京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

京都大学
KYOTO UNIVERSITY

Title	関数空間と${\rm k}_\mathbb{R}$-property (空間論及び幾何学的トポロジーの研究)
Author(s)	森下, 和彦; 坂本, 恵美
Citation	数理解析研究所講究録 (2000), 1126: 88-90
Issue Date	2000-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/63591
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

数理解析研究所講究録
1126巻 2000年 88-90

関数空間と $k_{\mathbb{R}}$-property

森下和彦 (Kazuhiko Morishita)
足利工業大学工学部
坂本恵美 (Megumi Sakamoto)
筑波大学大学院数学研究科

本稿では，特に断らない限り空間は全て Tychonoff とする．また記号 $C_p(X)$ をもって空間 X 上の実数値連続関数全体に各点収束位相を導入した空間をあらわすことにする．研究の発端となったのは次の定理であった．

定理 1 ([3]). 次は同値である．

(1) $C_p(X)$ が Fréchet である，
(2) $C_p(X)$ が sequential である，
(3) $C_p(X)$ が k-space である．

同時に，上の条件と同値となる空間 X についての条件も [3] によって得られているが，特に compact 空間に対しては次の定理がある．

定理 2 ([2]). compact 空間 X に対し，次は同値である．

(1) $C_p(X)$ が Fréchet である，
(2) X が scattered である．

ここで標題にある $k_{\mathbb{R}}$-property の定義をしよう．

定義 3. 空間 X が $k_{\mathbb{R}}$ であるとは，X 上の任意の k-continuous な実数値関数が連続となるときにいう．但し，X 上の写像 f が k-continuous であるとは，X の任意の compact subset K に対し，f の K への制限 $f|_K$ が K 上連続となることである．

明らかに，k-space は上の性質を充たす．しかしながら，$\mathbb{R}^{\omega_1}$ は $k_{\mathbb{R}}$ であるが k-space ではないことが知られており，$\mathbb{R}^{\omega_1}$ は 濃度 ω_1 の離散空間上の関数空間と考え得るので関数空間の範囲内でも 2 つの概念の間に gap が存在することになる．関数空間に対する結果としては，次の結果が知られている．

定理 4 (Morishita ([1] 参照)). Lindelöf かつ Čech-complete である空間 X に対し，次は同値である．

(1) $C_p(X)$ が Fréchet である，

(2) $C_p(X)$ が $k_{\mathbb{R}}$ である，

(3) X が scattered である．

Lindelöf かつ Čech-complete である空間族，また analytic spaces のいずれをも含む空間族として以下のものがある．

定義 5. 無理数の為す空間から X の compact subset 全体の為す集合に upper semi-continuous な写像が存在するとき，空間 X が K-analytic であると云う．

我々は次を示した．

定理 6. K-analytic space X に対し，次は同値である．

(1) $C_p(X)$ が Fréchet である，

(2) $C_p(X)$ が $k_{\mathbb{R}}$ である，

(3) $C_p(X)$ が k-group である，

(4) X は compact 自己稠密部分集合を含まない．

ここで位相群 G が k-group であるとは任意の位相群 H と，G から H への任意の k-continuous homomorphism が連続となるときに云う．$k_{\mathbb{R}}$ である位相群は k-group である．上記定理により，次の 2 つの系を得る．

系 7. X を完備距離化可能とする．$C_p(X)$ が $\mathrm{k}_{\mathbb{R}}$ ならば，X の任意の可算部分集合 A に対し，$\mathrm{cl}_X A$ が可算となる．

問題 8. X を完備距離化可能とする．X の任意の可算部分集合 A に対し，$\mathrm{cl}_X A$ が可算となるとき，$C_p(X)$ は $\mathrm{k}_{\mathbb{R}}$ となるか？

系 9. X を可分な距離化可能空間とする．$C_p(X)$ が $\mathrm{k}_{\mathbb{R}}$ ならば，X の任意の compact subset K に対し，K は可算となる．

問題 10. X を可分な距離化可能空間とする．X の任意の compact subset K に対し，K が可算となるとき，$C_p(X)$ は $\mathrm{k}_{\mathbb{R}}$ となるか？

参考文献

[1] A. V. Arhangel'skiĭ, *C_p-theory*, in; Recent Progress in General Topology (Ed. by M. Hušek and J. van Mill), North-Holland, 1992.

[2] J. Gerlits and Zs. Nagy, *Some properties of* $C(X)$, I, Top. Appl. 14 (1982), pp. 151-161.

[3] J. Gerlits, *Some properties of* $C(X)$, II, Top. Appl. 15 (1983), pp. 255-162.