写像 $\pi : X \to \{pt\}$ を取ると，

$$\pi_* C_*(\alpha) = C_*(\pi_*\alpha) = \pi_*\alpha = \int_X \alpha.$$

定義 2.3 $C_*(X) := C_*(\mathbf{1}_X)$ と置き，これを X の Chern-Schwartz-MacPherson class と呼ぶ．

注意 2.4 non-compact variety を扱う場合でも，射として proper map を考え，Borel-More homology (closed supported homology) を用いればよい (cf. [4]).

§3 特殊化 (specialization) と Chern 特性類

$\mathcal{X}$ を complex analytic variety，S を non-singular complex curve，$0 \in S$，$f : \mathcal{X} \to S$ を analytic map とする．$s \in S$ に対して，$X_s := f^{-1}(s)$ と置く．

構成的関数の特殊化：
準同型写像 $\sigma_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(\mathcal{X}) \to \mathcal{F}(X_0)$ を次で定義する：Y を $\mathcal{X}$ の closed subvariety とするとき，特性関数 $\mathbf{1}_Y$ に対して$\sigma_{\mathcal{F}}\mathbf{1}_Y$ の $x \in X_0$ での値を

$$\sigma_{\mathcal{F}}\mathbf{1}_Y(x) := \lim_{s \to 0} \chi(B_\epsilon(x) \cap Y_s)$$

とする．ここで，右辺の $B_\epsilon(x)$ は x を中心とする十分小さい半径 $\epsilon > 0$ の閉球，$Y_s = Y \cap X_s$ とする．写像 $f|_Y : Y \to S$ の x における芽にファイブレーション定理を適用することにより，右辺は意味を持つことが保証される．また，a_f-condition を満たすような $f|_Y$ の

Whitney stratification が存在することにより，$\sigma_{\mathcal{F}}\mathbf{1}_Y$ が X_0 上の構成的関数となるが分かる．特に$\sigma_{\mathcal{F}}\mathbf{1}_{\mathcal{X}}(x) = \chi(B_\epsilon(x) \cap X_s)$ に注意する．

ホモロジー群の特殊化：
準同型写像 $\sigma_H : H_*(X_s) \to H_*(X_0)$ を次で定義する：$0 \in S$ の十分小さい開近傍 D を取ると $f^{-1}(D)$ は X_0 にホモトピー同値にできることから，包含写像 $i_s : X_s \to f^{-1}(D)$ の誘導準同型 $i_{s*} : H_*(X_s) \to H_*(f^{-1}(D))$ と同型写像 $H_*(f^{-1}(D)) \simeq H_*(X_0)$ の合成写像を σ_H とおく．

特殊化 $\sigma_{\mathcal{F}}$ と σ_H は次の意味でマクファーソン変換 C_* と可換になることが知られている：

定理 3.1： （Verdier [15] ）$\alpha \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ とする．このとき 0 に十分近い $s \in S$ に対して$\sigma_H C_*(\alpha|_{X_s}) = C_*(\sigma_{\mathcal{F}}\alpha)$ が成り立つ．

構成的関数 $\sigma_{\mathcal{F}}\mathbf{1}_{\mathcal{X}} - \mathbf{1}_X$ の $x \in X$ での値は $\chi(B_\epsilon(x) \cap X_s) - 1$ であり，$\chi(B_\epsilon(x) \cap X) = 1$ に注意すれば，この構成的関数は（適当な符号を付ければ）芽 $f : \mathcal{X}, x \to S, 0$ の "vanishing Euler characteristics" を表している．特に，$\mathcal{X}$ が非特異で f が孤立特異点ならば，これは f の Milnor number である．"vanishing Euler characteristics" の "積分" として次を定義する：

定義 3.2 (cf. [10], [3]) $f : \mathcal{X} \to S$, $X := X_0 (= f^{-1}(0))$, に対して,

$$\mathcal{M}(f; X) := (-1)^{\dim \mathcal{X} - 1} C_*(\sigma_{\mathcal{F}}\mathbf{1}_{\mathcal{X}} - \mathbf{1}_X)$$

とおき，X の変形 f の *Milnor class* と呼ぶ．

定義からすぐに分かるように，$\mathcal{M}(f; X)$ は，X の近くにある generic fiber X_s の Chern-Schwartz-MacPherson class の特殊化と special fiber X の Chern-Schwartz-MacPherson class との差を意味する：

$$\mathcal{M}(f; X) = (-1)^{\dim \mathcal{X} - 1}(C_*(\sigma_{\mathcal{F}}\mathbf{1}_{\mathcal{X}}) - C_*(\mathbf{1}_X)) = (-1)^{\dim \mathcal{X} - 1}(\sigma_H C_*(X_s) - C_*(X)).$$

命題 3.3 (cf. [14]) $\mathcal{X}$，および各 general fiber X_s は非特異とするとき，

$$\mathcal{M}(f; X) = (-1)^{\dim X}(c(T\mathcal{X} - TS) \cap [X] - C_*(X)).$$

特に X が孤立特異点 $\{p_1, \cdots, p_k\}$ のみ有するならば，各孤立特異点 p_i の Milnor number を $\mu(X, p_i)$ と書くことにすると，次が成り立つ：

$$\mathcal{M}(f; X) = (-1)^{\dim \mathcal{X} - 1} \sum_{i=1}^{k} \mu(X, p_i).$$

命題 3.4 N, P を多様体で $\dim P = \dim N + 1$ とする．$g : N \to P$ を $\mathcal{A}$-有限確定特異点のみ有する analytic map とし，g の安定でない $\mathcal{A}$-有限確定特異点を $\{p_1, \cdots, p_k\}$

とする．g の 1-parameter unfolding $G : N^n \times S \to P^{n+1} \times S$ が与えられているとする．$X := g(N)$ とおき，$f : \mathcal{X} = G(N^n \times S) \to S$ を第2成分への射影とする．このとき，

$$\mathcal{M}(f; X) = (-1)^{\dim N} \sum_{i=1}^{k} \mu(g, p_i).$$

ここで $\mu(g, p_i)$ は写像芽 $g : (N, p_i) \to (P, g(p_i))$ の Milnor number （ David Mond [8] による）を表す．

変形 f の Milnor class $\mathcal{M}(f; X)$ に対して次にような自然な product formula が成り立つ．$f : \mathcal{X}_1 \to D_{\eta_1}$，$g : \mathcal{X}_2 \to D_{\eta_2}$ （ $0 \in D_{\eta_i} \subset \mathbf{C}$ ）に対して，$f + g : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \to D_\eta$ を $(f+g)(x, y) := f(x) + g(y), x \in \mathcal{X}_1, y \in \mathcal{X}_2, \eta > \eta_1 + \eta_2$, により定義する．$X := f^{-1}(0)$, $Y := g^{-1}(0)$，$X \perp Y := (f+g)^{-1}(0)$ とおく．一般化された Thom-Sebastiani 公式を用いて次が示される．

命題 3.5 （ Thom-Sebastiani type formula for the Milnor class, cf. [10]）

$$\mathcal{M}(f + g; X \perp Y) = i_*(\mathcal{M}(f; X) \times \mathcal{M}(g; Y)).$$

ここで，$i : X \times Y \to X \perp Y$ は包含写像，右辺の $\times$ はホモロジークロス積を意味する．

参考文献

[1] J.-P. Brasselet, D. Lehmann, J. Seade and T. Suwa, *On Milnor classes of local complete intersections,* Hokkaido Univ. Preprint Series in Math. vol. 413, 1998

[2] J.-P. Brasselet and M.-H. Schwartz, *Sur les classes de Chern d'une ensemble analytique complexe,* Astérisque, vol. 82–83, 1981, pp.93–148

[3] J.-P. Brasselet and J. Seade, (in preparation)

[4] G. Gonzalez-Springberg, *L'obstruction de'Euler locale et le théorème de MacPherson,* Asterisque, vol. 82–83, 1981, pp.7–32

[5] H. Hironaka, *Stratification and flatness,* Real and Complex Singularities (ed. by A.Holm), Oslo 1976, Noordhoff, 1977, pp.199–265

[6] Lê Dũng Tráng, *Some remarks on relative monodromy,* Real and Complex Singularities (ed. by A.Holm), Oslo 1976, Noordhoff, 1977, pp.397–403

[7] R. MacPherson, *Chern classes for singular algebraic varieties,* Ann. Math. ,vol. 100, 1974, pp.423–432

[8] D. Mond, *Vanishing cycles for analytic maps,* Singularity Theory and its Applications, Warwick 1989, vol.1, LMS 1462, Springer, pp.221–234

[9] I. Nakai, Notes on Characteristic classes of smooth mappings, preprint, 1994?

[10] T. Ohmoto and S. Yokura, *Product formula for the Milnor class,* preprint, 1999

[11] A. Parusiński and P. Pragacz, *A formula for the Euler characteristic of singular hypersurfaces,* J. Algebraic Geometry, vol. 4, 1995, pp.337-351

[12] A. Parusiński and P. Pragacz, *Characteristic classes of hypersurfaces and characteristic cycles,* preprint, 1998

[13] M. Sebastiani and R. Thom, *Un résultat sur la monodromie,* Invent. Math., 13, 1971, pp. 90–96

[14] T. Suwa, Classes de Chern des intersections completes locales, C. R. Acad. Sci. Paris, 324., 1996, pp.67–70,

[15] J. L. Verdier , Spécialization des classes de Chern, Astérisque, vol 82–83, 1981, pp. 149–159

[16] O.Y. Viro, Some integral calculus based on Euler characteristc, Lecture notes in Math. 1410, 1987

[17] S. Yokura, *On characteristic classes of complete intersections,* "Algebraic Geometry - Hirzebruch 70", Contemporary Mathematics Amer. Math. Soc., Providence, Vol.241 (1999), pp.349-369