数理解析研究所講究録
1126巻 2000年 97-107

Characterizations of the completeness by usco open mappings

岡山大学理学部数学科　吉岡 巖 (Iwao Yoshioka)
MALTA大学　David Buhagiar

ある空間を，よりおもしろい空間のよい写像の像として特徴づけるという話は沢山あります。例えば，

X : k-space $\Longleftrightarrow$ 局所compact空間Yが存在して，XはYの商写像の像である。

この報告では，写像を多価写像にまで広げて考えて見ることです。写像$F : X \longrightarrow Y$が多価写像であるとは，各$y \in Y$に対して$F(y)$が空でない閉集合（一点でなくてもよい）であるとします。1969年，H. H. Wicke によって次のような結果が与えられています[9]。

定理．Hausdorff空間Xについて，次の条件は同値である。

(a) Xはpoint-countable typeである。

(b) metric空間Yが存在して，XはYのusco open多

価写像の像である.

以下，写像は全て多価写像とする。全ての空間は regular であるとす。

1. 定義

定義1 X の open covering $\{U_\alpha \mid \alpha \in A_n\}$ の列と写像 $\pi_n : A_{n+1} \longrightarrow A_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ が以下の条件を満たすとき，$\mathcal{S} = (\{U_\alpha \mid \alpha \in A_n\}_{n \geqq 0}, \pi_n)$ を X の open sieve という.

(i) $U_\alpha = X$ for $\forall \alpha \in A_0$,

(ii) $\bigcup \{U_\beta \mid \beta \in \pi_n^{-1}(\alpha)\} = U_\alpha$ for $\forall \alpha \in A_n$ $(n \geqq 0)$。

index α_n の列 $(\alpha_n)_{n \geqq 0}$ は，$\pi_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_n$ $(n \geqq 0)$ を満たすとき，π-chain という。$\mathcal{S}$ の π-chains 全体を $\Pi(\mathcal{S})$ で表わす [1, 2]。

定義2 X の open sieve $\mathcal{S} = (\{U_\alpha \mid \alpha \in A_n\}_{n \geqq 0}, \pi_n)$ において，$A \subset \Pi(\mathcal{S})$ が以下を満たすとき A は allowed であるという。

(i) $\bigcap_{n \geqq 0} U_{\alpha_n} \neq \phi$ for $\forall (\alpha_n) \in A$,

(ii) $x \in X$ ならば, $x \in \bigcap_{n \geqq 0} U_{\alpha_n}$ for some $(\alpha_n) \in A$,

(iii) $(\alpha_n) \in A$ ならば, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in U_{\alpha_k}$ に対して, $\exists (\beta_n) \in A \cap \langle \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k \rangle$, $x \in \bigcap_{n \geqq 0} U_{\beta_n}$.

(ここで, $\langle \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k \rangle = \{(\gamma_n) \in \Pi(\mathcal{S}) \mid \gamma_i = \alpha_i \ (0 \leqq i \leqq k)\}$)

さらに，$\forall(\alpha_n)\in A$ について，X の filter base $\mathfrak{F}$ が，$F_n\subset U_{\alpha_n}$ for some $F_n\in\mathfrak{F}$ $(n\geqq 0)$ を満たすならば $\phi\neq\cap\mathfrak{F}(=\cap\{F\mid F\in\mathfrak{F}\})$ であるとき，X は A-complete という。

定義 3　X の open sieve $\mathcal{S}$ が存在して，X が $\Pi(\mathcal{S})$-complete であるとき X は sieve complete [2] といい，allowed $A\subset\Pi(\mathcal{S})$ が存在て A-complete であるとき X は weakly sieve-p であるという。

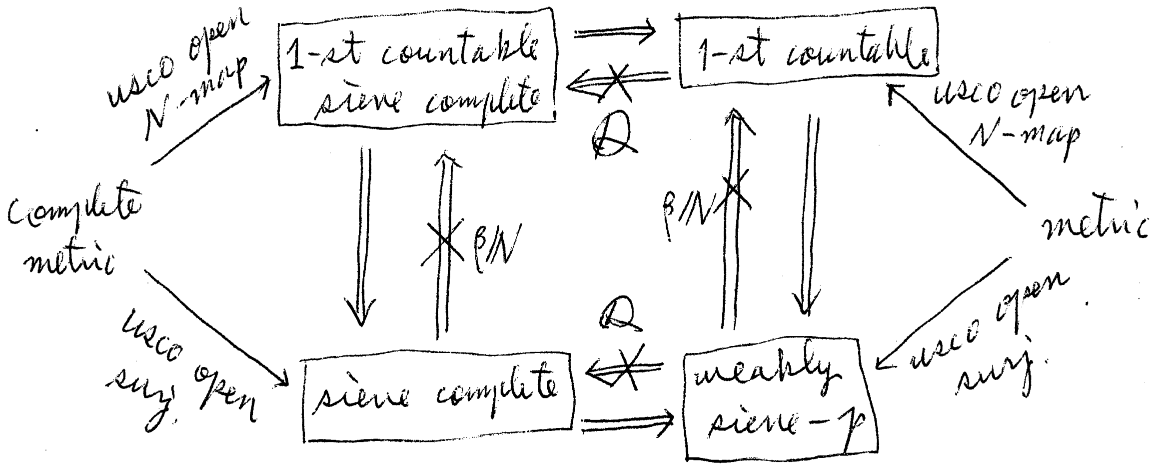
定義 4　X の部分集合 A が countable character であるとは，A が countable base $\{U_n\}_{n\geqq 1}$（即ち，各 U_n が A を含む開集合で，A を含む任意の開集合 O に対して U_m が存在して $A\subset U_m\subset O$ を満たす）を持つことをいう。X の各点 x に対して，x を含む compact set が存在して countable character であるとき，X は point-countable type であるという。

定義 5　写像 $F: X\longrightarrow Y$ について，$\forall x\in X$ に対して，$F(x)\subset V$: open in Y ならば x の開近傍 U が存在して $F(U)\subset V$ であるとき，F は u.s.c (=upper semi-continuous) という。また，F が u.s.c で，$\forall x\in X$ に対して $F(x)$ が compact であるとき F は usco であるという。$\forall y\in Y$ と

$y \in {}^{\forall}V$: open in Y に対して, $F(x) \subset V$ for some $x \in F^{-1}(y)$ であるとき F は <u>S-map</u> であるといい, ${}^{\forall}y \in Y$ に対して $x \in F^{-1}(y)$ と x の開近傍基 $(U_n(x))_{n \geq 1}$ が存在して $(F(U_n(x)))_{n \geq 1}$ が y の開近傍基になるとき F を <u>N-map</u> という。$F(X) = Y$ のとき F は <u>surjection</u> であるといい, X の開集合 U に対して, $F(U)$ が Y の開集合であるとき F は <u>open</u> であるという。ここに, $A \subset X$ のとき $\underline{F(A)} = \cup \{F(x) \mid x \in A\}$ を, $B \subset Y$ のとき, $\underline{F^{-1}(B)} = \{x \in X \mid F(x) \cap B \neq \phi\}$ を表わす。

2. 結果

以下, weakly sieve-p space, 1-st countable space, sieve complete space, 1-st countable sieve complete space は, complete metric space あるいは metric space の usco map の像として特徴づけることができることを示す。これ等の関係を下に図示する。



定理1　空間Xに対して，次の条件は同値である。

(a) Xは point-countable type である。

(b) 任意の$x \in X$とxの任意の開近傍Uに対して，countable character をもつ compact set Cで$x \in C \subset U$を満たすものが存在する。

(c) Xは weakly sieve-p である。

(d) metric space Yと usco open S-map $F: Y \longrightarrow X$が存在する。

(e) metric space Yと usco open surjection $F: Y \longrightarrow X$が存在する。

(f) point-countable type の空間Zと usco open surjection $F: Z \longrightarrow X$が存在する。

(g) weakly sieve-p space Zと usco open surjection $F: Z \longrightarrow X$が存在する。

定義6　写像$F: X \longrightarrow Y$は次の条件を満たすとき，<u>tri-quotient</u>という[2]。

Xの開集合Uに対してYの開集合U^*を定める対応が存在して(i)〜(iv)を満たす。

(i) $U^* \subset F(U)$

(ii) $X^* = Y$

(iii) $U \subset V \Rightarrow U^* \subset V^*$

(iv) $y \in U^*$で，Xの開集合からなる$U \cap F^{-1}(y)$のcovering $\mathcal{W}$（即ち，$\bigcup\{W \mid W \in \mathcal{W}\} \supset U \cap F^{-1}(y)$）に対して，$\mathcal{W}$の有限個の元$W_1, \ldots, W_n$が存在して$y \in (W_1 \cup \cdots \cup W_n)^*$。

定理２　空間Xに対して，次の条件は同値である。

(a) Xはsieve completeである。

(b) Xのopen sieve $\mathcal{S} = (\{U_\alpha \mid \alpha \in A_n\}_{n \geq 0}, \pi_n)$で$\Pi(\mathcal{S})$-completeなものが存在して，任意の$x \in X$と$x$の任意の開近傍$U$に対して$(\alpha_n) \in \Pi(\mathcal{S})$が存在して$x \in \bigcap_{n \geq 0} U_{\alpha_n} \subset U$を満たす。

(c) complete metric space Yとusco open $\mathcal{S}$-map $F : Y \longrightarrow X$が存在する。

(d) complete metric space Yとusco open surjection $F : Y \longrightarrow X$が存在する。

(e) sieve complete space Zとusco tri-quotient map $F : Z \longrightarrow X$が存在する。

注意(1) Čech-complete $\Rightarrow$ sieve completeは成立する。しかし，sieve completeであるがČech-completeでない例は（[　], Ex. 9.1）に与えられている。

(2) βNはsieve completeであるが，いかなるmetric

space の open continuous single-valued map の像にもならない。

(3) $\mathbb{R} \supset I = [0, 1]$ に対して，$F : I \longrightarrow I$ を $F(t) = I$ $(t \in I)$ で与えるとき F は usco open surjection であるが S-map でない。

(4) $Y = \mathbb{Q}$ (rationals) with discrete topology, $X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ とし，$F : Y \longrightarrow X$ を $F(y) = \{x \in X \mid y-1 < x < y+1\}$ で与えるとき，F は u.s.c. open surjection であるが X は sieve complete でない。このことは，complete metric space の u.s.c open surjection による像は必ずしも sieve complete でないことを示す。

定理3　Hausdorff 空間 X に対して，次の条件は同値である。

(a) X は 1-st countable である。

(b) X の open sieve $\mathcal{S} = (\{U_\alpha \mid \alpha \in A_n\}_{n \geq 0}, \pi_n)$ と allowed $A \subset \Pi(\mathcal{S})$ が存在して，X は A-complete かつ任意の $x \in X$ に対して $(\alpha_n) \in A$ が存在して $(U_{\alpha_n})_{n \geq 0}$ は x の開近傍基である。

(c) metric space Y と open continuous single-valued map $f : Y \longrightarrow X$ が存在する。

(d) metric space Y と usco open N-map $F : Y \longrightarrow X$ が存在する。

(e) 1-st countable space Z と usco open $\mathcal{N}$-map $F: Z \to X$ が存在する。

定理4　空間Xに対して，次の条件は同値である。

(a) Xは1-st countable sieve completeである。

(b) Xのopen sieve $\mathcal{S}=(\{U_\alpha \mid \alpha\in A_n\}_{n\geq 0}, \pi_n)$で$\Pi(\mathcal{S})$-completeなものが存在して，任意の$x\in X$に対して$(\alpha_n)\in\Pi(\mathcal{S})$が存在して$(U_{\alpha_n})_{n\geq 0}$は$x$の開近傍基である。

(c) complete metric space Y と usco open $\mathcal{N}$-map $F: Y \to X$ が存在する。

(d) 1-st countable sieve complete space Z と usco open $\mathcal{N}$-map $F: Z \to X$ が存在する。

3　結び

(1) 2節で現れた空間と他のよく知られた空間の関係。

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Moore space} \arrow[d] & p\text{-space (Arhangel'ski\u{i})} \arrow[d] \\
\text{Čech-complete} \arrow[dr] & \text{monotonically developable } [1] \arrow[r] \arrow[d] & \text{monotonically } p\ [1] \arrow[d] \\
\lambda\text{-base}[3] = \lambda\text{-sieve}[1] \arrow[r] & \text{sieve complete} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[d, equal] & \text{weakly sieve-}p \\
 & \text{monotonically Čech-complete } [1] &
\end{tikzcd}
$$

Sorgenfrey line は weakly sieve-p であるが monotonically p でない。

(2) 定理1の証明の概略

(a) ⇔ (b) ⇔ (e) は Hausdorff 空間 X で成り立つことが Wicke [ ] により示されている。残りは (c) ⇒ (e) ⇒ (g) ⇒ (c), (e) ⇒ (f) ⇒ (a), (b) ⇒ (d) ⇒ (e) を示す。

(c) ⇒ (e) のために次の Lemma [2; Lemma 2.4] を示す。

Lemma $\mathcal{S}=(\{U_\alpha \mid \alpha\in A_n\}_{n\geq 0}, \pi_n)$ が X の open sieve ならば、次の条件を満たす open sieve $\mathcal{S}_1=(\{V_{\alpha,\lambda} \mid (\alpha,\lambda)\in A_n\times\Lambda_n\}_{n\geq 0}, \pi_n\times\varphi_n)$ (ここに, $\varphi_n:\Lambda_{n+1}\to\Lambda_n$: map) が存在する.

(i) $\overline{V_{\alpha,\lambda}}\subset U_\alpha$ for $^\forall\alpha\in A_n$ $(n\geq 0)$,

(ii) $(\alpha,\lambda)\in A_n\times\Lambda_n$ に対して, $(\beta,\mu)\in(\pi_n\times\varphi_n)^{-1}(\alpha,\lambda)$ ならば $\overline{V_{\beta,\mu}}\subset V_{\alpha,\lambda}$ $(n\geqq 0)$,

(iii) allowed $A\subset\Pi(\mathcal{S})$ に対して X が A-complete ならば, allowed $B\subset\Pi(\mathcal{S}_1)$ が存在して X は B-complete である。

(i), (ii) は [2] により, (iii) に対しては $B=\{(\alpha_n,\lambda_n)_{n\geq 0} \mid (\alpha_n)_{n\geq 0}\in A\}$ が条件を満たす。

(c) ⇒ (e): 上の Lemma より open sieve $\mathcal{S}=(\{U_\alpha$

$\{\alpha \in A_n\}_{n\geq 0}, \pi_n)$ と allowed $A \subset \Pi(S)$ が存在して，二つの条件

$\overline{U}_\beta \subset U_\alpha$ for $^\forall \beta \in \pi_n^{-1}(\alpha)$ $(n \geq 0)$，かつ X は A-complete

を満たす。ここで，A を discrete space A_n の直積空間 $\prod_{n\geq 0} A_n$ の部分空間として考えるならば A は $\dim A = 0$ な metric space である。次に，写像 $F: A \longrightarrow X$ を

$$F(\alpha) = \bigcap_{n\geq 0} U_{\alpha_n} = \bigcap_{n\geq 0} \overline{U}_{\alpha_n} \quad (A \ni \alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0})$$

で与えると (e) の条件は満たされる。

(e) $\Rightarrow$ (g)：X は weakly sieve-p になるから明らか。

(g) $\Rightarrow$ (c) は容易に示すことができる。

(e) $\Rightarrow$ (f)：X は point-countable type になるから明らか。

(f) $\Rightarrow$ (a) は容易に示すことができる。

(b) $\Rightarrow$ (d)：$T = \{X$ の空でない open sets 全体$\}$ に discrete topology を与えて，T^ω の部分空間として

$$A = \{(t_n)_{n\geq 1} \mid \text{(i) } t_1 \supset t_2 \supset \cdots, \text{(ii) } (t_n)_{n\geq 1} \text{ は，} X \text{ の空でない compact set の countable character}\}$$

を考える。次に，写像 $F: A \rightarrow X$ を

$$F(t) = \bigcap_{n\geq 1} t_n \quad (A \ni t = (t_n)_{n\geq 1})$$

で与えるならば (d) の条件を満たす。

(d) $\Rightarrow$ (e) は明らかである。

定理2，3，4 も類似の方法で示すことができる。

参考文献

(1) J. Chaber, M.M. Čoban, K. Nagami ; On monotonic generalizations of Moore spaces, Čech-complete spaces and p-spaces, Fund. Math. 84 (1974) 107-119.

(2) E. Michael ; Complete spaces and tri-quotient maps, Illinois Math. 21 (1977) 716-733.

(3) H. H. Wicke, J. M. Worrell, Jr. ; Open continuous mappings of spaces having bases of countable order, Duke. Math. Jour. 34 (1967) 255-271.

(4) H. H. Wicke ; On the Hausdorff open continuous images of Hausdorff paracompact p-spaces, Proc. of A.M.S. 22 (1969) 136-140.