数理解析研究所講究録
1124巻 2000年 1-12

KOSZUL COMPLEX AND WRONSKI RELATIONS FOR $U(\mathfrak{gl}_n)$

梅田 亨 Tôru UMEDA (京大・理)

Introduction: Lie 環 $\mathfrak{gl}_n$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心元として，非可換な行列式及びパーマネントによって表示される二つの系列が知られるが，ここではそれらの具体的関係式を与える．これら二系列の中心元の，対称式に於ける対応物は，それぞれ基本対称式 (elementary symmetric polynomials) と完全斉次対称式 (complete homogeneous symmetric polynomials) である．それらの関係式は，母函数に移れば単純で，(本質的に) 互いに逆数になっている．そのような簡単な関係式に敢えて名前をつけるのは，些か心苦しいが，いくつかの文献では Wronski の関係式と呼んでいるので，ここでもそれに従う (定理・公式からの「人名追放運動」には賛同したい一方，便利なので人名を使うのは簡単には止められない)．因みに Josef Maria Hoëné Wronski (1778–1853) は Gauß と同時代を生きた数学者で，興味深い人物である．

さて，古典的な場合 (= 可換変数を扱う場合) には母函数に移って簡単であった．それに類似したより一般的な定式化は Yangian によってなされている[Na1]．しかしながら，その R 行列を駆使する方法は，「一般の」表現論研究者に馴染みがあるとは言いがたいし，得られた定理を「普通の」言葉に直すのも明らかではない．一方，古典的な場合でも母函数の代わりに，Koszul 複体の完全性と Euler-Poincaré の交代和の原理によって，Wronski 関係式をトレースの関係式として出すという方法がある (考えようによっては，これも一種の母函数の方法であるが)．ここでは，その類似を辿ることで $U(\mathfrak{gl}_n)$ の Wronski 関係式を導く．

1. 非可換成分行列のトレース: 非可換成分の行列でも普通にトレースを考えればよいが (係数拡大するだけのこと)，座標の入れ替えなどに関する不変性などをちゃんと見るために，以下のような定式化をする．

基礎体は (標数 0 の) $\mathbb{K}$ を固定して考える．$\mathbb{K}$ 上の (有限次元) 線型空間 V と $\mathbb{K}$- 線型環 $\mathcal{A}$ に対し,

$$\Phi : V \longrightarrow V \otimes \mathcal{A}.$$

というタイプの線型写像 Φ を考え，そのトレース $\mathrm{Tr}(\Phi)$ を

$$\mathrm{Tr}(\Phi) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{jj}$$

と定義する．但し， $\Phi(v_j) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \Phi_{ij}$, で $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ は V の一つの基底とする．定義が基底の取り方によらないのは容易である．係数拡大だけなので，次のような基本的なことも確認できる．

Lemma 1.1. 次の図式が可換とする．

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ {\scriptstyle\Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Psi} \\ V\otimes\mathcal{A} & \xrightarrow[f\otimes 1]{} & W\otimes\mathcal{A}. \end{array}$$

この時

(1) $\Phi(\mathrm{Ker}\, f) \subset \mathrm{Ker}\, f \otimes \mathcal{A}$,

(2) $\Psi(\mathrm{Im}\, f) \subset \mathrm{Im}\, f \otimes \mathcal{A}$,

(3) $\mathrm{Tr}(\Phi) = \mathrm{Tr}(\Phi|_{\mathrm{Ker}\, f}) + \mathrm{Tr}(\Psi|_{\mathrm{Im}\, f})$

が成立する．

これから直ちに Euler-Poincaré の交代和の原理も判る．

Corollary 1.2 (Euler-Poincaré Principle). 次のダイアグラム (の一行目) で $d^i d^{i-1} = 0$ が 成り立つとする．

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & V^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & V^i & \xrightarrow{d^i} & V^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & {\scriptstyle\Phi^{i-1}}\downarrow & & {\scriptstyle\Phi^{i}}\downarrow & & {\scriptstyle\Phi^{i+1}}\downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & V^{i-1}\otimes\mathcal{A} & \xrightarrow[d^{i-1}\otimes 1]{} & V^i\otimes\mathcal{A} & \xrightarrow[d^i\otimes 1]{} & V^{i+1}\otimes\mathcal{A} & \longrightarrow & \cdots. \end{array}$$

この時 Φ^i はこの複体のコホモロジー間の線型写像 $H^i(\Phi) : H^i(V) \to H^i(V\otimes\mathcal{A}) = H^i(V)\otimes\mathcal{A}$ を引き起こし，(複体が有限の時は) 等式

$$\sum_i (-)^i \ \mathrm{Tr}(\Phi^i) = \sum_i (-)^i \ \mathrm{Tr}(H^i(\Phi)).$$

が成り立つ．

次に行列のテンソル積 (Kronecker 積) を考える．二つの線型写像 $\Phi : V \to V\otimes\mathcal{A}$ と $\Psi : W \to W\otimes\mathcal{A}$ に対して，その「積」

$$\Phi\times\Psi : V\otimes W \longrightarrow V\otimes W\otimes\mathcal{A}$$

を $\mathcal{A}$ の積を通じて定義する．即ち，V と W の基底 $\{v_i\}$ と $\{w_j\}$ を用いた Φ と Ψ の行列表示を (Φ_{pi}) 及び (Ψ_{qj}) とした時

$$(\Phi\times\Psi)(v_i\otimes w_j) = \sum_{p,q} v_p\otimes w_q\otimes\Phi_{pi}\Psi_{qj}. \tag{1.1}$$

積の順番を入れ替えることもできるので，それを $\Psi\check{\times}\Phi$ と書く．

これらの積に関する結合法則

$$(\Phi_1\times\Phi_2)\times\Phi_3 = \Phi_1\times(\Phi_2\times\Phi_3), \tag{1.3}$$

$$(\Phi_3\check{\times}\Phi_2)\check{\times}\Phi_1 = \Phi_3\check{\times}(\Phi_2\check{\times}\Phi_1). \tag{1.4}$$

も見易い．また，「積」のトレースに関して次が成り立つのも定義からすぐに判る．

Lemma 1.3. 線型写像 $\Phi : V \to V\otimes\mathcal{A}$ と $\Psi : W \to W\otimes\mathcal{A}$ に対し，その「積」$\times$ 及び $\check{\times}$ のトレースについて $\mathrm{Tr}(\Phi\times\Psi) = \mathrm{Tr}(\Phi)\,\mathrm{Tr}(\Psi)$ と $\mathrm{Tr}(\Psi\check{\times}\Phi) = \mathrm{Tr}(\Psi)\,\mathrm{Tr}(\Phi)$ が成り立つ．

2. Koszul complex: ここでは通常の Koszul 複体 (多項式係数 de Rham 複体) について記号の説明も兼ねて復習する．

記号 $\mathcal{P}_n$ で n 変数多項式環 $\mathbb{K}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ を表わし，Λ_n で変数 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ を生成系に持つ外積代数を表わす (気持ちとしては e_i は変数 x_i の微分 dx_i を表わすものだが，紛れないよう別の文字を用いる)．更にこれらのテンソル積 (多項式環係数の外積代数) $\Omega_n = \mathcal{P}_n\otimes\Lambda_n$ を考える．Ω_n の環の構造は二つの部分環 $\mathcal{P}_n$ と Λ_n が元別に可換になるように入れる．自然な次数付けによる多項式環と外積代数の同次成分を $\mathcal{P}_n^k$ や Λ_n^l のように書く．これらの次数付けに対する次数作用素を $\deg_{\mathcal{P}}$ と $\deg_{\Lambda}$ と書く．また $\Omega_n^{k,l} = \mathcal{P}_n^k\otimes\Lambda_n^l$ と置く．変数の箇数 n を省いて $\Omega^{k,l} = \Omega_n^{k,l}$ のようにも書くことがある．

環 Ω_n の上には外微分 d とその双対を d^* という二つの微分がある:

$$d = \sum_{i=1}^{n} e_i \, \partial_i, \qquad d^* = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \rfloor_i.$$

ここで e_i や x_i はそれぞれ, その変数による掛け算作用素を表わし, ∂_i と $\rfloor_i$ はそれぞれ対応する変数に関する偏微分と内部微分を表わす. これらの四つの基本的な作用素のあいだには次の正準 (反) 交換関係が成り立つ:

$$\partial_i x_j - x_j \partial_i = \delta_{ij}, \qquad \rfloor_i e_j + e_j \rfloor_i = \delta_{ij}.$$

勿論 δ_{ij} は Kronecker のデルタである. これらの正準 (反) 交換関係から $d^2 = 0$, $d^{*2} = 0$ と

$$dd^* + d^* d = \deg_{\mathcal{P}} + \deg_{\Lambda} \tag{2.1}$$

という関係が判る.

さて, つぎのような二つの複体を考え, Koszul 複体と呼ぶ.

$$\begin{aligned} K_N : \quad & 0 \longrightarrow \Omega^{N,0} \xrightarrow{d} \Omega^{N-1,1} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{0,N} \longrightarrow 0, \\ K_N^* : \quad & 0 \longleftarrow \Omega^{N,0} \xleftarrow{d^*} \Omega^{N-1,1} \xleftarrow{d^*} \cdots \xleftarrow{d^*} \Omega^{0,N} \longleftarrow 0. \end{aligned}$$

関係式 (2.1) から, これらの複体は $N = 0$ を除いて完全 (exact) であることが判る.

これらの複体を $\mathbb{K}$-algebra $\mathcal{A}$ で係数拡大する. もちろん微分はそれぞれ $d \otimes 1, d^* \otimes 1$ を採用し拡大した係数 $\mathcal{A}$ の上には trivial に働くものとするが, 簡単の為, 以下では単に d, d^* と書く. 次数や次数作用素についても同様の便法を用いる.

係数拡大したところでも, 次のような微分則が成り立つのは見易い:

$$d(\varphi\psi) = d\varphi \cdot \psi + \varphi \cdot d\psi, \qquad d^*(\varphi\psi) = d^*\varphi \cdot \psi + (-)^{\deg_\Lambda(\varphi)} \varphi \cdot d^*\psi. \tag{2.2}$$

ここで $\varphi, \psi \in \Omega_n \otimes \mathcal{A}$.

Koszul 複体の完全性と Corollary 1.2 から次が出る:

Lemma 2. 線型写像

$$\Phi^{k,l} : \Omega^{k,l} \longrightarrow \Omega^{k,l} \otimes \mathcal{A}$$

が微分 d (または d^*) と可換とする．すると $N \geq 1$ に対して，トレースの交代和はゼロになる：

$$\sum_{k=0}^{N} (-)^k \ \mathrm{Tr}(\Phi^{k,N-k}) = 0.$$

一般論としての枠組みはこのように簡単である．我々の目的とする Wronski 関係式を得るためには，あとは $\mathcal{A} = U(\mathfrak{gl}_n)$ という係数拡大に於いて，実際に微分と可換な線型写像を具体的に構成することが残された訳である．

3. 係数を $U(\mathfrak{gl}_n)$ に持つ線型写像: 係数拡大 $\Omega_n \otimes U(\mathfrak{gl}_n)$ を再び考えて，これにも部分環 Ω_n と $U(\mathfrak{gl}_n)$ が元別に可換となるように環構造を入れる．Lie 環 $\mathfrak{gl}_n$ の標準的な基底 (行列単位に対応する) を E_{ij} とし，パラメータ u を入れて

$$E_{ij}(u) = E_{ij} + u\delta_{ij}$$

と書く．次のような二種類の $\Omega_n \otimes U(\mathfrak{gl}_n)$ の元が以下で基本的な役割を果たす．

$$\eta_i(u) = \sum_{p=1}^{n} x_p E_{pi}(u) \in \mathcal{P}_n \otimes U(\mathfrak{gl}_n) \subset \Omega_n \otimes U(\mathfrak{gl}_n),$$
$$\omega_j(v) = \sum_{q=1}^{n} e_q E_{qj}(v) \in \Lambda_n \otimes U(\mathfrak{gl}_n) \subset \Omega_n \otimes U(\mathfrak{gl}_n).$$

これらの交換関係は

Lemma 3.1.

(1) $$\eta_i(u-1)\eta_j(u) - \eta_j(u-1)\eta_i(u) = 0,$$

(2) $$\omega_i(v)\omega_j(v-1) + \omega_j(v)\omega_i(v-1) = 0,$$

(3) $$\omega_j(u)\eta_i(v) - \eta_i(u)\omega_j(v) = x_j\omega_i(z) - \eta_j(z)e_i.$$

で与えられる (パラメータ u, v, z は任意とする)．証明は易しい．

長さ r の非負整数の列 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_r)$ で $1 \leq i_k \leq n$ を満たすものを考える (長さを $r = |I|$ と書く)．これを使って $x^I = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r}$ と $e^I = e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r}$ と書くことにする．このような整数の列の上に働く対称群 $\mathfrak{S}_r$ の自然な作用で

$$x^{I^\sigma} = x^I, \qquad e^{I^\sigma} = \mathrm{sgn}(\sigma)\, e^I.$$

となるのは明らかだが，更に $r=|I|$ に対して

$$\eta^{(I)}(u)=\eta_{i_1}(u-r+1)\eta_{i_2}(u-r+2)\cdots\eta_{i_r}(u), \tag{3.1}$$

$$\omega^{(I)}(v)=\omega_{i_1}(v)\omega_{i_2}(v-1)\cdots\omega_{i_r}(v-r+1). \tag{3.2}$$

と置く時，Lemma 3.1 の交換関係 (1) (2) から

$$\eta^{(I^\sigma)}(u)=\eta^{(I)}(u), \qquad \omega^{(I^\sigma)}(v)=\operatorname{sgn}(\sigma)\,\omega^{(I)}(v). \tag{3.3}$$

となることが判るので

$$\boldsymbol{E}(u)^{\mathcal{P}}\colon x^I\mapsto\eta^{(I)}(u), \qquad \boldsymbol{E}(v)^{\Lambda}\colon e^I\mapsto\omega^{(I)}(v)$$

という写像は well-defined であることが判る．このようにして

$$\boldsymbol{E}(u)^{\mathcal{P}}:\mathcal{P}_n\longrightarrow\mathcal{P}_n\otimes U(\mathfrak{gl}_n), \qquad \boldsymbol{E}(v)^{\Lambda}:\Lambda_n\longrightarrow\Lambda_n\otimes U(\mathfrak{gl}_n).$$

という二種類の線型写像が得られる．また，その同次成分への制限を $\boldsymbol{E}(u)^{\mathcal{P}^k}=\boldsymbol{E}(u)^{\mathcal{P}}|_{\mathcal{P}^k}$ や $\boldsymbol{E}(u)^{\Lambda^k}=\boldsymbol{E}(u)^{\Lambda}|_{\Lambda^k}$ と書く．

上のように定義された $\boldsymbol{E}(u)^{\mathcal{P}}$ と $\boldsymbol{E}(u)^{\Lambda}$ を使って

$$\boldsymbol{E}(u)^{\mathcal{P}}\times\boldsymbol{E}(v)^{\Lambda}:\Omega_n\longrightarrow\Omega_n\otimes U(\mathfrak{gl}_n),$$
$$\boldsymbol{E}(v)^{\Lambda}\check{\times}\boldsymbol{E}(u)^{\mathcal{P}}:\Omega_n\longrightarrow\Omega_n\otimes U(\mathfrak{gl}_n).$$

のような線型写像が定義できる．しかし，これはこのままでは d や d^* と可換とはならない．実際，定義から $d\eta_i(u)=\omega_i(u)$ と $d^*\omega_j(v)=\eta_j(v)$ が成り立つが，それと d や d^* の積の微分の法則 (2.2) を考えると，例えば，$d\eta^{(I)}(u)$ は

$$\eta_{i_1}(u-r+1)\cdots\eta_{i_{p-1}}(u-r+p-1)\omega_{i_p}(u-r+p)\eta_{i_{p+1}}(u-r+p+1)\cdots\eta_{i_r}(u)$$

のようなものの $1\le p\le r=|I|$ に亘る和になる．可換性の為には，各項の積の中程にある ω を η を超えてどちらかに寄せなくてはならない．Lemma 3.1 (3) のような交換関係では，その作業からはお釣りの項が沢山現われて容易でないと理解できるであろう．このように可換性は明らかというには程遠い．そうではあるのだが，実は次の二つの定理が成り立つ．

Theorem 3.2. 線型写像

$$\boldsymbol{E}(u)^{\mathcal{P}^k} \times \boldsymbol{E}(u-k)^{\Lambda^l} : \Omega_n^{k,l} \longrightarrow \Omega_n^{k,l} \otimes U(\mathfrak{gl}_n)$$

と

$$\boldsymbol{E}(v)^{\Lambda^l} \check{\times} \boldsymbol{E}(v-l)^{\mathcal{P}^k} : \Omega_n^{k,l} \longrightarrow \Omega_n^{k,l} \otimes U(\mathfrak{gl}_n)$$

は *Koszul* 複体の微分 d と可換である.

Theorem 3.2*. 線型写像

$$\boldsymbol{E}(v-l)^{\mathcal{P}^k} \times \boldsymbol{E}(v)^{\Lambda^l} : \Omega_n^{k,l} \longrightarrow \Omega_n^{k,l} \otimes U(\mathfrak{gl}_n)$$

と

$$\boldsymbol{E}(u-k)^{\Lambda^l} \check{\times} \boldsymbol{E}(u)^{\mathcal{P}^k} : \Omega_n^{k,l} \longrightarrow \Omega_n^{k,l} \otimes U(\mathfrak{gl}_n)$$

は *Koszul* 複体の微分 d^* と可換である.

証明は $l=0$ とか $k=0$ とかの場合だけが本質的で，後は (§1 の) 行列の Kronecker 積に関する結合律 (1.3), (1.4) から形式的に出る.

4. $U(\mathfrak{gl}_n)$ に於ける Wronski 関係式: 前節の Theorem 3.2 と 3.2* を Lemma 1.3 と Lemma 2 の一般論に適用すると次の関係式が得られる.

Theorem 4.1. $N \geq 1$ に対し次の関係式が成り立つ.

$$\sum_{k=0}^{N} (-)^k \operatorname{Tr}(\boldsymbol{E}(u)^{\mathcal{P}^k}) \operatorname{Tr}(\boldsymbol{E}(u-k)^{\Lambda^{N-k}}) = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{l=0}^{N} (-)^l \operatorname{Tr}(\boldsymbol{E}(v)^{\Lambda^l}) \operatorname{Tr}(\boldsymbol{E}(v-l)^{\mathcal{P}^{N-l}}) = 0, \tag{2}$$

$$\sum_{l=0}^{N} (-)^l \operatorname{Tr}(\boldsymbol{E}(v-l)^{\mathcal{P}^{N-l}}) \operatorname{Tr}(\boldsymbol{E}(v)^{\Lambda^l}) = 0, \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{N} (-)^k \operatorname{Tr}(\boldsymbol{E}(u-k)^{\Lambda^{N-k}}) \operatorname{Tr}(\boldsymbol{E}(u)^{\mathcal{P}^k}) = 0. \tag{4}$$

これらの関係式で (1) と (4)，及び (2) と (3) は各項で積の順が入れ替わっているだけである. 実は $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{E}(u)^{\mathcal{P}^k})$ や $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{E}(v)^{\Lambda^l})$ は $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心に入ることが判るので,

順番の入れ替えは同じ恒等式を表わしている．その一方 (1) と (2) は一見違った関係式である．

これら $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{E}(u)^{\mathcal{P}^k})$ や $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{E}(v)^{\Lambda^l})$ という元について，もうすこし説明しておく．先に見たように長さ r の整数の列に対称群 $\mathfrak{S}_r$ が働いた．そのような一つの軌道 $I^{\mathfrak{S}_r}$ の中には，$1 \le j_1 \le j_2 \le \cdots \le j_r \le n$ という条件を満たすただ一つの元 $I^\flat = (j_1, j_2, \cdots, j_r)$ が存在する．つまり $I^\flat$ は

$$I^\flat = (\overbrace{1, \cdots, 1}^{\alpha_1}, \overbrace{2, \cdots, 2}^{\alpha_2}, \cdots, \overbrace{n, \cdots, n}^{\alpha_n})$$

という形をしている．そこで各軌道は多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ でラベルづけられる．逆に多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ に対応する長さ $r = |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ の広義増加整数列を I_α と書き，その i 番目の成分を i_α と書くことにする: $I_\alpha = (1_\alpha, 2_\alpha, \cdots, n_\alpha)$ ．ここで多重指数 α と I_α とを同一視して $x^\alpha = x^{I_\alpha} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ や $e^\alpha = e^{I_\alpha} = e_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2} \cdots e_n^{\alpha_n}$ という記号を使う．また普通のように $\alpha! = \alpha_1! \, \alpha_2! \cdots \alpha_n!$ と置く．e^α については α_p のうちに 1 より真に大きいものが現われるときは 0 となる．これらの記号の下で，$\{x^\alpha ; |\alpha| = k\}$ は同次多項式の空間 $\mathcal{P}_n^k$ の基底となり，$\{e^\alpha ; |\alpha| = l, \alpha_p \in \{0, 1\}\}$ は Λ_n^l の基底となる．

また，多重指数 α, β に対し，$n \times n$ 行列 A からその多重指数に対応する行や列を取り出して行列 $A^{\alpha\beta}$ を作る仕方を，その (i, j) 成分が $A_{ij}^{\alpha\beta} = A_{i_\alpha j_\beta}$ となるように指定する．これは α, β の成分が 0 か 1 だけから成るときは部分行列であるが，一般には行や列を重複して取り出すことになる．

上に現われた二種類の線型写像の (非可換) トレースについて，成分による具体的表示を

$$\boldsymbol{E} = (E_{ij})_{i,j=1}^n, \quad \mathbf{1} = (\delta_{ij})_{i,j=1}^n$$

から出発して，まず

$$\boldsymbol{E}_{\mathcal{P}\natural}^{\alpha\beta}(u) = \boldsymbol{E}^{\alpha\beta} + \mathbf{1}^{\alpha\beta} \cdot (u - \mathrm{diag}(r-1, r-2, \cdots, 1, 0))$$

と

$$\boldsymbol{E}_{\Lambda\natural}^{\alpha\beta}(u) = \boldsymbol{E}^{\alpha\beta} - \mathbf{1}^{\alpha\beta} \cdot (u - \mathrm{diag}(r-1, r-2, \cdots, 1, 0))$$

という二種類の行列を作る．但し，現われた多重指数 α, β については $r = |\alpha| = |\beta|$ とする．

一般に (非可換) 環 $\mathcal{A}$ に成分を持つ $r\times r$ 行列 $A=(A_{ij})_{i,j=1}^{r}$ に対し，そのパーマネントと行列式を

$$\operatorname{per}(A)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} A_{\sigma(1)1}A_{\sigma(2)2}\cdots A_{\sigma(r)r},$$
$$\det(A)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} \operatorname{sgn}(\sigma)A_{\sigma(1)1}A_{\sigma(2)2}\cdots A_{\sigma(r)r}.$$

によって定義する．すると線型写像 $\boldsymbol{E}(u)^{\mathcal{P}^k}$ と $\boldsymbol{E}(u)^{\Lambda^k}$ の行列成分は，パーマネントと行列式を用いて

Lemma 4.2. $|\beta|=k$ とする時，

$$\boldsymbol{E}(u)^{\mathcal{P}}(x^\beta)=\sum_{|\alpha|=k} x^\alpha\,\frac{\operatorname{per}(\boldsymbol{E}^{\alpha\beta}_{\mathcal{P}\natural}(u))}{\alpha!},$$
$$\boldsymbol{E}(v)^{\Lambda}(e^\beta)=\sum_{|\alpha|=k} e^\alpha\,\det(\boldsymbol{E}^{\alpha\beta}_{\Lambda\natural}(k-1-v)).$$

という形に書ける．これら線型写像 $\boldsymbol{E}(u)^{\mathcal{P}^k}$ と $\boldsymbol{E}(u)^{\Lambda^k}$ の (同次成分での) トレースを以て $D_k(u),C_k(v)$ を導入すると，Lie 環の生成元 E_{ij} を用いて具体的に表示される:

$$D_k(u)=\operatorname{Tr}(\boldsymbol{E}(u)^{\mathcal{P}^k})=\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\operatorname{per}(\boldsymbol{E}^{\alpha\alpha}_{\mathcal{P}\natural}(u)),$$
$$C_k(v)=\operatorname{Tr}(\boldsymbol{E}(k-1-v)^{\Lambda^k})=\sum_{|\alpha|=k}\det(\boldsymbol{E}^{\alpha\alpha}_{\Lambda\natural}(v)),$$

また $D_k=D_k(0),C_k=C_k(0)$ と置く．この C_k は有名な Capelli element であり，D_k は Nazarov [Na1] によって導入されたものである．この $D_k(u),C_k(v)$ が $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心に入ることは，例えば [U3], [U4] を見られたい．ここで $\det(\boldsymbol{E}^{\alpha\alpha}_{\Lambda\natural}(v))$ は $\alpha_p>1$ となる成分があれば消えるので，$C_k(v)$ に対する和は $\alpha_p=0,1$ という α に亘るものだけでよい．ついでに言うと $D_k(u)$ 及び $C_k(u)$ は $\Delta D_k(u)=(n+k-1)D_{k-1}(u)$ と $\Delta C_k(u)=(k-n-1)C_{k-1}(u)$ という差分方程式を満たし，D_k 及び C_k を係数にもつ u についての多項式で

$$D_k(u)=\sum_{r=0}^{k} u^{(r)}\binom{n+k-1}{r}D_{k-r},$$
$$C_k(u)=\sum_{r=0}^{k} u^{(r)}\binom{k-n-1}{r}C_{k-r},$$

と表わされる．ここに $u^{(r)} = u(u-1)\cdots(u-r+1)$ である．これは $k > n$ に対して $C_k(v) = 0$ であることとも整合的である．

さて，我々の線型写像のトレースが，このように素性の知れた中心元であることが特定できたので， Theorem 4.1 の言い替えとして

Theorem 4.3 (Wronski Relations).

$$\sum_{k=0}^{N} (-)^k D_k(u)\, C_{N-k}(N-1-u) = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{l=0}^{N} (-)^l C_l(l-1-v)\, D_{N-l}(v-l) = 0 \tag{2}$$

が $N \geq 1$ に対して成り立つ．

これらの二つの式に置いて，パラメータの部分に一見して非対称性がある．しかし，無限サイズの行列 $\boldsymbol{C}(u) = (\boldsymbol{C}(u)_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$ と $\boldsymbol{D}(u) = (\boldsymbol{D}(u)_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$ を

$$\boldsymbol{C}(u)_{ij} = (-)^{j-i} C_{j-i}(j-1-u), \qquad \boldsymbol{D}(u)_{ij} = D_{j-i}(u-i)$$

として導入すると (但し， $k < 0$ に対しては $C_k(u) = 0$ 及び $D_k(u) = 0$ としておく)，定理の二つの関係式は

$$\boldsymbol{D}(u)\boldsymbol{C}(u) = 1, \qquad \boldsymbol{C}(u)\boldsymbol{D}(u) = 1, \tag{4.1}$$

と書けるので，両者の関係はより対称に見える．無限行列ではあるが，三角行列なので，片方から他方が導けることもよい．更に (4.1) からクラメールの公式を使って，逆行列の成分を書くことができる．

Theorem 4.4 (Wronski Formulas). $D_k(u)$ は $C_k(u)$ によって次のように行列式表示される．

$$D_k(u) = \det \begin{bmatrix} C_1(-u) & C_2(1-u) & \cdots & C_{k-1}(k-2-u) & C_k(k-1-u) \\ 1 & C_1(1-u) & \cdots & C_{k-2}(k-2-u) & C_{k-1}(k-1-u) \\ & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & C_1(k-2-u) & C_2(k-1-u) \\ 0 & & & 1 & C_1(k-1-u) \end{bmatrix}.$$

また，同様に $C_l(u)$ は $D_l(u)$ によって次のように行列式表示される．

$$C_l(l-1-v) = \det \begin{bmatrix} D_1(v) & D_2(v) & \cdots & D_{l-1}(v) & D_l(v) \\ 1 & D_1(v-1) & \cdots & D_{l-2}(v-1) & D_{l-1}(v-1) \\ & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & D_1(v-l+2) & D_2(v-l+2) \\ \text{0} & & & 1 & D_1(v-l+1) \end{bmatrix}.$$

これはパラメータを入れ替えれば

$$C_l(v) = \det \begin{bmatrix} D_1(l-1-v) & D_2(l-1-v) & \cdots & D_{l-1}(l-1-v) & D_l(l-1-v) \\ 1 & D_1(l-2-v) & \cdots & D_{l-2}(l-2-v) & D_{l-1}(l-2-v) \\ & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & D_1(1-v) & D_2(1-v) \\ \text{0} & & & 1 & D_1(-v) \end{bmatrix}.$$

となるが，$C_k(u)$ と $D_k(u)$ の互いの表示は完全に対称であることも示している．

References

[A] A.C. Aitken, *Determinants and Matirces*, Oliver and Boyed, 1939.

[B] N. Bourbaki,, *Algèbre homologique (Éléments de Mathématique: Algèbre Chapitre 10)*, Masson, 1980.

[Ca1] A. Capelli, *Über die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen*, Math. Ann. **29** (1887), 331–338.

[Ca2] ———, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37.

[Ge] I.M. Gelfand, *Center of the infinitesimal groups*, Mat. Sb. Nov. Ser. **26** (68) (1950), 103–112; English transl. in "Collected Papers" Vol. II, pp. 22–30.

[He] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis, vol 1*, Wiley, 1974.

[H1] R. Howe, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 539–570; *Erratum*, Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), 823.

[H2] ———, *Dual pairs in physics: Harmonic oscillators, photons, electrons, and singletons*, Lectures in Applied Math. vol. 21, 1985, pp. 179–207.

[HU] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.

[I1] M. Itoh, *Explicit Newton's formula for $\mathfrak{gl}_n$*, J. Alg. **208** (1998), 687–697.

[I2] ———, *Capelli elements for the orthogonal Lie algebras, preprint 1999.*

[IU] M. Itoh and T. Umeda, *On the central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras, preprint 1999.*

[KW] K. Kinoshita and M. Wakayama, *Explicit Capelli identities for skew symmeteric matrices, preprint 1998.*

[Kz] J-L. Koszul, *Les algèbre de Lie graduée de type* $\mathfrak{sl}(n,1)$ *et l'opérateur de A. Capelli*, C.R. Acad. Sc. Paris **292** (1981), 139–141.

[M1] A. Molev, *Sklyanin determinant, Laplace operators, and characteristic identities for classical Lie algebras*, J. Math. Phys. **36** (1995), 923–943.

[M2] ______, *Factorial supersymmetric Schur functions and super Capelli identities*, Kirillov's Seminar on Representation Theory (ed. G.I. Olshanski), AMS Translations, Series 2, vol. 181 (1998), pp. 109–137.

[MN] A. Molev and M. Nazarov, *Capelli identities for classical Lie algebras*, Math. Ann. **313** (1999), 315–357.

[MNO] A. Molev, M. Nazarov and G. Olshanskii, *Yangians and classical Lie algebras*, Russian Math. Surveys **51** (1996), 205–282.

[Na1] M. Nazarov, *Quantum Berezinian and the classical Capelli identity*, Lett. Math. Phys. **21** (1991), 123–131.

[Na2] ______, *Yangians and Capelli identities*, Kirillov's Seminar on Representation Theory (ed. G.I. Olshanski), AMS Translations, Series 2, vol. 181 (1998), pp. 139–163.

[NUW] M. Noumi, T. Umeda and M. Wakayama, *A quantum analogue of the Capelli identity and an elementary differential calculus on* $GL_q(n)$, Duke Math. J. **76** (1994), 567–594.

[Ok] A. Okounkov, *Quantum immanants and higher Capelli identities*, Transformation Groups **1** (1996), 99–126.

[T1] H.W. Turnbull, *Theory of Equations*, Oliver and Boyed, 1939.

[T2] ______, *The Theory of Determinants, Matrices, and Invariants*, Dover, 1960.

[T3] ______, *Symmetric determinants and the Cayley and Capelli operators*, Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2 **8** (1948), 76–86.

[U1] T. Umeda, *The Capelli identities, a century after*, Sugaku **46** (1994), 206–227; (in Japanese); English transl. in "Selected Papers on Harmonic Analysis, Groups, and Invariants" (ed. by K. Nomizu), AMS Translations, Series 2, vol. 183 (1998), pp. 51–78,

[U2] ______, *Newton's formula for* $\mathfrak{gl}_n$, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 3169–3175.

[U3] ______, *On the proof of the Capelli identities, preprint 1997.*

[U4] ______, *On Turnbull identity for skew symmetric matrices*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (to appear).

[Wy] H. Weyl, *The Classical Groups, their Invariants and Representations*, Princeton Univ. Press, 1946.

[Z] D.P. Želobenko, *Compact Lie Groups and their Representations*, Transl. Math. Monographs **40** (Amer. Math. Soc.), 1973.