数理解析研究所講究録
1132 巻 2000 年 134-142

ブロックノルムを用いた多目的配置問題の有効解について

弘前大学 理工学部　金 正道 (Masamichi Kon)
福井工業大学 経営工学科　久志本 茂 (Shigeru Kushimoto)

Abstract

ブロックノルムを用いた多目的配置問題を考える。まず、この問題に関して有効解が真性有効解 [1] と同値であることを示す。次に、この問題の有効解を同じノルムを用いた minisum, minimax, fuzzy maximin 型配置問題の最適解によって特徴付ける。

1 はじめに

$\boldsymbol{R}^n$ に需要点が与えられたとき、新たに単一の施設を配置しようとする問題は単一施設配置問題と呼ばれる。この問題は通常、施設と需要点の間の距離を含む単一の目的関数をもつ最小化問題として定式化される。ℓ 個の需要点 $\boldsymbol{d}_i \in \boldsymbol{R}^n, i = 1, 2, \cdots, \ell$ と $\boldsymbol{R}^n$ 上定義されたノルム $\|\cdot\|$ が与えられていると仮定する。$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ を施設の位置を表す変数とする。このとき多目的配置問題 (MCP) は

$$\boldsymbol{f}_{\text{MCP}}(\boldsymbol{x}) \equiv (\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_1\|, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_2\|, \cdots, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_\ell\|)^T$$

を最小化する問題である。MCP は有効解または準有効解を求める問題である。$\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $\boldsymbol{f}_{\text{MCP}}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}_{\text{MCP}}(\boldsymbol{x}_0)$ かつ $\boldsymbol{f}_{\text{MCP}}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{f}_{\text{MCP}}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ が存在しないとき $\boldsymbol{x}_0$ を MCP の**有効解**といい $\boldsymbol{f}_{\text{MCP}}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{f}_{\text{MCP}}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ が存在しないとき $\boldsymbol{x}_0$ を MCP の**準有効解**という。これらの定義より各需要点は MCP の有効解であり MCP の有効解は MCP の準有効解である。MCP の他に

$$f_{\text{MSP}}(\boldsymbol{x}) \equiv \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i\|,$$

を最小化する minisum 型配置問題 (MSP) と

$$f_{\text{MMP}}(\boldsymbol{x}) \equiv \max\{\lambda_i \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i\| : i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}\},$$

を最小化する minimax 型配置問題 (MMP)，ここで λ_i は各 $\boldsymbol{d}_i, i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$ に対する正の重みである，および [8] において定式化された fuzzy maximin 型配置問題 (FMMP) を考える。[8] において MMP にファジィ概念を導入し、$\boldsymbol{R}^2$ において非対称直角距離を用いた FMMP が議論されている。

MCP, MSP, MMP におけるノルムをブロックノルムとする。ベクトル値凸計画問題の理論より、ある点が MCP の準有効解であるための必要十分条件はその点がある $\mathbf{o}$ でない $\boldsymbol{\lambda} \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell)^T \geq \mathbf{o}$ に対する MSP の最適解になることであり（ Lowe et al. [6]

の Theorem 1 参照)、MMP の任意の最適解は MCP の準有効解である。[3,4] において $n=2$ の場合についてのみ、ある点が MCP の有効解であるための必要十分条件はその点がある正の $\boldsymbol{\lambda}$ に対する MSP の最適解になることであり、MMP の少なくとも 1 つの最適解は MCP の有効解であることが示されている。本稿では、ブロックノルムを用いた MCP, MSP, MMP, FMMP を考える。まず、MCP に関して有効解が真性有効解と同値であることを示す。真性有効解は [1] において一般のベクトル値最小化あるいは最大化問題に対して導入された概念であり、それは有効解を制限したもので有効解より望ましい性質を持っている。次に、MCP の有効解を MSP, MMP, FMMP の最適解によって特徴付ける。

2 節において、真性有効解の性質を与える。3 節において、ブロックノルムの性質を与える。4 節において、MCP に関して有効解が真性有効解と同値であることを示し、MCP の有効解を MSP の最適解によって特徴付ける。5 節において、 MCP の有効解を MMP お最適解によって特徴付ける。最後に、6 節において MCP の有効解を FMMP の最適解によって特徴付ける。

2 真性有効解

本節では、真性有効解の性質を与える。

実数値関数 $f_i : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}, i=1,2,\cdots \ell$ に対して次のベクトル値最小化問題を考える。

$$
\text{(P)} \qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \equiv (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_\ell(\boldsymbol{x}))^T \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in Q \end{array}
$$

ここで Q は空でない $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合である。前節と同様に $\boldsymbol{x}_0 \in Q$ に対して $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ かつ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \in Q$ が存在しないとき $\boldsymbol{x}_0$ を (P) の**有効解**といい $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \in Q$ が存在しないとき $\boldsymbol{x}_0$ を (P) の**準有効解**という。

定義 1 ([1]) $\boldsymbol{x}_0 \in Q$ に対して $\boldsymbol{x}_0$ が (P) の有効解であり、かつ $f_i(\boldsymbol{x}) < f_i(\boldsymbol{x}_0)$ であるすべての $i \in \{1,2,\cdots,\ell\}$ および $\boldsymbol{x} \in Q$ に対して $f_j(\boldsymbol{x}_0) < f_j(\boldsymbol{x})$ を満たす $j \in \{1,2,\cdots,\ell\}$ および正数 M が存在し、

$$
\frac{f_i(\boldsymbol{x}_0) - f_i(\boldsymbol{x})}{f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{x}_0)} \leq M
$$

が成立するとき $\boldsymbol{x}_0$ を (P) の**真性有効解**という。

(P) の真性有効解に対して次のスカラー化された最小化問題の最適解による特徴付けが知られている。

$$
(\mathrm{P}_{\boldsymbol{\lambda}}) \qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f_i(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in Q \end{array}
$$

定理 1 ([1]) Q を $\boldsymbol{R}^n$ の空でない凸集合とし $f_i, i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$ を Q 上の凸関数とする。このとき $\boldsymbol{x}_0 \in Q$ が (P) の真性有効解であるための必要十分条件は $\boldsymbol{x}_0$ がある $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{o}$ に対する ($\mathrm{P}_{\boldsymbol{\lambda}}$) の最適解になることである。

次の定義において真性有効解を調べる上で有用な道具を準備する。

定義 2 Y を $\boldsymbol{R}^\ell$ の空でない部分集合とする。

(i) 集合

$$cone\, Y \equiv \{\lambda \boldsymbol{y} : \lambda \geq 0, \boldsymbol{y} \in Y\}$$

を Y によって**生成される錐**という [2] 。

(ii) $\boldsymbol{y}_0 \in Y$ に対して、集合

$$D(Y; \boldsymbol{y}_0) \equiv \{\boldsymbol{d} \in \boldsymbol{R}^\ell : \boldsymbol{y}_0 + \lambda \boldsymbol{d} \in Y \text{ for some } \lambda > 0\}$$

を Y の $\boldsymbol{y}_0$ における**射影錐**という [7] 。

補題 1 Y を $\boldsymbol{R}^\ell$ の空でない部分集合とする。$\boldsymbol{y}_0 \in Y$ に対して

$$D(Y; \boldsymbol{y}_0) = cone(Y - \{\boldsymbol{y}_0\})$$

となる。

補題 2 Y を $\boldsymbol{R}^\ell$ の空でない有界な凸多面体とし $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_s\} \subset \boldsymbol{R}^\ell$ を Y の有限基底とする。$\boldsymbol{y}_0 \in Y$ に対して

$$cone(Y - \{\boldsymbol{y}_0\}) = \mathcal{C}\{\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_0, \cdots, \boldsymbol{y}_s - \boldsymbol{y}_0\}$$

となる。ここで $\mathcal{C}\,\{\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_0, \cdots, \boldsymbol{y}_s - \boldsymbol{y}_0\} \equiv \left\{\sum_{j=1}^{s} \gamma_j (\boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{y}_0) : \gamma_j \geq 0, j \in \{1, 2, \cdots, s\}\right\}$ である。

次の定理は真性有効解に対するもう 1 つの特徴付けを与える。

定理 2 ([7]) $\boldsymbol{x}_0 \in Q$ が (P) の真性有効解であるための必要十分条件は

$$cl\ D(\boldsymbol{f}(Q) + \boldsymbol{R}^\ell_+; \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)) \bigcap \boldsymbol{R}^\ell_- = \{\mathbf{o}\}$$

となることである。ここで $\boldsymbol{R}^\ell_+ \equiv \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^\ell : \boldsymbol{y} \geq \mathbf{o}\}, \boldsymbol{R}^\ell_- \equiv \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^\ell : \boldsymbol{y} \leq \mathbf{o}\}$ であり $cl\, Y$ は $Y \subset \boldsymbol{R}^\ell$ の閉包である。

3 ブロックノルム

本節では、ブロックノルムの性質を与える。

定義3 ([11,12]) B は $\boldsymbol{R}^n$ の有界な凸多面体で原点に関して対称でその内部に原点を含むとする。$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ のブロックノルム $\|\boldsymbol{x}\|$ は次のように定義される。

$$\|\boldsymbol{x}\| \equiv \inf\{\lambda > 0 : \boldsymbol{x} \in \lambda B\}$$

以下、定義3における B が与えられていると仮定する。すなわち B によって定義されるブロックノルムが与えられている。B のすべての端点を $\boldsymbol{b}_j, j = 1, 2, \cdots, 2r$ とする。ここで $\boldsymbol{b}_{r+j'} = -\boldsymbol{b}_{j'}, j' = 1, 2, \cdots, r$ とする。このとき $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ のブロックノルムは次のようにも表すことができる [11,12] 。

$$(1) \qquad \|\boldsymbol{x}\| = \min\left\{\sum_{j=1}^{2r}\gamma_j : \boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{2r}\gamma_j \boldsymbol{b}_j, \gamma_j \geq 0, j \in \{1, 2, \cdots, 2r\}\right\}$$

以下、区分的線形凸関数を考える。実数値関数 $f : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}$ がある $k \in \boldsymbol{N}$，ここで $\boldsymbol{N}$ はすべての自然数の集合である，と $\boldsymbol{a}_j \in \boldsymbol{R}^n, b_j \in \boldsymbol{R}, j = 1, 2, \cdots, k$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = \max\{\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{x} + b_1, \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{x} + b_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k^T\boldsymbol{x} + b_k\}$$

と表せるとき f を**区分的線形凸関数**という。特に、ある $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n$ と $b \in \boldsymbol{R}$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + b$ と表せるとき f を**線形**（または **アフィン**）**関数**という。言いかえると、f が区分的線形凸関数であるための必要十分条件はそのエピグラフ $[f] \equiv \left\{\binom{\boldsymbol{x}}{y} \in \boldsymbol{R}^{n+1} : f(\boldsymbol{x}) \leq y, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n, y \in \boldsymbol{R}\right\}$ が $\boldsymbol{R}^{n+1}$ における凸多面体となることである [10] 。[10] において、区分的線形凸関数は**多面凸関数**と呼ばれている。

$f_i, i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$ を区分的線形凸関数とする。このとき、各 $f_i, i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$ はある $k_i \in \boldsymbol{N}$ と $\boldsymbol{a}_{ij} \in \boldsymbol{R}^n, b_{ij} \in \boldsymbol{R}, j = 1, 2, \cdots, k_i$ によって

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \max\{\boldsymbol{a}_{i1}^T\boldsymbol{x} + b_{i1}, \boldsymbol{a}_{i2}^T\boldsymbol{x} + b_{i2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{ik_i}^T\boldsymbol{x} + b_{ik_i}\}$$

と表せる。一般性を失うことなく、各 $i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$ と $\alpha \in \{1, 2, \cdots, k_i\}$ に対して $\boldsymbol{a}_{i\alpha}^T\boldsymbol{x}_0 + b_{i\alpha} > \boldsymbol{a}_{ij}^T\boldsymbol{x}_0 + b_{ij}$, $j \in \{1, 2, \cdots, k_i\}\backslash\{\alpha\}$ となる $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ が存在すると仮定する。例えば、もし $\boldsymbol{a}_{11}^T\boldsymbol{x} + b_{11} > \boldsymbol{a}_{1j}^T\boldsymbol{x} + b_{1j}$, $j \in \{2, 3, \cdots, k_1\}$ となる $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ が存在しないならば f_1 は $f_1(\boldsymbol{x}) = \max\{\boldsymbol{a}_{12}^T\boldsymbol{x} + b_{12}, \cdots, \boldsymbol{a}_{1k_1}^T\boldsymbol{x} + b_{1k_1}\}$ と表せることになる。これは $\boldsymbol{a}_{11}^T\boldsymbol{x} + b_{11}$ が f_1 の表現に対して冗長な式であることを意味している。

$$S_\alpha \equiv \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n : \boldsymbol{a}_{1\alpha}^T\boldsymbol{x} + b_{1\alpha} \geq \boldsymbol{a}_{1j}^T\boldsymbol{x} + b_{1j}, j \in \{1, 2, \cdots, k_1\}\backslash\{\alpha\}\}, \alpha = 1, 2, \cdots, k_1$$

とおくとこれらは $\boldsymbol{R}^n$ の凸多面体であり次の条件を満たす。

(a) $int\ S_\alpha \neq \emptyset, \alpha \in \{1, 2, \cdots, k_1\}$, ここで $int\ S$ は $S \subset \boldsymbol{R}^n$ の内部である。

(b) $(int\ S_\alpha) \bigcap (int\ S_\beta) = \emptyset, \alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in \{1, 2, \cdots, k_1\}$

(c) $\bigcup_{\alpha=1}^{k_1} S_\alpha = \boldsymbol{R}^n$

(d) f_1 は各 $S_\alpha, \alpha \in \{1, 2, \cdots, k_1\}$ 上線形である。

$S_\alpha, \alpha \in \{1, 2, \cdots, k_1\}$ が条件 (a)-(c) を満たすときそれらは条件 (A) を満たすという。同様に

$$T_\beta \equiv \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n : \boldsymbol{a}_{2\beta}^T \boldsymbol{x} + b_{2\beta} \geq \boldsymbol{a}_{2j}^T \boldsymbol{x} + b_{2j}, j \in \{1, 2, \cdots, k_2\} \backslash \{\beta\}\}, \beta = 1, 2, \cdots, k_2$$

とする。$\{U_1, U_2, \cdots, U_p\} \equiv \{S_\alpha \bigcap T_\beta : \alpha \in \{1, 2, \cdots, k_1\}, \beta \in \{1, 2, \cdots, k_2\}, int(S_\alpha \bigcap T_\beta) \neq \emptyset\}$ とおくと U_α, $\alpha \in \{1, 2, \cdots, p\}$ は条件 (A) を満たす。さらに、f_1, f_2 は各 $U_\alpha, \alpha \in \{1, 2, \cdots, p\}$ 上線形である。上の議論を続けると、ある $V_1, V_2, \cdots, V_q$ が存在して条件 (A) を満たし $f_i, i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$ は各 V_α, $\alpha \in \{1, 2, \cdots, q\}$ 上線形となることがわかる。

補題3 S を $\boldsymbol{R}^n$ の空でない凸多面体とし、$f_i, i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$ を線形とする。このとき $\boldsymbol{f}(S)$ は $\boldsymbol{R}^\ell$ の凸多面体となる。さらに、S が有界ならば $\boldsymbol{f}(S)$ も有界になる。

補題4 $f(\boldsymbol{x}) \equiv \|\boldsymbol{x}\|$ とすると

$$[f] = \mathcal{C}\left\{\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_j \\ 1 \end{pmatrix} : j \in \{1, 2, \cdots, 2r\}\right\}$$

となる。

補題4において f のエピグラフは $\boldsymbol{R}^{n+1}$ における凸多面体になるのでブロックノルム関数 $\|\cdot\| : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}$ は区分的線形凸関数である。

4 MCP と MSP の関係

本節では、MCP においては有効解と真性有効解が同値であることを示し、MCP の有効解を MSP の最適解によって特徴付ける。

まず、(P) と $(\mathrm{P}_{\boldsymbol{\lambda}})$ を考えて $f_i, i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$ が区分的線形凸関数で $Q = \boldsymbol{R}^n$ であるとき (P) において有効解と真性有効解が同値であることを示す。定理1より、それは $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ が (P) の有効解であるための必要十分条件は $\boldsymbol{x}_0$ がある $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{o}$ に対する $(\mathrm{P}_{\boldsymbol{\lambda}})$ の最適解になること意味する。

定理3 $f_i, i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$ が区分的線形凸関数で $Q = \boldsymbol{R}^n$ ならば $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ が (P) の有効解であるための必要十分条件は$\boldsymbol{x}_0$ が (P) の真性有効解になることである。

次に、MCP と MSP を考える。補題4より、各 $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i\|, i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$ は $\boldsymbol{x}$ に関して区分的線形凸関数である。定理1と3より次の系を得る。

系1 $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ に対して次は同値である。

(i) $\boldsymbol{x}_0$ は MCP の有効解である。

(ii) $\boldsymbol{x}_0$ は MCP の真性有効解である。

(iii) $\boldsymbol{x}_0$ はある $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{o}$ に対する MSP の最適解である。

5 MCP と MMP の関係

本節では、MCP の有効解を MMP の最適解によって特徴付ける。

まず、(P) と次の minimax 型の問題を考える。

$$(\mathrm{P}'_{\boldsymbol{\lambda}}) \qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & g(\boldsymbol{x}) \equiv \max\{\lambda_i f_i(\boldsymbol{x}) : i \in \{1,2,\cdots,\ell\}\} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in Q \end{array}$$

以下、$f_i, i \in \{1,2,\cdots,\ell\}$ は非負区分的線形凸関数であり $Q = \boldsymbol{R}^n$ と仮定する。任意に固定された $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{o}$ に対して $(\mathrm{P}'_{\boldsymbol{\lambda}})$ の最適解が存在し、任意の最適解は (P) の準有効解であることが容易に示される。さらに、次の定理を与える。

定理 4 $f_i, i \in \{1,2,\cdots,\ell\}$ が非負区分的線形凸関数であり $Q = \boldsymbol{R}^n$ ならば任意に固定された $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{o}$ に対する $(\mathrm{P}'_{\boldsymbol{\lambda}})$ の最適解で少なくとも 1 つの最適解は (P) の有効解である。

系 2 任意に固定された $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{o}$ に対する MMP の最適解で少なくとも 1 つの最適解は MCP の有効解である。

次に、系 2 を説明するために MCP と MMP の数値例を与える。

数値例

ブロックノルムが

$$B = \{(x_1, x_2)^T : |x_1| + |x_2| \leq 1\}$$

によって定義されているとする。このとき

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{MCP}}(\boldsymbol{x}) = (\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_1\|, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_2\|, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_3\|)^T$$

を最小化する MCP と

$$f_{\mathrm{MMP}}(\boldsymbol{x}) = \max\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i\| : i \in \{1,2,3\}\},$$

を最小化する MMP を考える。ここで $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$ であり

$$\boldsymbol{d}_1 = (0,2)^T, \boldsymbol{d}_2 = (2,0)^T, \boldsymbol{d}_3 = (0,0)^T$$

とする。この場合、$n = 2, \ell = 3, \lambda_i = 1, i = 1,2,3,$

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{MCP}}(\boldsymbol{x}) = (|x_1| + |x_2 - 2|, |x_1 - 2| + |x_2|, |x_1| + |x_2|)^T,$$

$$f_{\mathrm{MMP}}(\boldsymbol{x}) = \max\{|x_1| + |x_2 - 2|, |x_1 - 2| + |x_2|, |x_1| + |x_2|\}$$

である。このとき MMP のすべての最適解の集合は

$$\{\lambda(1,1)^T : 0 \leq \lambda \leq 1\} = \bigcap_{i=1}^{3} \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i\| \leq 2\}$$

となる。

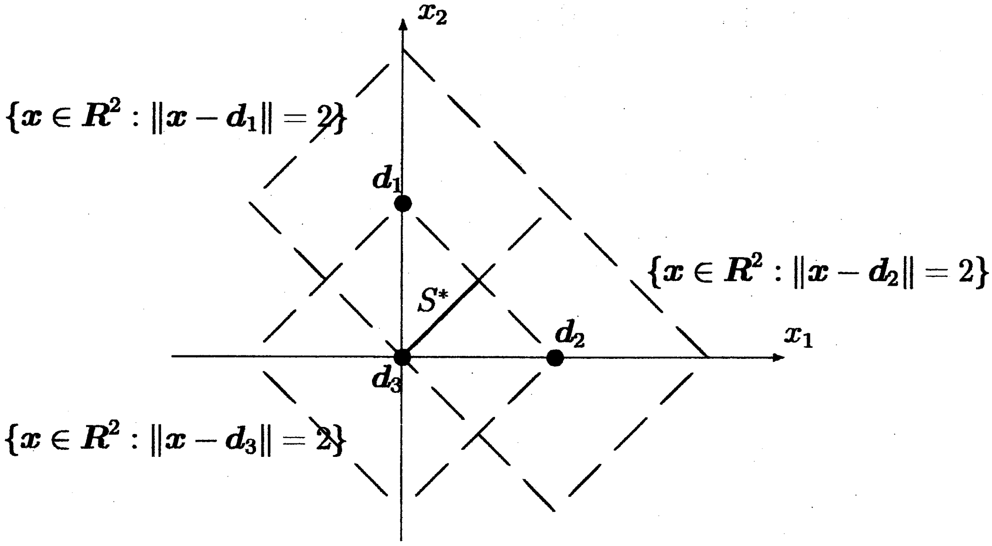

図１ S^* : MMP のすべての最適解の集合

このとき、有効解の定義より $(0,0)^T$ が MCP の有効解である。

6 MCP と FMMP の関係

本節では、MCP の有効解を FMMP の最適解によって特徴付ける。

$\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{o}$ に対して FMMP は

$$\min\{\mu_i(\lambda_i\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i\|) : i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}\}$$

を最大化する問題である。ここで

$$\mu_i(\lambda_i\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i\|) \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda_i\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i\| < L_i \\ h(\lambda_i\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i\|) & \text{if } L_i \leq \lambda_i\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i\| < L_i + e_i \\ 0 & \text{if } \lambda_i\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i\| \geq L_i + e_i \end{cases}$$

$i = 1, 2, \cdots, \ell$

$$h(\lambda_i\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i\|) \equiv 1 - \frac{1}{e_i}(\lambda_i\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i\| - L_i)$$

であり $L_i, e_i, i = 1, 2, \cdots, \ell$ は正の定数である。$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ と各 $i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$ に対してメンバーシップ関数のグレード$\mu_i(\lambda_i\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i\|)$ は需要点 $\boldsymbol{d}_i$ に対する満足度を意味する。

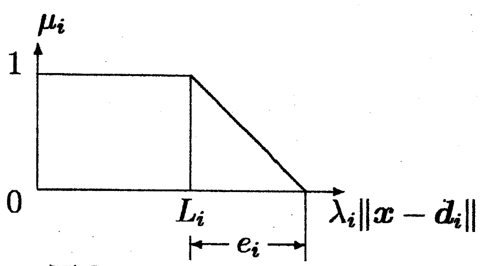

図2 メンバーシップ関数

FMMP の最適解が存在することが容易に示される。しかし、もし FMMP の最適値が 0 なら その最適解は意味がない。よって、以下、FMMP の最適値が正であることを仮定する。すなわち $\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n:\lambda_i\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_i\|<L_i+e_i, i\in\{1,2,\cdots,\ell\}\}\neq\emptyset$ であることを仮定する。FMMP は問題 (FMMP')

$$\begin{array}{ll}\text{maximize} & u\\ \text{subject to} & \lambda_i\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_i\|\leq L_i+(1-u)e_i, i=1,2,\cdots,\ell\end{array}$$

と次の意味で同値である。

(i) もし $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)$ が FMMP' の最適解ならば$\boldsymbol{x}^*$ は FMMP の最適解であり

$$\min\{\mu_i(\lambda_i\|\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{d}_i\|):i\in\{1,2,\cdots,\ell\}\}=\begin{cases}\boldsymbol{u}^* & \text{if } 0<\boldsymbol{u}^*\leq 1\\ 1 & \text{if } \boldsymbol{u}^*>1\end{cases}$$

となる。

(ii) FMMP のすべての最適解の集合は

$$\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n:\lambda_i\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_i\|\leq L_i+(1-\min\{1,u^*\})e_i, i\in\{1,2,\cdots,\ell\}\}$$

となる。

$\boldsymbol{u}'\equiv 1-\boldsymbol{u}$ とおくと FMMP' は次のように書ける。

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & \boldsymbol{u}'\\ \text{subject to} & \lambda_i\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_i\|\leq L_i+\boldsymbol{u}'e_i, i=1,2,\cdots,\ell\end{array}$$

(1) より これは次の線形計画問題に再び書きなおすことができる。

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & \boldsymbol{u}'\\ \text{subject to} & \lambda_i\sum_{j=1}^{2r}\gamma_{ij}\leq L_i+\boldsymbol{u}'e_i,\\ & \boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_i=\sum_{j=1}^{2r}\gamma_{ij}\boldsymbol{b}_j,\\ & \gamma_{ij}\geq 0,\\ & i=1,2,\cdots,\ell; j=1,2,\cdots,2r\end{array}$$

ここで γ_{ij} は追加された変数である。よって、もし B のすべての端点が与えられているなら上のような線形計画問題を解くことによって FMMP を解くことができる。

次の定理は MCP の有効解を FMMP の最適解によって特徴付ける。

定理5 u^* を任意に固定された $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{o}$ に対する FMMP' の最適値とする。

(i) もし $0 < u^* < 1$ ならば FMMP の任意の最適解は MCP の準有効解であり、FMMP の最適解で少なくとも 1 つの最適解は MCP の有効解である。

(ii) もし $u^* \geq 1$ ならば FMMP の最適解で少なくとも 1 つの最適解は MCP の有効解である。

定理5の (ii) において、もし $L_i, i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$ が十分大きいならば FMMP の最適解で MCP の準有効解でないものが存在することに注意。

参考文献

[1] A. M. Geoffrion, *Proper efficiency and the theory of vector maximization*, J. Math. Anal. Appl., **22** (1968), 618-630

[2] J. Jahn, *Introduction to the theory of nonlinear programming*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1996

[3] M. Kon, *Three types of location problems with the block norm*, Doctoral Thesis, Kanazawa University (1998)

[4] M. Kon, *Efficient solutions for multicriteria location problems under the block norm*, Mathematica Japonica, **47** (1998), 295-303

[5] S. Kushimoto, *The foundations for the optimization*(in Japanese), Morikita Syuppan, Japan, 1979

[6] T. J. Lowe, J. -F. Thisse, J. E. Ward and R. E. Wendell, *On efficient solutions to multiple objective mathematical programs*, Manage. Sci., **30** (1984), 1346-1349

[7] T. Maeda, *Multiobjective decision making theory and economic analysis* (in Japanese), Makino Syoten, Japan (1996)

[8] T. Matsutomi and H. Ishii, *Fuzzy facility location problem with asymmetric rectilinear distance* (in Japanese), Journal of Japan Society for Fuzzy Theory and Systems, **8** (1996), 57-64

[9] B. Pelegrin and F. R. Fernandez, *Determination of efficient points in multiple-objective location problems*, Nav. Res. Logist. q., **35** (1988), 697-705

[10] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1970)

[11] J. -F. Thisse, J. E. Ward and R. E. Wendell, *Some properties of location problems with block and round norms*, Oper. Res., **32** (1984), 1309-1327

[12] J. E. Ward and R. E. Wendell, *Using block norms for location modeling*, Oper. Res., **33** (1985), 1074-1090