

Title	On Characteristic Classes of Fibers/Images of Mappings (Singularity Theory and its Applications)
Author(s)	大本, 亨
Citation	数理解析研究所講究録 (2000), 1122: 134-139
Issue Date	2000-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/63536
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

On Characteristic Classes of Fibers/Images of Mappings

大本 亨 鹿児島大学理学部

Toru Ohmoto, Department of Math. and Computer Sci., Kagoshima University

§0 はじめに

この講演では、複素解析的写像の特異ファイバー（または像集合）のホモロジー特性類について話します。特に、写像として、コンパクト複素解析特異多様体 X の変形 $f: \mathcal{X} \rightarrow S$, $X = f^{-1}(p), (p \in S)$ を考えることにします。ここで、 f は固有 (proper), S は非特異複素曲線 (\mathbb{C} の原点周りの disc でよい) であるとし、(写像の像集合を考える場合は、解析的写像 $h: N \rightarrow P$ (N および P は非特異かつコンパクトで、 $\dim N < \dim P$) の像集合を $X(:= h(N))$ とおき、さらに f を安定変形族 $F: N \times S \rightarrow P \times S$ ($F(x, p) = (h(x), p), x \in N$, さらに各 $F_q(q \neq p \in S)$ は通常特異点 (安定特異点) のみ有するもの) が与えられているものとし、 $\mathcal{X} := \text{Image}(F)$ とおき、 $f: \mathcal{X} \rightarrow S$ を第2成分への射影とすることで、始めの状況に移すことができます。)

一般に、良く知られた Euler 標数 χ は、しかるべき集合族に対して、有限加法性

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$$

が成立することから、Euler 標数を (整数値をとる) 測度とみなした積分論が展開できます ([16], [9], [7])。本稿の話題は、 X の各点に対して定義される適当な不変量を X 上の“可測関数” (後ほど構成的関数と呼ぶ) と見なして積分することです (もっとも単純な例として、 X 上の定数関数 1_X の積分は X の Euler 標数に他ならない)。この Euler 標数測度による積分の一般化として、 X の整係数ホモロジー群 $H_*(X; \mathbb{Z}) (= \bigoplus H_i(X; \mathbb{Z}))$ に値をとるチャーン・マクファーソン変換があり (ドリーニュ, グロタンディエクが予想した特異多様体に対するリーマン・ロッホ型定理の一つ), この machinery を通して、局所不変量からホモロジーの元を得る筋立てです。 X の各点における f の“ミルナー数”は X 上の“可測関数”となり、それにチャーン・マクファーソン変換を施して得るホモロジー類を、 X の変形 f のミルナー特性類と呼び、 $\mathcal{M}(f, X)$ で表します。これに関するいくつかの性質について後述します (與倉氏 (鹿児島大理) との共著 [10] の一部)。

注として、(f に対してではなく) より一般に局所完全交互特異多様体 X に対してミルナー特性類 $\mathcal{M}(X)$ が定義されます (諏訪立雄氏, 與倉昭治氏, A. Parusinski, P. Pragacz, J. P. Brasselet, J. Seade, P. Aluffi の仕事; [1], [12], [17] etc)。

§1 ミルナーファイブレーション

孤立特異点の芽 $f: \mathbb{C}^m, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ に関する良く知られている J. Milnor のファイブレーション定理は、Lé によって次の形に一般化されている。

定理 1.1: (Lê [6], Theorem (1.1))

(\mathcal{X}, x_0) を \mathbf{C}^m に埋め込まれた analytic variety の芽, $f: \mathcal{X}, x_0 \rightarrow \mathbf{C}, 0$ を \mathcal{X} 上の analytic function の芽とする. f の代表も同様に $f: \mathcal{X} \cap U \rightarrow \mathbf{C}$ で表すことにする (U は $x_0 \in \mathbf{C}^m$ の開近傍). このとき, ある $\epsilon > 0$ と $\eta > 0$ が存在して, f が誘導する次の写像が位相的ファイブレーションになる:

$$f^{-1}(D_\eta - \{0\}) \cap \mathcal{X} \cap B_\epsilon \rightarrow \text{Int } D_\eta - \{0\}.$$

ただし, ここで B_ϵ は x_0 を中心とする半径 ϵ の closed ball, D_η は \mathbf{C} の原点中心の半径 η の開円板とする.

\mathcal{X} や f は孤立特異点でなくとも構わないことに注意する. 証明は, $f^{-1}(0)$ を細分するような Thom の a_f -condition を満たす f の Whitney stratification (いわゆる good stratification) が存在すること (target が 1 次元ならば常に存在することが広中 [5] により知られている), 及び Thom-Mather の first isotopy lemma による.

§2 構成的関数とマクファーソン自然変換

X を compact complex analytic variety とする. 以降, variety X はある complex manifold に埋め込まれたもののみ扱う. X の subvarieties から \cup , \cap , 補集合を取る操作を有限回施して得られる X の部分集合を, X の構成的部分集合 (constructible subset) と呼ぶ. X 上の整数値関数 $\alpha: X \rightarrow \mathbf{Z}$ が構成的関数 (constructible function) であるとは, X の有限個の構成的部分集合への分割 $\{V_i\}_{1 \leq i \leq s}$ が存在して, 各 V_i 上で α が一定の値をとるときにいう (α のとる値は有限で, 各 $\alpha^{-1}(n)$, $n \in \mathbf{Z}$, が構成的部分集合になるもの, と言ってよい). X の構成的部分集合 W の特性関数 (W 上で値 1 をとり, W の補集合上で値 0 をとる関数) を $\mathbf{1}_W$ で表すことにすると, 任意の構成的関数 α は, $\alpha = \sum_{i=1}^s m_i \mathbf{1}_{V_i}$ (V_i は構成的, $m_i \in \mathbf{Z}$) で表される. X 上の構成的関数全体を $\mathcal{F}(X)$ で表す. これは $\mathbf{1}_W$ (W は analytic subvariety) で生成されるアーベル群である. また, analytic map $f: X \rightarrow Y$ に対して, 構成的関数全体がなすアーベル群の間の準同型写像 $f_*: \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ を次で定める:

$$f_*(\mathbf{1}_W)(y) := \chi(f^{-1}(y) \cap W), \quad y \in Y.$$

ここで右辺の χ はコンパクトな台を持つコホモロジー群の Euler 標数とする (stratification $X = \coprod V_i$ に対して, $\chi(X) = \sum \chi(V_i)$ となる性質が大事). \mathcal{F} は compact analytic variety の圏からアーベル群の圏への covariant functor になることに注意する.

W を X の closed subvariety, $\alpha \in \mathcal{F}(X)$ とし, $\alpha = \sum_{i=1}^s m_i \mathbf{1}_{V_i}$ (V_i は構成的, $m_i \in \mathbf{Z}$) と表されているものとする. 構成的関数 α の W 上での積分 (または α の W 上での Euler 標数) を次で定義する:

$$\int_W \alpha \quad (= \int_W \alpha d\chi) := \sum_{i=1}^s m_i \chi(V_i \cap W).$$

補題 2.1 (Fubini 型公式):

analytic map $f: X \rightarrow Y$ と X の構成的関数 α に対して, 次が成り立つ:

$$\int_X \alpha = \int_Y f_* \alpha.$$

各点 $y \in Y$ に対して $f_* \alpha(y) = \int_{f^{-1}(y)} \alpha$ であるから, 右辺は $\int_Y \int_{f^{-1}(y)} \alpha$ のように 2 重積分のような形で表される. この補題は積分をとる操作 $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{Z}$ の自然性 (射 f_* との可換性) を示していると言える. この意味で f を一般化したものとして, 構成的関数のアーベル群からホモロジー群へのマクファーソン自然変換がある.

定理 2.2: (R. MacPherson [7])

compact complex analytic variety の圏からアーベル群の圏への 2 つの covariant functor \mathcal{F} および $H_*(: \mathbf{Z})$ の間の自然変換 $(*) C_*: \mathcal{F} \rightarrow H_*(: \mathbf{Z})$ で, 非特異多様体 X に対して $C_*(\mathbf{1}_X) = c(X) \cap [X]$ を満たすものが唯一存在する. ここで $c(X)$ は TX の total Chern class を意味する.

$(*) C_*: \mathcal{F}(X) \rightarrow H_*(X: \mathbf{Z})$ が準同型であって, 射に対する可換性を満たすこと.

$\int_X \alpha$ は $C_*(\alpha)$ の 0 次の部分の和となっている. 実際, X から一点への写像 $\pi: X \rightarrow \{pt\}$ を取ると,

$$\pi_* C_*(\alpha) = C_*(\pi_* \alpha) = \pi_* \alpha = \int_X \alpha.$$

定義 2.3 $C_*(X) := C_*(\mathbf{1}_X)$ と置き, これを X の Chern-Schwartz-MacPherson class と呼ぶ.

注意 2.4 non-compact variety を扱う場合でも, 射として proper map を考え, Borel-More homology (closed supported homology) を用いればよい (cf. [4]).

§3 特殊化 (specialization) と Chern 特性類

\mathcal{X} を complex analytic variety, S を non-singular complex curve, $0 \in S$, $f: \mathcal{X} \rightarrow S$ を analytic map とする. $s \in S$ に対して, $X_s := f^{-1}(s)$ と置く.

構成的関数の特殊化:

準同型写像 $\sigma_{\mathcal{F}}: \mathcal{F}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{F}(X_0)$ を次で定義する: Y を \mathcal{X} の closed subvariety とするとき, 特性関数 $\mathbf{1}_Y$ に対して $\sigma_{\mathcal{F}} \mathbf{1}_Y$ の $x \in X_0$ での値を

$$\sigma_{\mathcal{F}} \mathbf{1}_Y(x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi(B_{\epsilon}(x) \cap Y_s)$$

とする. ここで, 右辺の $B_{\epsilon}(x)$ は x を中心とする十分小さい半径 $\epsilon > 0$ の閉球, $Y_s = Y \cap X_s$ とする. 写像 $f|_Y: Y \rightarrow S$ の x における芽にファイブレーション定理を適用することにより, 右辺は意味を持つことが保証される. また, a_f -condition を満たすような $f|_Y$ の

Whitney stratification が存在することにより, $\sigma_{\mathcal{F}}\mathbf{1}_{\mathcal{X}}$ が X_0 上の構成的関数となるが分かる. 特に $\sigma_{\mathcal{F}}\mathbf{1}_{\mathcal{X}}(x) = \chi(B_\epsilon(x) \cap X_s)$ に注意する.

ホモロジー群の特殊化:

準同型写像 $\sigma_H: H_*(X_s) \rightarrow H_*(X_0)$ を次で定義する: $0 \in S$ の十分小さい開近傍 D を取ると $f^{-1}(D)$ は X_0 にホモトピー同値にできることから, 包含写像 $i_s: X_s \rightarrow f^{-1}(D)$ の誘導準同型 $i_{s*}: H_*(X_s) \rightarrow H_*(f^{-1}(D))$ と同型写像 $H_*(f^{-1}(D)) \simeq H_*(X_0)$ の合成写像を σ_H とおく.

特殊化 $\sigma_{\mathcal{F}}$ と σ_H は次の意味でマクファーソン変換 C_* と可換になることが知られている:

定理 3.1: (Verdier [15]) $\alpha \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ とする. このとき 0 に十分近い $s \in S$ に対して $\sigma_H C_*(\alpha|_{X_s}) = C_*(\sigma_{\mathcal{F}}\alpha)$ が成り立つ.

構成的関数 $\sigma_{\mathcal{F}}\mathbf{1}_{\mathcal{X}} - \mathbf{1}_X$ の $x \in X$ での値は $\chi(B_\epsilon(x) \cap X_s) - 1$ であり, $\chi(B_\epsilon(x) \cap X) = 1$ に注意すれば, この構成的関数は (適当な符号を付ければ) 芽 $f: \mathcal{X}, x \rightarrow S, 0$ の “vanishing Euler characteristics” を表している. 特に, \mathcal{X} が非特異で f が孤立特異点ならば, これは f の Milnor number である. “vanishing Euler characteristics” の “積分” として次を定義する:

定義 3.2 (cf. [10], [3]) $f: \mathcal{X} \rightarrow S, X := X_0 (= f^{-1}(0))$, に対して,

$$\mathcal{M}(f; X) := (-1)^{\dim \mathcal{X} - 1} C_*(\sigma_{\mathcal{F}}\mathbf{1}_{\mathcal{X}} - \mathbf{1}_X)$$

とおき, X の変形 f の Milnor class と呼ぶ.

定義からすぐに分かるように, $\mathcal{M}(f; X)$ は, X の近くにある generic fiber X_s の Chern-Schwartz-MacPherson class の特殊化と special fiber X の Chern-Schwartz-MacPherson class との差を意味する:

$$\mathcal{M}(f; X) = (-1)^{\dim \mathcal{X} - 1} (C_*(\sigma_{\mathcal{F}}\mathbf{1}_{\mathcal{X}}) - C_*(\mathbf{1}_X)) = (-1)^{\dim \mathcal{X} - 1} (\sigma_H C_*(X_s) - C_*(X)).$$

命題 3.3 (cf. [14]) \mathcal{X} , および各 general fiber X_s は非特異とするとき,

$$\mathcal{M}(f; X) = (-1)^{\dim X} (c(T\mathcal{X} - TS) \cap [X] - C_*(X)).$$

特に X が孤立特異点 $\{p_1, \dots, p_k\}$ のみ有するならば, 各孤立特異点 p_i の Milnor number を $\mu(X, p_i)$ と書くことにすると, 次が成り立つ:

$$\mathcal{M}(f; X) = (-1)^{\dim \mathcal{X} - 1} \sum_{i=1}^k \mu(X, p_i).$$

命題 3.4 N, P を多様体で $\dim P = \dim N + 1$ とする. $g: N \rightarrow P$ を \mathcal{A} -有限確定特異点のみ有する analytic map とし, g の安定でない \mathcal{A} -有限確定特異点を $\{p_1, \dots, p_k\}$

とする. g の 1-parameter unfolding $G : N^n \times S \rightarrow P^{n+1} \times S$ が与えられているとする. $X := g(N)$ とおき, $f : X = G(N^n \times S) \rightarrow S$ を第 2 成分への射影とする. このとき,

$$\mathcal{M}(f; X) = (-1)^{\dim N} \sum_{i=1}^k \mu(g, p_i).$$

ここで $\mu(g, p_i)$ は写像芽 $g : (N, p_i) \rightarrow (P, g(p_i))$ の Milnor number (David Mond [8] による) を表す.

変形 f の Milnor class $\mathcal{M}(f; X)$ に対して次のような自然な product formula が成り立つ. $f : X_1 \rightarrow D_{\eta_1}$, $g : X_2 \rightarrow D_{\eta_2}$ ($0 \in D_{\eta_i} \subset \mathbf{C}$) に対して, $f + g : X_1 \times X_2 \rightarrow D_{\eta}$ を $(f + g)(x, y) := f(x) + g(y)$, $x \in X_1, y \in X_2, \eta > \eta_1 + \eta_2$, により定義する. $X := f^{-1}(0)$, $Y := g^{-1}(0)$, $X \perp Y := (f + g)^{-1}(0)$ とおく. 一般化された Thom-Sebastiani 公式を用いて次が示される.

命題 3.5 (Thom-Sebastiani type formula for the Milnor class, cf. [10])

$$\mathcal{M}(f + g; X \perp Y) = i_*(\mathcal{M}(f; X) \times \mathcal{M}(g; Y)).$$

ここで, $i : X \times Y \rightarrow X \perp Y$ は包含写像, 右辺の \times はホモロジークロス積を意味する.

参考文献

- [1] J.-P. Brasselet, D. Lehmann, J. Seade and T. Suwa, *On Milnor classes of local complete intersections*, Hokkaido Univ. Preprint Series in Math. vol. 413, 1998
- [2] J.-P. Brasselet and M.-H. Schwartz, *Sur les classes de Chern d'une ensemble analytique complexe*, Astérisque, vol. 82-83, 1981, pp.93-148
- [3] J.-P. Brasselet and J. Seade, (in preparation)
- [4] G. Gonzalez-Sprinberg, *L'obstruction de'Euler locale et le théorème de MacPherson*, Asterisque, vol. 82-83, 1981, pp.7-32
- [5] H. Hironaka, *Stratification and flatness*, Real and Complex Singularities (ed. by A.Holm), Oslo 1976, Noordhoff, 1977, pp.199-265
- [6] Lê Dũng Tráng, *Some remarks on relative monodromy*, Real and Complex Singularities (ed. by A.Holm), Oslo 1976, Noordhoff, 1977, pp.397-403
- [7] R. MacPherson, *Chern classes for singular algebraic varieties*, Ann. Math., vol. 100, 1974, pp.423-432
- [8] D. Mond, *Vanishing cycles for analytic maps*, Singularity Theory and its Applications, Warwick 1989, vol.1, LMS 1462, Springer, pp.221-234
- [9] I. Nakai, Notes on Characteristic classes of smooth mappings, preprint, 1994?
- [10] T. Ohmoto and S. Yokura, *Product formula for the Milnor class*, preprint, 1999
- [11] A. Parusiński and P. Pragacz, *A formula for the Euler characteristic of singular hypersurfaces*, J. Algebraic Geometry, vol. 4, 1995, pp.337-351

- [12] A. Parusiński and P. Pragacz, *Characteristic classes of hypersurfaces and characteristic cycles*, preprint, 1998
- [13] M. Sebastiani and R. Thom, *Un résultat sur la monodromie*, *Invent. Math.*, 13, 1971, pp. 90–96
- [14] T. Suwa, *Classes de Chern des intersections complètes locales*, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 324., 1996, pp.67–70,
- [15] J. L. Verdier , *Spécialisation des classes de Chern*, *Astérisque*, vol 82–83, 1981, pp. 149–159
- [16] O.Y. Viro, *Some integral calculus based on Euler characteristic*, *Lecture notes in Math.* 1410, 1987
- [17] S. Yokura, *On characteristic classes of complete intersections*, “Algebraic Geometry - Hirzebruch 70”, *Contemporary Mathematics Amer. Math. Soc.*, Providence, Vol.241 (1999), pp.349–369