

# 非因果的確率積分方程式とその数値解法について

小川 重義<sup>1</sup> (金沢大学工学部)

## 1 Fredholm 型確率積分方程式 - 既知の結果

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$  を確率空間、 $\dot{Z}(t)$  を Schwartz 空間  $S(R^d)$  上で定義された  $L^2(\Omega)$ -値の多次元パラメータの確率超過程とする。更に  $\dot{Z}$  は、 $S \ni u \rightarrow \langle \dot{Z}, u \rangle \in L^2(\Omega)$  が  $L^2$ -norm で連続であるものとする。この超過程、 $\dot{Z}(t)$ ,  $t \in D = [0, 1]^{\otimes d}$  によって駆動される数値確率場  $X(t)$  を定める方程式として、次のような Fredholm 型確率積分方程式を考える。

$$X(t) = \lambda \int_D K(t, s) X(s) d_\phi Z(s) + f(t), \tag{1}$$

ここに、 $K(t, s)$  は Hilbert-Schmidt 型の核であり、 $Z$  は  $Z(t) = \langle \dot{Z}, 1_{[0, x]} \rangle$  で定まる確率場とする。但し、 $R^d \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ , に対して、 $[0, x] = [0, x_1] \times [0, x_2] \times \dots \times [0, x_d]$ 。また、 $\int d_\phi Z$  は  $L^2(D)$  の c.o.n.s.  $\{\psi\}$  に関する非因果的確率積分 (cf.[3],[4],[5]) を表す。

本稿ではこのような積分方程式の数値近似解構成の可能性について考えてみたい。その為の準備も兼ねて、解の存在・一意性に関する筆者自身 ([6], [7],[8]) の結果を紹介しておく。以下、非因果的確率積分は適当に固定した c.o.n.s.  $\{\psi_n\}$  に関するものであるとし、そのことを式中に陽的に表すことは省略するものとしておく。また、関数の直交展開の基底として別に  $L^2(D)$  の c.o.n.s.  $\{\phi_n\}$  を使用するが、これは上の基底  $\{\psi_n\}$  と同じのものであっても良い。

### 1.1 Stochastic Fourier Transform

まず積分核  $K(t, s)$  は次の意味で「滑らか」とであると仮定する。

[仮定 1]  $l^2$  の正数列  $\{w_n\}$  が存在して  $L^2(D)$  の c.o.n.s.  $\{\phi_n(t)\}$  に関する  $K(t, s)$  の Fourier 係数  $k_{m,n} = \int_{D \times D} K(t, s) \phi_m(t) \phi_n(s) ds dt$  は条件、 $\{k'_{m,n}\} \in l^2 (P - a.s.)$ ,  $(k'_{m,n} = k_{m,n}/w_m w_n)$ , をみたす。

(用語 1) 上の [仮定 1] と次に挙げる [仮定 2] をみたす  $l^2$  の正数列  $\{w_n\}$  を admissible weight と呼ぶことにする。

<sup>1</sup>s.ogawa@t.kanazawa-u.ac.jp

[仮定2] c.o.n.s.  $\{\phi_n\}$  に対して、 $\gamma_{m,n} = \int_D \phi_m(t)\phi_n(t)dZ(t)$  とおくと、  
 $\{w_m w_n \gamma_{m,n}\} \in l^2$  (P-a.s.)。

(例1) .  $Z = \text{Brownian sheet}$  の場合、関数系  $\{\phi_n\}$  が  $D$  上で一様有界ならば  
 [仮定2] はみたされる。

定義1  $L^2$ -class の乱関数  $g(t, \omega)$  は次の条件を満たすとき、 $w$ -smooth であるということにする；

(t.1) 各  $n$  毎に  $\hat{g}_n = \int_D g(t, \omega)\phi_n(t)d_\psi Z(t)$  が存在して、 $\{w_n \hat{g}_n\} \in l^2$  (P-a.s.)。

(t.2)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_n \{w_n (\hat{g}_n - \int_D g(t, \omega)\phi_n(t)dZ_m^\psi(t))\}^2 = 0$ 、

但し、 $Z_m^\psi(t)$  は次で定められる  $Z$  の近似過程である。

$$Z_m^\psi(t) = \sum_{k \leq m} \langle \psi_k, \dot{Z} \rangle \int_{[0,x]} \psi_k(s) ds$$

以後、適当な admissible weight  $\{w_n\}$  について  $w$ -smooth となるような乱関数の全体を  $S$  で表すことにする。class  $S$  は積分核  $K(t, s)$  の滑らかさに依存して定まるものであることに注意しておく。

(例2) .  $(Z, \{\phi_n\})$  が例1で与えたものである時、 $L^2(D) \subset S$ . 実際この場合、 $L^2(D)$  の任意の関数に対して、仮定1をみたす  $l^2$  の正数列は全て admissible weight になる。

さて  $S$  class の乱関数  $X(t)$  に対して stochastic Fourier 係数とでも言うべき量  $\hat{X}_n = \int_D \phi_n(t)X(t)d_\psi Z(t)$ ,  $n \in N$ , を考える。適当な admissible weight  $\{w_n\}$  に対して条件  $\{w_n \hat{X}_n\} \in l^2$  (P-a.s.), をみたすはずであるから、次のような  $S$  から  $L^2(D \times \Omega)$  への線形変換を考えることができる；

定義2  $w$ -smooth な乱関数  $X(t)$  に対して

$$\mathcal{F}_w(X)(t, \omega) = \sum_n w_n \hat{X}_n \phi_n(t)$$

を stochastic Fourier transform という。

後 ((3) 式) で見るように方程式の  $S$ -class の解  $X$  はその stochastic Fourier 係数でもって決定されるから stochastic Fourier transform  $\mathcal{F}_w(X)(t, \omega)$  が求まれば解も構成できることになる。

## 1.2 解の存在と一意性

[定理 1] 積分核  $K(t, s)$  と c.o.n.s.  $\{\phi_n\}$  が仮定 1, 2 をみたし、適当な admissible weight  $\{w_n\}$  に関して付加項  $f(t, \omega)$  が滑らかであるとする (即ち、 $f \in \mathbf{S}$ )。

このとき、

- 1) 非因果的確率積分方程式 (1) が  $\mathbf{S}$ -級の解を持つことと、次の乱積分方程式 (random integral equation) (7)<sup>2</sup>

$$Y(t) = (\mathcal{F}_w f)(t) + \lambda \int_D \tilde{K}(t, s) Y(s) ds \quad (2)$$

が  $L^2$ -級の解を持つこととは同値であり、

- 2)  $\mathbf{S}$ -解  $X(t)$  と乱積分方程式 (7) の  $L^2$ -解  $Y(t)$  とは 1 対 1 に対応する。

但し、

$$\tilde{K}(t, s) = \sum_{m,n} \tilde{k}_{m,n} \phi_m(t) \phi_n(s), \quad \tilde{k}_{m,n} = w_m \sum_l w_l \gamma_{m,l} k'_{l,n}$$

また、

$$\gamma_{m,n} = \int_D \phi_m(t) \phi_n(t) dZ(t),$$

仮定 1, 2 より、 $\sum_{m,n} E\{\tilde{k}_{m,n}^2\} < \infty$  であることがわかる。従って、乱積分方程式 (7) は各  $\omega$  毎に Hilbert-Schmidt 核に関する積分方程式であるから通常理論 (Riesz-Schauder の) が適用できる。その結果として例えば次のような系が容易に得られる。

[系 1] 非因果的確率積分方程式 (1) が一意的な  $\mathbf{S}$ -級の解を持つための必要十分条件は、次の確率積分方程式が非自明な  $\mathbf{S}$ -級解を持たないことである：

$$X(t) = \lambda \int_D K(t, s) X(s) dZ(s) \quad .$$

更に、次の結果、

[系 2] 非因果的確率積分方程式 (1) は、高々可算個の例外を除き、殆ど全ての  $\lambda$  に対して確率 1 で、一意的な  $\mathbf{S}$ -級の解を持つ。

## 1.3 定理証明の概略

仮定 ;  $f \in \mathbf{S}$ , より適当な admissible weight  $\{w_n\}$  があって項  $f(t, \omega)$  は  $w$ -smooth である。このような weight を一つ固定する。

<sup>2</sup>(1) のように確率積分項を含む方程式と、単に積分核或いは外力項が乱関数であるもの (従って、parameter  $\omega$  を固定する毎に通常積分方程式になるもの) とはこのような呼称で区別しておきたい。

まず、 $w$ -smooth な解  $X$  が存在したとせよ。展開式  $K(t, s) = \sum_{m,n} k_{m,n} \phi_m(t) \phi_n(s)$  を方程式 (1) に代入し、前提 (t.2) を考慮して整理すれば、

$$X(t) = f(t) + \lambda \sum_{m,n} w_m w_n k'_{m,n} \phi_m(t) \hat{X}_n, \quad \hat{X}_n(\omega) = \int_D X(t) \phi_n(t) dZ(t). \quad (3)$$

上式両辺に  $\phi_l(t)$  を乗じて  $D$  上で確率積分をとり、仮定  $\{k'_{m,n}\} \in l^2$  を考慮して整理すれば、

$$\hat{X}_l = \hat{f}_l + \lambda \sum_{m,n} \gamma_{l,m} k'_{m,n} \hat{X}_n, \quad (\forall l \in N) \quad (4)$$

ここに、 $\hat{g}_n$  は  $S$  級乱関数  $g(t, \omega)$  の stochastic Fourier 係数を表している。

(4) を更に整理して、

$$w_l \hat{X}_l = w_l \hat{f}_l + \lambda \sum_{m,n} w_l w_m \gamma_{l,m} k'_{m,n} w_n \hat{X}_n \quad (5)$$

そこで、

$$\tilde{K}(t, s, \omega) = \sum_{l,n} w_l \left\{ \sum_m w_m \gamma_{l,m} k'_{m,n} \right\} \phi_l(t) \phi_n(s) \quad (6)$$

とおけば、上式 (5) より、 $X$  の stochastic Fourier 変換  $Y = (\mathcal{F}_w X)(t, \omega)$  は定理に述べるところの乱積分方程式 (7)

$$Y(t) = (\mathcal{F}_w f)(t) + \lambda \int_D \tilde{K}(t, s) Y(s) ds \quad (7)$$

の  $L^2$ -解であることがわかる。逆に、方程式 (7) が  $L^2$ -解  $Y$  を持ったとせよ。このとき  $\hat{X}'_n = (Y, \phi_n)/w_n$  とおけば、これらの量は関係式 (5) を経て方程式 (4) を満たすことがわかる。そこで、乱関数  $X'$  を

$$X'(t) = f(t) + \lambda \sum_{m,n} w_m w_n k'_{m,n} \phi_m(t) \hat{X}'_n$$

で与えれば、これが方程式 (1) の解になっていることが容易にわかる。 $S$ -級の解  $X$  は関係式 (3) により、その stochastic Fourier 係数から一意的に定められるので、固定された admissible weight  $\{w_n\}$  に対して smooth な解  $X$  と、その weight に対応する乱積分方程式 (7) の  $L^2$ -解  $Y$  とが 1 対 1 に対応することが示された。

証明を完結するには、上の  $w$ -smooth な解  $X$  は (もし存在すれば)  $S$ -級の解としても一意的であることを示す必要がある。それには、別の admissible weight  $\{v_n\}$  に関して  $v$ -smooth な解  $X^v$  は (もしあれば)  $X^w = X^v$  であることを示せばよいが、詳細は Ogawa ([8]) を見られたい。

## 2 有限次元近似

非因果的確率積分方程式 (stochastic integral equation) (1) の問題は、その線形性の故に、Hilbert-Schmidt 型の乱関数核をもつ通常の乱積分方程式 (random integral equation) を解くことに帰着された。従って雑に言えば、近似解構成の問題もそのような乱積分方程式について考えればよいことになる。「雑に」というのは、解析的な近似問題としてはそれでよからうが、数値近似解の構成にはもう少しきめ細かい考察が必要である、と言う意味である。実際、乱積分方程式の積分核  $\tilde{K}(t, s, \omega)$  は解析的な形が陽的に与えられているのではなく、3組のデータ ((i) 元の積分核  $K$  のフーリエ係数  $\{k_{m,n}\}$ , (ii) 確率変数列  $\{\gamma_{m,n}\}$ , (iii) 特定の admissible weight  $\{w_n\}$ ) によって構成的に記述されるものである。問題は (ii) の確率変数列のサンプル化可能性にある。統計的独立性があるわけでもないから、一般に無限個 (或いは、たとい有限個で切ったとしても) の  $\{\gamma_{m,n}, m, n \leq N < \infty\}$  の同時分布を知ることは難しい。しかし望みがないわけではない。

(例3) . 変数次元 = 1次元、 $Z = \text{Brownian motion}$  の場合、 $\{\phi_n\}$  として Haar 関数系をとる。近似次元数 (下記) を  $N$  とすれば、 $\gamma_{m,n}(\omega)$  は scale が  $2^{-N}$  程度の2進小区間  $[2^{-N}i, 2^{-N}(i+1)]$  上の Brown 運動  $Z$  の増分量の1次結合で構成できる。

上の注意に基づけば、有限次元法を適用するには核  $\tilde{K}$  の直交展開式ではなくて、定義式 (6) を見ながら、例えば次のようにするのが実際的であることがわかる：

適当に定められた誤差基準  $\epsilon$  に応じて、乱積分核  $\tilde{K}(t, s)$  の有限次元近似核  $\tilde{K}_\epsilon(t, s, \omega) = \sum_{l,n} w_l \{ \sum_m w_m \gamma_{l,m} k'_{m,n} \} \phi_l(t) \phi_n(s)$  の近似次元数  $N$  を、

$$E \int_{D \times D} |\tilde{K}(t, s) - \tilde{K}_\epsilon(t, s)|^2 dt ds \leq \epsilon$$

となるように定める。ついで、この近似核に対する乱積分方程式、

$$Y_\epsilon(t) = f(t) + \int_D \tilde{K}_\epsilon(t, s) Y_\epsilon(s) ds \quad (8)$$

を解けば良いが、これは衆知のように  $\{(Y_\epsilon, \phi_n)\}_{n=1}^N$  に関する  $N$ 元連立一次方程式を解くことに帰着されていく。

## 3 付録一非因果的問題と確率解析

本稿では確率場に対する非因果的確率積分方程式とその数値近似について、これまでの結果を紹介しました。こうした話題に余り馴染みのない読者の為に、付録として話

題の背景と問題点を手短かに説明しておきます。以下は以前どこかの研究会で発表した際  
の予稿原稿（に少し手を加えたもの）からの引用です。

1. **確率解析** 確率積（微）分方程式はその働きを単純に述べるならば、与えられた  
基本的な乱関数を別の関数に変換するものである。前者を「入力」、後者を「出力」と翻  
訳する世界では、これに関する理論はランダムな環境下での力学系（或は、システム）  
の挙動を表現する数学的枠組みを提供するものとして受け入れられ、いわゆる Itô 解析  
として、数理科学に広い応用分野を持つ理論に発展してきた。いや、そもそもの初めか  
ら言えば、Langevin 方程式の例にみる如く、それはそのような確率（統計）的現象を  
記述する手段として登場した経緯もあったはずである。しかし乍ら実際はそうした背景  
にかなり無頓着に、あくまでも「純粹」数学理論として発展した来たという印象が強い。  
それ故、応用数理の視点から見ればいろいろと問題点を含むものであることも早い時点  
から指摘されてきた。

主要な理由を2つほど挙げてみよう；

- (1) まず確率（微積分）解析においては古典解析における諸公式がそのままの形式で  
は成立しない。これは応用する側からすれば「慣れればいい」として簡単に割り  
切れる問題ではない。このことは、この確率解析の用語に従う限り、確率力学系に  
於ては ニュートン力学の諸形式が少なくともそのままの形では成立しないことを  
示しており、従って、この理論を借用する側はそれが提供する新しい言語がラン  
ダム現象を表現するのにどの程度に適切なものであるか否かを各々の応用分野に  
おける基準に従って検討しなければならない（のであるが、残念ながらこの問題  
が諸分野に於てそれほど意識されたと言うことはなかったのではないか？）。と  
ころで、古典解析に於ける形式を出来るだけ保存する枠組みとして提出されたの  
が 対称確率積分 (cf. Stratonovich-Fisk 積分、Ogawa [1] の  $I_{1/2}$  積分の総称)<sup>3</sup>  
であるが、ここに於て新たに現れたのが次の「因果性」の問題である。
- (2) 即ち、従来の確率解析では対象となり得る乱関数は基本的に、出発点である乱関  
数の履歴に関して因果的であるものに限られており、そしてこの制限は古典解析  
並の形式を保存するにさいして少なからず障害となる。筆者がこの問題点に最初  
に遭遇したのは確率偏微分方程式の研究 ([2], ついで [3]) に於てであったが、これ  
を確率解析における問題点として捉えているのは、1980年代後半に至るまで  
筆者を初めとして旧ソ連の研究者等ごく小数であった。さて、これが実際に障害  
となり得る事は、例えば多次元パラメーターをもつ乱関数を対象とする確率解析

<sup>3</sup>昨今は、往々にして Stratonovich 積分と云う雑な呼称で呼ばれる傾向がある

(Stochastic Calculus) を構築しようとするれば直ちに明らかになる。歴史的に観ればそもそも確率微分方程式は、Langevin 方程式を初めとして、その当初から拡散過程と言う非可逆な熱力学的現象を捉えるモデルとして現れた経緯があり、そしてそうした世界では、このような「因果性」は当然みたまされているものである為「因果性」の制限など問題となり得なかった、というところであろうか。ところが伊藤理論の目覚ましい成功の後、SDE はランダムな外乱の下にある力学系（或いは何らかのシステム）に対する数学モデルであることが無意識的に期待された時点で、Newton 力学と熱力学との折り合いという古典的問題（時間の一方向性）と共にここでいう統計的「因果性」の問題が再浮上せざるを得なかったのである。

2, 非因果的問題。 何を問題とするかに依るのは勿論であるが、因果性の制限はパラメーターの次元に関わらず障害となり得る。1次元の場合でも、(確率)微積分演算を逃えると言う立場から観れば種々の問題が起こる；例えば、

(a) 乱関数と白色雑音との合成積が扱えない。従って、白色雑音を入力として与えられた、確率線形系の応答を従来のように積分形で表すことができない。

(b) 上(1節)に挙げた、確率偏微分方程式論での問題というのは1次元パラメーターの乱関数に関するもので、Brown 粒子方程式の”Cauchy 問題を特性線の方法で解くこと”は「因果性の規定」に抵触すると言うことであった(Ogawa[4])。

(c) 端的に言えば、乱関数のパラメーターが「時間」から「位置」を表すものになれば問題が起こる。従って、一般に確率微積分方程式の境界値問題はこれに当たる。

最後の点をもう少し具体的に見るために次のような問題について考えよう。

$$\begin{cases} \left[ \frac{d}{dt} p(t, \omega) \frac{d}{dt} + q(t, \omega) \right] X(t, \omega) = X(t, \omega) \frac{d}{dt} Z(t, \omega) + h(t, \omega) \\ X(0, \omega) = x_0, X(1, \omega) = x_1, (0 \leq t \leq 1). \end{cases} \quad (9)$$

ここに、 $p(t, \omega), q(t, \omega), h(t, \omega), Z(t, \omega)$  ( $\omega \in \Omega$ )

は適当な確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上の実数値乱関数であり、特に  $Z(\cdot, \omega)$  としては、Brown 運動を想定している。従って、これは形式的なものである。

微分作用素  $\left[ \frac{d}{dt} p(t) \frac{d}{dt} + q(t) \right]$  と指定された境界条件に対応する Green 関数  $g(t, s, \omega)$

を用いて、古典解析におけると同様に、問題(9)を(形式的に)積分方程式に書き換えれば次の様な Fredholm 型方程式になる；

$$X(t, \omega) = \int_0^1 g(t, s, \omega) X(s) dZ(s) + f(t, \omega) \quad (10)$$

ここに、 $f(t, \omega) = \int_0^1 g(t, s, \omega)h(s, \omega)ds$ .

確率積分の項を非因果的積分の意味で取ることによれば、(形式的) 問題 (9) との関係は別として、方程式 (10) 自体は具体的に意味のあるものとなる。これをもう少し一般化して次のような形の積分方程式にたどり着く。

$$X(t, \omega) = f(t, \omega) + \lambda \int_0^1 K(t, s, \omega)X(s, \omega)dZ(s) + \beta \int_0^1 L(t, s, \omega)X(s, \omega)ds \quad (11)$$

(注) 方程式 (11) と (9) のような境界値問題との関係については Ogawa [7] を見られたい。

話を進めるために1次元パラメーターの場合から出発したが、多次元パラメーターの方程式に対する境界値問題も、形式的には(11)の形の積分方程式に帰着することを注意しておこう。方程式(11)の解の存在や一意性、数値近似解構成等の基本的問題に関する筆者の結果とについては文献[3], [5], [8]を参照されたい。

## 参考文献

- [1] Ogawa, S.; "On a Riemann definition of the stochastic integrals, I and II", *Proc. Japan Acad.*, 46, pp.153-156 & pp.157-161, (1970)
- [2] Ogawa, S.: "A partial differential equation including the white noise as coefficient", *ZW.verw.Geb.*, 28, pp.53-71, (1973)
- [3] Ogawa, S.: "Sur le produit direct du bruit blanc par lui-même", *C.R. Acad. Sci., Paris*, t.288, Série A, pp.359-362, (1979)
- [4] Ogawa, S.; "Quelques propriétés de l'intégrale stochastique du type noncausal", *J.J.Appl.Math.*, 2.1, (1981).
- [5] Ogawa, S.: "The stochastic integral of noncausal type as an extension of the symmetric integrals", *Japan J.Applied Math.*, (1984)
- [6] Ogawa, S.; "Topics in the theory of noncausal stochastic calculus", in *Proceeding of The Conference Diffusion Processes*, ed. by M.Pinsky (1989), Birkhäuser.
- [7] Ogawa, S.; "On the stochastic integral equation of Fredholm type", in *Waves and Patterns* (1986) Kinokuniya and North-Holland,
- [8] Ogawa, S.; "Stochastic integral equations for the random fields", *Séminaire de Probabilités*, 25, pp.324-339 (1991)