

量子エノン写像のストークス現象

首藤 啓

東京都立大学 大学院理学研究科
shudo@phys.metro-u.ac.jp

池田 研介

立命館大学 理工学部
ahoo@mp0tw009.bkc.ritsumeai.ac.jp

1. 問題の物理的背景

以下の2次元離散力学系を考える。

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n - V'(q_n) \\ q_n + p_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

写像 (1) は、周期的に激力を受ける回転子、通称 kicked rotor (激力回転子) と呼ばれるハミルトニアン

$$H = H_0(p) + V(q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \quad (2)$$

の時間発展方程式として得られるもので、 $V(q)$ はそのときの摂動のポテンシャルを表す。とくに、 $V(q) = \sin q$ としたものは標準写像 (standard map) と呼ばれ、2 自由度ハミルトン系のポアンカレ写像のモデルとしてさまざまな観点から研究が進んでいる [1]。

この系の量子力学は、状態ベクトルの時間推進演算子 (プロパゲータ) を経路積分表示したもの、すなわち、

$$\langle q_n | U^n | q_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \cdots dq_{n-1} \exp[\eta S(q_0, q_1, \dots, q_n)], \quad (\eta = \frac{i}{\hbar}), \quad (3)$$

を考えることによって与えられる。(時間が離散的であることを反映して、通常経路積分における経路に対する汎関数積分は多重積分になる。ここでは、プロパゲータを運動量 q 表示でかいた。) ここで作用関数 $S(q_0, q_1, \dots, q_n)$ は、

$$S(q_0, q_1, \dots, q_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} (q_{j+1} - q_j)^2 - \sum_{j=1}^n V(q_j) \quad (4)$$

であり、運動量に対応するものを $p_j = q_{j+1} - q_j$ で定義すると、変分ゼロの条件 $\delta S = 0$ は離散力学系の時間発展 (1) を与える。

ここでは $V(q)$ として、

$$V(q) = -\frac{q}{3} - cq \quad (5)$$

と選んだものを考える。この $V(q)$ に対しては写像 (1) は、適当な線形変換によって、以下の多項式自己同型写像

$$\mathcal{H} : \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ y_n^2 - \delta x_n + a \end{pmatrix} \quad (6)$$

に移る。写像 (6) は、散逸系を含む、カオス系の研究を行うためにエノンによって導入されたものでエノン写像と呼ばれる [2] (ただしここでは、ハミルトン系のモデルとしての写像 (1) に興味があるために $|\delta| = 1$ の場合を考える)。また、2 次式 $y^2 + c$ の部分を一般に y に関する k 次の 1 変数多項式で置き換えたものは一般化エノン写像と呼ばれ、カオスを発生する 2 次元写像としては現在のところ、もっとも解析が進んでいる。とくに、任意の多項式自己同型写像は、(1) 力学系として自明な写像 (elementary map or affine map) か、さもなければ、(2) 有限個の一般化エノン写像の合成、のどちらかに共役になってしまうことが Friedland & Milnor によって証明されていることから [3]、エノン写像は、非可積分ハミルトン力学系を研究するにあたって、最も単純、かつ標準的な写像、ということになる。

非可積分な量子系で起こっているさまざまな現象を、古典論と対応させて議論する最も有効な方法は「半古典論」である。離散写像系の量子論は、プロパゲータ (3) を与えることによって構成されるが、この場合の半古典論とは、作用の変分 $\delta S = 0$ から得られる古典軌道をもって積分を近似すること、すなわち、多重積分を鞍点法を用いて評価することに他ならない。最低次の近似の範囲でプロパゲータは以下の半古典表示を得る [8] :

$$\langle q_n | U^n | q_0 \rangle \approx \sum_k A_k(q_n, q_0) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} S_k(q_n, q_0) - i\mu_k \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (7)$$

ここで、 $A_k(q_n, q_0)$ は各古典軌道の周りの量子揺らぎからくる振幅因子、 $S_k(q_n, q_0)$ は各古典軌道 k の履歴を作用汎関数に代入した古典作用、 μ_k は古典軌道のまわりのねじれを表す位相因子である。ここで和 k は、与えられた初期条件 q_0 、および終条件 q_n のもとで $\delta S = 0$ の条件を満足するすべての鞍点、すなわち、古典写像 (1) に関する和である。

さて、プロパゲータ (3) の絶対値 2 乗 $|\langle q_n | U^n | q_0 \rangle|^2$ は、物理的には、初期状態 q_0 から時間ステップ n を経た後の終状態 q_n への遷移確率を表す。ここで、 q_0 と q_n を結ぶ古典経路が実際に存在する場合、その古典経路を用いて (7) は近似的な遷移確率を与えるが、もし、 q_0 と q_n の選び方次第で、ステップ数 n の間に q_0 と q_n とを結ぶ古典経路が存在しなかったとすると、半古典的にはまったく遷移確率を評価できないことになる。しかし、古典軌道が到達できない領域にも、当然、量子論は遷移確率をもつことができ、もし半古典表式の和に寄与する古典軌道を実軌道に限るならば、そのような純量子力学的な効果を見積ることはできないことになる。しかしながら、鞍点条件 $\delta S = 0$ から得られる古典軌道を実の古典解のみでなく、複素領域の古典軌道まで許すことにすればその問題は解消される。すなわち、複素軌道の物理的な意味づけはさておき、形式的に鞍点条件 $\delta S = 0$ を満たす、すべての鞍点を積分の評価に用いることによって、実古典力学が到達不可能な領域への量子遷移を半古典的に

評価することが可能になる。ただし、いまの場合、始条件 q_0 、および終条件 q_n は観測量であるという縛りがあるため、

$$\text{Im } q_0 = 0, \quad \text{Im } q_n = 0 \quad (8)$$

という「境界条件」が付与された複素軌道を考えることになる。実古典軌道を伝って到達できない領域への量子力学的な遷移を広く「トンネル現象」と呼ぶことにすると、複素半古典論は量子トンネリング現象を（複素）古典力学の情報で表現する手段となる。通常、トンネル現象というと、ポテンシャル障壁が存在することによって、エネルギー的に越えることができない領域への波動効果による滲みだしのことを指すことが多いが、ここでは、やや意味を広げて、（実の）古典軌道が到達できない領域への量子遷移一般をトンネル現象と解釈することにする。このような広い意味でのトンネル現象はしばしば『動的トンネリング』と呼ばれる [4]。

このように、（複素）半古典的にトンネル確率を評価することは、(3) で与えられる多重積分の鞍点法を実行する作業に尽きるが、物理的には、鞍点条件を満足する複素古典軌道すべてが寄与軌道としての同等な資格をもつわけではない。各項の重みは、ほぼその古典作用の虚部の大きさによって決まり ((6) の振幅因子 A_k は作用虚部の差からくる絶対値の大小に比較するとその影響は小さい)、作用虚部が小さいものほど寄与としては重要になってくる。もちろん、考えている写像はカオスを発生するため、半古典表式 (6) に寄与する軌道は、ステップ数 n と共に指数関数的に増大する。最終的な目標は、ステップ数 n が十分大きい漸近的な領域で振る舞いであり、その観点から複素軌道のふるい分け、すなわち、

A. 各複素軌道の絶対値の大小を選別するルール

がこの問題での大きな課題のひとつになってくる。始状態と終状態での境界条件がついているとはいうものの、この問題は、純粹に考えている複素力学系の中で解決されるべき問題である [5]。詳細には立ち入らないが、(6) で与えた多項式自己同型写像の標準形であるエノン写像の場合、半古典作用の虚部が $n \rightarrow \infty$ で有界に留まる、という条件を満たす複素古典軌道は、エノン写像に対して定義されるジュリア集合によって十分良く近似できることを証明することができる [6, 7]。我々は、このようなジュリア集合を背景に起こるトンネル現象のことを「カオス的トンネル現象」と呼んでいる [8]。

一方、多重積分の鞍点の寄与・非寄与、という観点から当然問題になってくるのはストークス現象である。複素半古典プロパゲータを鞍点法で評価する際、始状態と終状態を満足する形式的に複素経路が見つかったとしても、それらがすべて最終的な寄与として残るわけではない。ストークス現象によって、しかるべき鞍点はその寄与から外す必要がある。このように、離散力学系の量子論を半古典的に扱うにあたって、

B. 多重積分のストークス現象の処理

の問題は避けて通ることはできない。以下でな、離散写像の量子プロパゲータ (6) から得られる多重積分のストークス現象を考える。

2. 高階微分方程式におけるストークス現象

ここでは、考える離散力学系 (1) がエノン写像であるときの量子プロパゲータを考える。問題にする多重積分をもう一度書くと、

$$I(q_0, q_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\eta S(q_0, q_1, \dots, q_n)\} dq_1 dq_2 \cdots q_{n-1} \quad (9)$$

ただし、

$$S(q_0, q_1, \dots, q_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} (q_{j+1} - q_j)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} (q_j^2 + c) \quad (10)$$

となる。 $n-1$ が離散力学系のステップ数に対応する。ここで、 q_0 は任意に選ぶことのできるパラメータ（写像の初期位置に対応する）である。

$n=2$ の積分は一重積分であり、かつ、被積分関数の肩が積分変数に対する 3 次式になることから、問題は Airy 積分のそれに帰着される。多重積分は $n=3$ から現れる。以下で具体的に見ていくように、多重積分のストークス現象では、一般の高階の微分方程式同様、ストークス線の交差問題が発生する。そこで、積分 (9) のストークス現象の様子を知るには、高階微分方程式と同様に、ストークス線の交差問題から発生する WKB 解の大域的な接続の様子を調べる必要が出てくる。

高階の微分方程式にストークス線に交差が起こることを指摘し、その対処法を従来の WKB 法の枠内で最初に議論したのは、Berk, Nevins & Roberts である [9]。Berk らは、ストークス線が交差する近傍において従来の局所的な接続公式をそのまま用いると、接続する経路のまわり方次第で結果が違ったものになることを示し、その矛盾を解消する対処療法として、“新しいストークス線 (new Stokes line)” の導入を提案した [9]。

Berk らの発見的議論と新しいストークス線導入の根拠を exact WKB 解析からの基礎付けを与えたのは、Aoki, Kawai & Takei である [10]。Aoki らは、微分方程式の特異性の伝搬に対する一般論から、新しいストークス線を考える以前に、まず考えるべき基本的な対象は“新しい転回点 (new turning point)”であることを指摘した。新しい転回点は、もともとの微分作用素のボレル変換の陪特性曲線の自己交差点として定義されるものであるが、その観点から、Berk らが新しいストークス線として導入したのも、新しい転回点から伸びるストークス線として自然に定義される。さらに Aoki らは、ある条件のもとで、高階の微分方程式にあらわれるストークス線上の接続にも、2 階の微分方程式の場合に確立された局所的な接続公式 (Voros の接続公式) が適用可能なこと、および、ストークス線の交差点近傍での局所的な接続のルールに対するひとつの Ansatz を示した [10]。

以上の議論を手がかりに多重積分 (9) のストークス現象を考える。最初に高階微分方程式の exact WKB 解析との対応をみるために、2 重積分 (9) の満たす微分方程式を考える [11]：

$$HI(q_0, q_3) = 0 \quad (11)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
H &\equiv D_3^4 - \eta^4(q_3 + 1)D_3^3 + \eta^2 2(3q_3^2 + 5q_3 + 4 - 3\eta^{-1})D_3^2 \\
&\quad - \eta^3(4q_3^3 + 8q_3^2 + 12q_3 + 7 - \eta^{-1}2(6q_3 + 5))D_3 \\
&\quad + \eta^4(q_4 + 2q_3^3 + 5q_3^2 + 3q_3 - q_0 + 4 - \eta^{-1}2(3q_3^2 + 4q_3 + 3) + \eta^{-2}3
\end{aligned} \tag{12}$$

ただし、 $D_3 = \partial/\partial q_3$ である。 H のボレル変換 \hat{H} は $F = \partial/\partial y$ とすると、

$$\begin{aligned}
\hat{H} &\equiv D_3^4 - 4(q_3 + 1)D_3^3 F + 2(3q_3^2 + 5q_3 + 4)D^2 F^2 - 6D^2 F \\
&\quad - (4q_3^3 + 8q_3^2 + 12q_3 + 7)DF^3 + 2(6q_3 + 5)DF^2 \\
&\quad + (q_3^4 + 2q_3^3 + 5q_3^2 + 3q_3 - q_0 + 4)F^4 - 2(3q_3^2 + 4q_3 + 3)F^3 + 3F^2
\end{aligned} \tag{13}$$

となる。さらに、 \hat{H} の陪特性微分方程式は、

$$\begin{aligned}
\dot{q}_3 &= 4\xi^3 - 12(q_3 + 1)\xi^2\theta + 4(q_3^2 + 5q_3 + 4)\xi\theta^2 - (4q_3^3 + 8q_3^2 + 12q_3 + 7)\theta^3 \\
\dot{q}_0 &= 0 \\
\dot{y} &= -4(q_3 + 1)\xi^3 + 4(3q_3^2 + 5q_3 + 4)\xi^2\theta - 3(4q_3^3 + 8q_3^2 + 16q_3 + 7)\xi\theta^2 \\
&\quad + 4(q_3^4 + 2q_3^3 + 5q_3^2 + 3q_3 - q_0 + 4)\theta^3 \\
\dot{\xi} &= 4\xi^3\theta - 2(6q_3 + 5)\xi^2\theta^2 + (12q_3^2 + 16q_3 + 12)\xi\theta^3 - (4q_3^3 + 6q_3^2 + 10q_3 + 3)\theta^4 \\
\dot{\zeta} &= \theta^4 \\
\dot{\theta} &= 0
\end{aligned} \tag{14}$$

で与えられる。

さて、いま作用の変分条件 $\delta S = 0$ は、

$$\begin{aligned}
q_{i+1} &= q_i + p_i & (i = 0, 1, 2) \\
p_{i+1} &= p_i - V'(q_i) & (i = 0, 1)
\end{aligned} \tag{15}$$

であるが、初期条件 q_0, p_0 の関数として解 $p_2 = p_2(q_0, p_0)$, $q_3 = q_3(q_0, p_0)$ を表すと、上記、陪特性方程式の各変数との対応において、 $\xi \leftrightarrow p_2$, $y \leftrightarrow -S$, $t \leftrightarrow -p_0$ の読み変えによって、力学系 (15) の解 $p_2 = p(q_0, p_0)$, $q_3 = q_3(q_0, p_0)$ は、陪特性方程式 (14) の解になっていることが確かめられる。つまり、初期座標 q_0 を固定し、終状態 p_2, q_3 を $p_0 = q_1 - q_0$ の関数とみなした運動方程式 (15) の解は同時に、陪特性多項式の解になっている、ということである。

このことから、多重積分 (9) の問題 ($n = 3$ の場合) における転回点、ストークス線を以下で定義することができよう。すなわち、

- q_3 面上、 q_3^T が転回点であるとは、

$$S(q_3^T, q_2^{(i)}, q_1^{(i)}, q_0) = S(q_3^T, q_2^{(j)}, q_1^{(j)}, q_0) \tag{16}$$

を満たすことを言う。ただし、 $(q_2^{(i)}, q_1^{(i)})$ ($1 \leq i \leq 4$) は離散写像 (15) の解である。また、従来の転回点と新しい展開点とは、

$$\begin{aligned} (q_2^{(i)}, q_1^{(i)}) = (q_2^{(j)}, q_1^{(j)}) &\implies q_3^T \text{ は通常}の\text{展開点} \\ (q_2^{(i)}, q_1^{(i)}) \neq (q_2^{(j)}, q_1^{(j)}) &\implies q_3^T \text{ は新しい展開点} \end{aligned}$$

によって区別される。同様にストークス線も、

- q_3 面上、転回点 q_3^T から伸びる

$$\text{Im } S(q_3, q_2^{(i)}, q_1^{(i)}, q_0) = \text{Im } S(q_3, q_2^{(j)}, q_1^{(j)}, q_0) \quad (17)$$

を満たす曲線がストークス線になる。通常の意味での展開点から伸びるストークス線は従来のストークス線であり、新しいストークス線から伸びるストークス線が新しいストークス線に対応することは言うまでもない。

3. 量子エノン写像のストークス幾何

以上の定義のもとに、 $n=3$ の場合についての転回点、およびストークス線を描くと、高階微分方程式と同様、ストークス線の交差発生する。2重積分 (9) はパラメータ q_0 をもっており、様々な q_0 の値に対して、異なる転回点、ストークス線の配置が得られる。その一例が図 1 である。今の場合、2本の従来のストークス線の交差に加えて、 $\text{Im } q_3 = 0$ 軸に対する対称性があることから、転回点、ストークス線の配置に、通常ストークス線3本が1点で交差するような場合が出現する。このような場合、必然的にその交差点を3本の新しいストークス線 (new Stokes lines) が通過することになり、結果、交差点を都合を6本のストークス線が通ることになる。

それぞれのストークス線上での WKB 解の接続を考えるに当たって、まず各転回点近傍では、以下の接続ルールを適用する：

1. 通常転回点の近傍は局所的には Airy 型であり、その接続公式としては、いわゆる Voros の接続公式を適用する。(3階の微分方程式の場合、Aoki らによってその正当性が simple discriminant condition のもとで証明されている [10])。
2. 新しい転回点の近傍では、ストークス線上では接続を起こさない [10, 12]。

一方、通常ストークス線2本の交差が起こきたとき、交差点を囲むパラメータ空間上の経路内には特異点が存在せず、経路を周回したときの WKB 解の一価性から、そのまわりの接続係数間に一定の関係式が得られる [13]。同様な関係式は、図 1 のような [3本の正規ストークス線 + 3本の新しいストークス線の交差] が起こっている場合にも拡張することができる。

当然、そのための指導原理は、2本の交差問題の場合と同様、交差点を周回する経路に対する一価性条件である [14]。

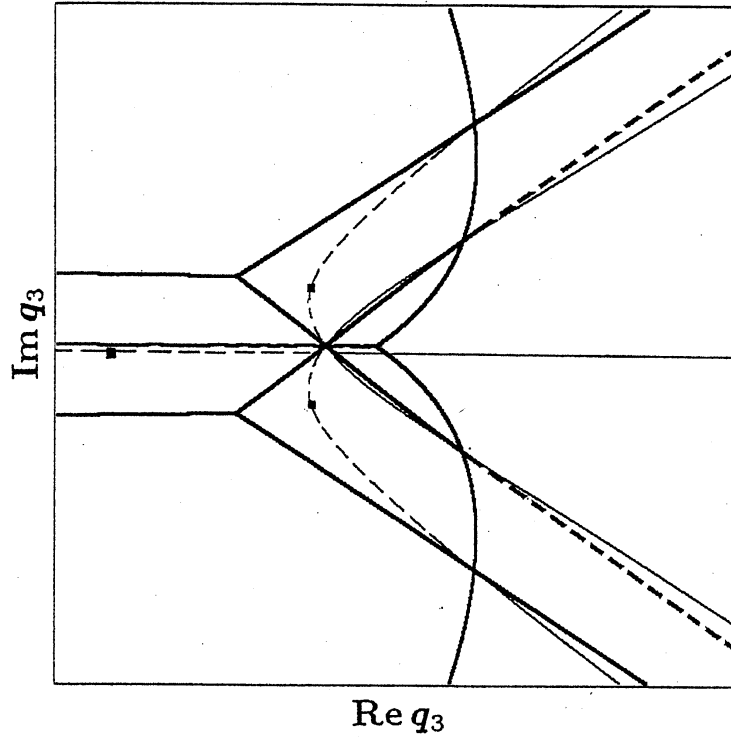


図1 2-ステップエノン写像 ($n = 3$) のストークス幾何 ($q_0 = 0$)。実線、破線は、それぞれストークス現象を起こすストークス線、起こさないストークス線を表す。太線は通常のストークス線、細線は新しいストークス線。四角の点は新しい転回点を示す。 $\text{Im} q_3 = 0$ 上で、通常のストークス線と新しいストークス線が重なっている。

以上が、交差点の近傍の接続に対する局所的な要請であるが、与えられたストークス線のグラフは、これら局所的条件を満たしつつ大域的にも矛盾のないものになっている必要があり、原理的にはそれらは独立な問題である。しかし実際には、図1で与えられた3重の交差点を含むストークスグラフに対して、具体的に以上の局所ルールを順次適用していくと、接続を起こすストークス線（実線）と、起こさないストークス線（破線）とは自動的に余すところなく決定されてしまう。つまり、局所的ルールだけで決定された、ストークス幾何は一意的なものとなる。興味深いのは、ストークス線が破線になるのが、必ずしも新しいストークス線が、いわゆる ‘ordered crossing point’ で交差を起こすときだけではなく、通常の転回点から伸びる従来のストークス線も、大域的な要請次第では接続を起こさなくなることである（図1参照）。

パラメータ q_0 を動かすことによって、ストークスグラフの交差パターンにはさまざまなものがあらわれるが、局所ルールで順次決定されたストークス線の有効・非有効（ストークス現象を起こすか起こさないか）は、いずれの場合も曖昧さなく一意的に決定される [14]。

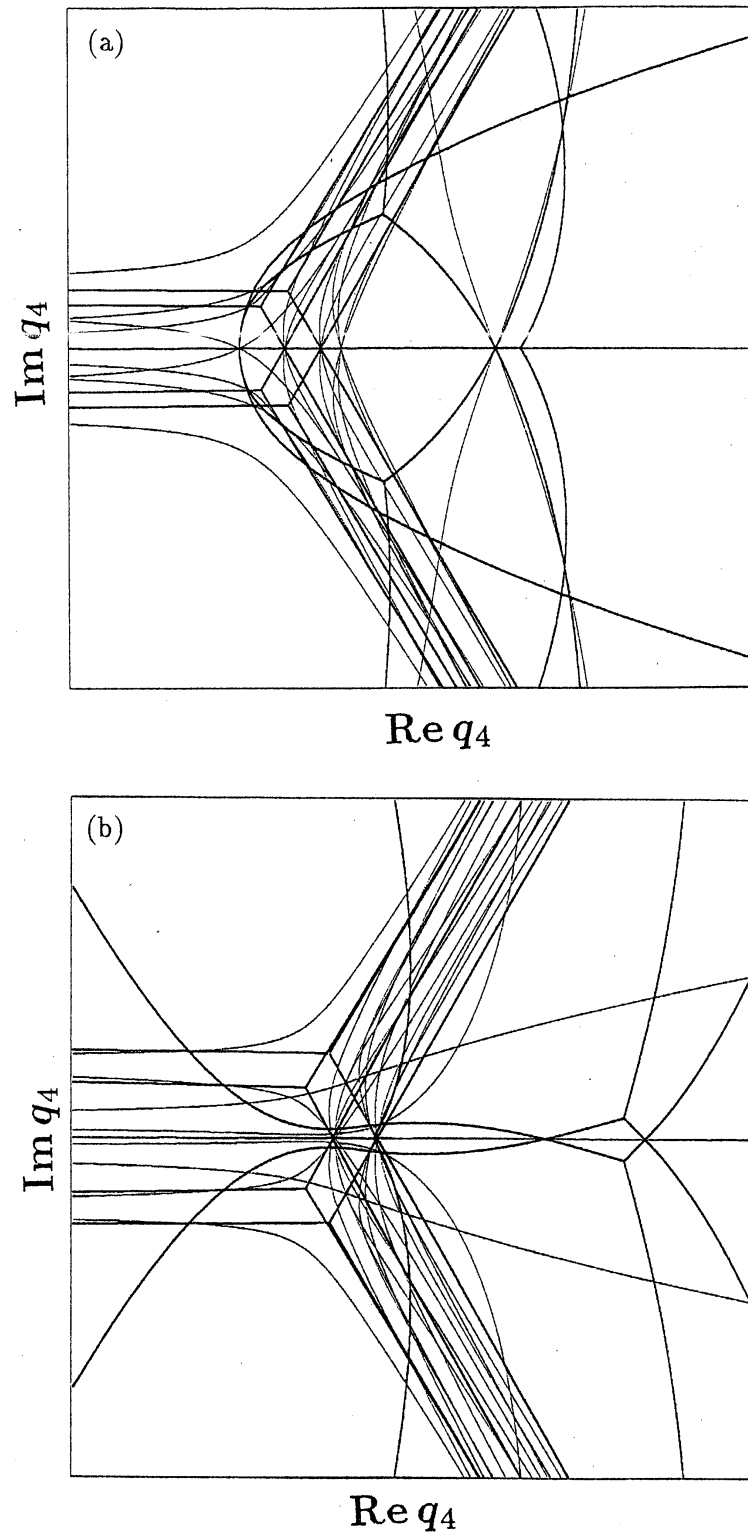


図 2 2-ステップエノン写像 ($n=4$) のストークス幾何. それぞれのパラメータは, (a) $q_0 = 0$, (b) $q_0 = 1.4$. ストークス線を起こす部分と起こさない部分の区別は示していない. 太線は通常のストークス線, 細線は新しいストークス線. $\text{Im} q_4 = 0$ 上で, 4本のストークス線が重なっている.

$n = 4$ (3重積分) の場合も、転回点・ストークス線に対する上記の定義を自動的に拡張し、ストークスグラフの様子を描くことができる。ここでは、そのなかの2通りの q_0 の値に対してストークスグラフを示す(図2)。 $n = 4$ では鞍点の数は8個になり、通常の意味でのストークス線42本、新しいストークス線21本で合計63本のストークス線が現れる。とくに、 $\text{Im } q_4 = 0$ 上に、1本の通常のストークス線、3本の新しいストークス線が縮退しており、 $n = 3$ の場合と同様、3重交差が起こる(3本の正規ストークス線+3本の新しいストークス線の組み合わせ。それ以外のストークス線も見かけ上同じ点を通るが、当該のストークス現象には無関係になっている)。

図2中では実線・破線は示していないが、いずれのグラフにおいても、やはり上記の局所的接続ルールを各転回点、交差点のまわりで適用するだけで、ストークス線の各部分で順次決まっていき、ストークス現象を起こすか否かの判定は上と同様、一意的である。

ところで、具体的に交差点のまわりの接続ルールを適用していく際、通常のストークス線が2本交差する場合に関しては、以下の簡約ルールが有用である(3本のストークス線の交差の場合にも同様のものが得られるがここでは省略する)。

ストークス線の有効・非有効を延長するルール

1. 交差点より手前にある各ストークス線(3本)の有効・非有効が予め決まっているば、それぞれのストークス線の交差点を越えた反対側の有効・非有効は一意的に決定される。
2. (1・2)線、(2・3)線は交差点の前後で有効・非有効を入れ換えることはない。
3. (1・2)線、(2・3)線のいずれかがストークス現象をおこさないことがわかっているときは、(1・3)線は交差点を越えてその有効性を反転させない。

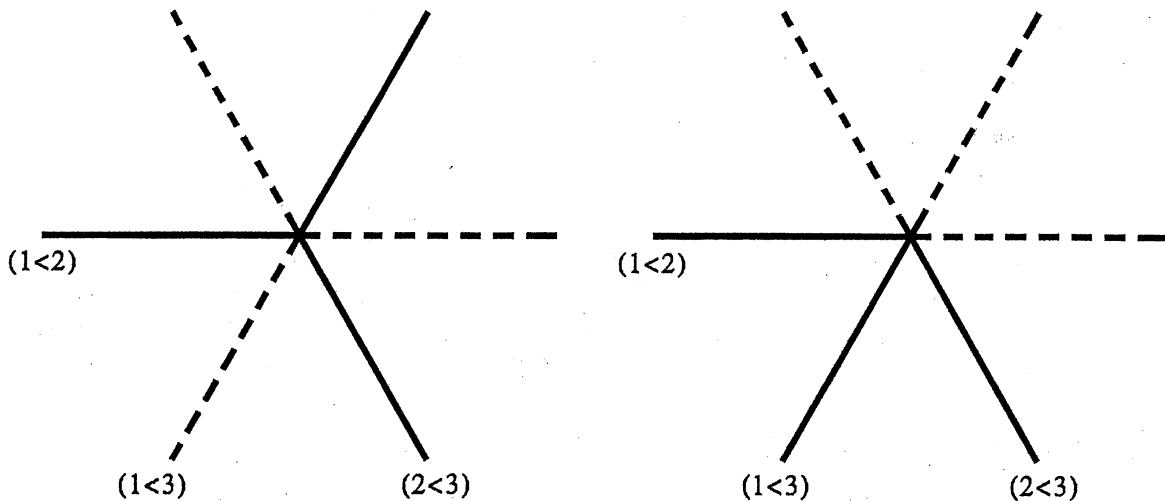


図3 ストークス線の2重交差点近傍。太線がストークス現象を起こすが起こさないかが(別の局所的状況から)既に確定しているストークス線、点線がまだ確定していないストークス線をあらわす。($i < j$) は、解 j が解 i に対して dominant な関係にあることを示す。

ここで、 $(i \cdot j)$ 線と呼んだものは、図 3 のように 2 つのパターンの交差について、dominance と sub-dominance の関係が、 $1 < 2 < 3$ の順番（不等号の使い方については、[10] に従った）になるようにそれぞれの WKB 解に名前をつけたときの、解 i と解 j のあいだで定義されるストークス線のことである。ただし、この場合、必ずしも $(1 \cdot 3)$ が新しいストークス線になっている必要はなく、通常のストークス線であっても構わない（実際、図 2 では、通常のストークス線、新しいストークス線の区別なくさまざまな dominance, sub-dominance の組み合わせがあらわれる）。

逆に以上の簡約ルールから、転回点の近傍からストークス線の有効・非有効を順次決定していったとき、 $(1 \cdot 2)$ 線、 $(2 \cdot 3)$ 線は無条件で交差点を越えてその性格を延長できるが、 $(1 \cdot 3)$ 線に関しては、以下のような状況が発生して場合、交差点を越えた有効性の決定はできなくなることがわかる。すなわち、

延長不能状況

1. 交差点の手前で、 $(1 \cdot 2)$ 線、 $(2 \cdot 3)$ 線の有効性がいずれも決定されていない（つまり、 $(1 \cdot 3)$ 線の有効性しかわかっていない）場合。
2. 交差点の手前で、 $(1 \cdot 2)$ 線、 $(2 \cdot 3)$ 線のどちらかの有効性がわかっていたとしても、それが有効なストークス線であった場合。

このことから、“仮想的に”ストークス線が図 4 のような交差の組み合わせを作っているようなことがあったと考えると、すなわち各交差点で上記 2 のような状況をお互いに起こしているとき、図 4 の 2 つのグラフのように、局所的には矛盾のない 2 通りのストークス幾何が可能になることになる。

しかしながら、今のところ理由は不明であるが、これまで多重積分 (9) を当たった限りにおいて、このような意味での決定不能なストークスグラフはまったく見つかっておらず、すべてのストークス線の実線・破線は一意的に判定できる。

4. ストークス幾何の正当性

以上のように決定されたストークス幾何（実線・破線の区別ありのストークスグラフ）が、WKB 解のポレル変換のリーマン面の構造、したがって、正しいストークス現象を表していることをいくつかの独立した方法で確かめることができる。詳しい計算の結果等は、文献 [14] にゆずるが、その方法の大略は以下のようなものである（具体的な計算は $n = 3$ の場合）。

(i) 鞍点を通る最急効果面の直接探索

2 重積分 (9) が収束するような積分路は、(10) の作用が鞍点から離れた十分遠方で、

$$\lim_{|q_1|, |q_2| \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \{iS\} \sim \frac{i}{3}(q_1^3 + q_2^3) \rightarrow -\infty \quad (18)$$

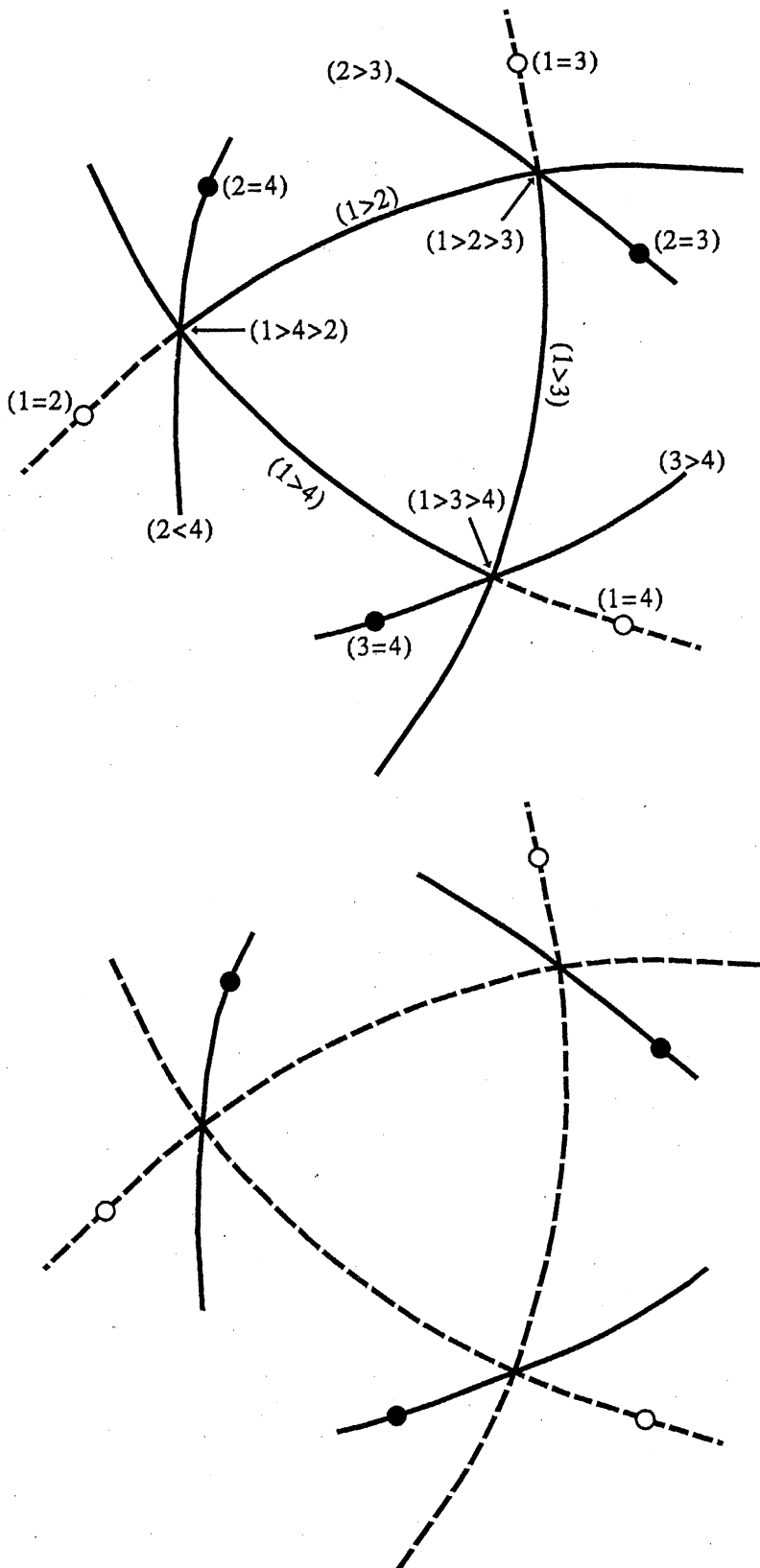


図4 ストークス幾何が一意的に決定されない仮想的なグラフの組み合わせ。実線がストークス現象を起こす部分で、破線がストークス現象を起こさない部分を示す。()で示された, dominance & sub-dominance の意味は図3に同じで, 両図の dominance & sub-dominance の関係はすべて同じであるとする。

となるような積分路である。このような積分路を $C_i^{(1)} \times C_j^{(2)}$ (ここで、 $C_i^{(1)}$ ($i = 1, 2, 3$) は $\arg q_1 = \pi/6, 5\pi/6, 9\pi/6$ を漸近線とするような双曲線) と書くことにする。

そこでいま、各積分面 $C_i^{(1)} \times C_j^{(2)}$ を以下の勾配方程式：

$$\begin{aligned} \frac{d\{\operatorname{Re} q_i\}}{dt} &= -\frac{\partial \operatorname{Re}\{iS(q_0, q_1, q_2, q_3)\}}{\partial \operatorname{Re} q_i} \\ \frac{d\{\operatorname{Im} q_i\}}{dt} &= -\frac{\partial \operatorname{Im}\{iS(q_0, q_1, q_2, q_3)\}}{\partial \operatorname{Im} q_i} \end{aligned} \quad (19)$$

を数値的に解くことによって連続変形し、鞍点 (\bar{q}_1, \bar{q}_2) との衝突の有無をみる。実際には、積分面 $C_i^{(1)} \times C_j^{(2)}$ を出発して勾配方程式を解くことで発生する数値計算上の不安定性を避けるため、勾配方程式 (19) の右辺の符号を反転させた逆勾配方程式を解くことにより、鞍点 (\bar{q}_1, \bar{q}_2) の不安定多様体 (2次元) と積分面 $C_i^{(1)} \times C_j^{(2)}$ との交差 (0次元) の有無をモニターする。交点をもった場合、無限遠方で積分面が $C_i^{(1)} \times C_j^{(2)}$ 漸近するするような最急効果面が鞍点 (\bar{q}_1, \bar{q}_2) を通ることになり、積分 (9) の与えられた積分路に対する鞍点積分の寄与として (\bar{q}_1, \bar{q}_2) が含まれることになる。

(ii) 超漸近展開を用いたボレル変換のリーマン面の解析

Large parameter を被積分関数の位相に含んだ積分に対して鞍点法を実行し、その large parameter に対する展開を求めるとその展開は一般に漸近展開になる。Berry & Howls の超漸近展開 (hyperasymptotics) の方法は、その漸近展開に表れる剰余項を、展開の基点に選んだ鞍点以外の鞍点を用いて展開しなおす表式を与える [15]。当初、1重積分に対して与えられていた超漸近展開の手法は、その後、Howls によって多重積分の場合に拡張された [16]。ここでは、多重積分 (9) (ただし、 $n = 3$) を以下のように超漸近展開を用いて展開する。

$$\begin{aligned} I(q_0, q_3) &= \iint dq_1 dq_2 \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(q_0, q_1, q_2, q_3)\right] \\ &= \frac{\exp\{-2k(\alpha + \beta)/3\}}{k} T^{(n)}(k) \quad \left(k = \frac{1}{\hbar}\right). \end{aligned} \quad (20)$$

α, β は鞍点の座標で決まる定数である。ここで、 k に対する超漸近展開は、

$$\begin{aligned} T^{(n)}(k) &= \sum_{r=0}^{N_n-1} T_r^{(n)} K_r^{(n)} + \sum_{m_1} K_{nm_1} \sum_{r=0}^{N_{nm_1}-1} T_r^{(m_1)} K_r^{(nm_1)} \\ &+ \sum_{m_1} \sum_{m_2} K_{nm_1} K_{m_1 m_2} \sum_{r=0}^{N_{nm_1 m_2}-1} T_r^{(m_2)} K_r^{(nm_1 m_2)} + \dots \\ &+ \sum_{m_1} \dots \sum_{m_2} K_{nm_1} K_{m_1 m_2} \dots K_{m_{M-1} m_M} \left(\sum_{r=0}^{N_M-1} T_r^{(M)} K_r^{(nm_1 \dots m_M)} + R^{(nm_1 m_2 \dots m_M)} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

と書かれる。ここで $K^{(01 \dots M)}$ は、hyperterminant をよばれる、被積分関数の形によらない universal な M 重積分である。その具体的な表式 [15]、および、 M 積分を数値的に評価する手順 [18] については煩雑になるのでここでは省略する。

ここで重要なのは、各項の前に形式的に挿入した係数 K_{nm} である。この係数 K_{nm} は、被積分関数のその展開の基点となった鞍点以外の鞍点が展開の各階層の剰余項に寄与するか否かを表しており、その定義は、

$$|K_{nm}| = \begin{cases} 1 : \text{サドル } n \text{ とサドル } m \text{ とがストークス現象を起こすペアであるとき} \\ 0 : \text{サドル } n \text{ とサドル } m \text{ とがストークス現象を起こさないペアであるとき} \end{cases}$$

である。すなわち、積分 (9) をラプラス積分表示したとき出てくるボレル変換（積分を漸近展開したときの）のリーマン面に関して、 $|K_{nm}| = 1$ であれば鞍点 n と鞍点 m とは同じリーマン面上にあり、従って、ストークス現象を起こすペア、であることをあらわす。

さて、(21) 式の展開を有限の階層で打ち切ると、その打ち切った階層に関する剰余項が出てくるが、各階層の展開を真の積分との誤差がその階層で最小になるような最適な次数で打ち切った場合、その剰余項の絶対値を評価することができる [16]。逆にそのことを利用すると、(21) の展開を、漸近展開の係数 $T_r^{(n)}$ を既知係数、ボレル変換のリーマン面の関係を示すインデックス K_{nm} を未知数とした、近似的な代数方程式とみなすことができる（ただしそのためには、所望の積分の漸近展開の係数 $T_r^{(n)}$ も具体的に得られている必要がある）。“近似的”である理由は、各階層に応じて剰余項が出てくるためである。

そのようにして作られる代数方程式は、ただひとつではなく、どの鞍点を基点として展開を行うか、さらに、どの階層で展開を打ち切るか、などの選択によっていくつものバリエーションが出てくる。実際には、それらを適宜組み合わせ、展開の次数を最適値で打ち切ることによって得られる剰余項の評価式を利用することによって、得られた近似的な K_{nm} が真に 1 であるのか 0 であるのか（つまりサドル m がサドル n がストークス現象を起こすのか起こさないのか）を判定していく [17, 16]。

具体的に積分 (9) は被積分関数の位相関数が多項式であるため、具体的に漸近展開の係数を書き下すことができ、

$$T_r^{(k)} = \sum_{l_1+l_2+l_3+l_4=2r} i^{r+1} \frac{\prod_{i=1}^4 R_i^{l_i}}{\prod_{i=1}^4 \Gamma(l_i+1)} \frac{\Gamma((p+1)/2)\Gamma((q+1)/2)}{\lambda_1^{(p+1)/2} \lambda_1^{(q+1)/2}}, \quad (22)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} p &= 3l_1 + l_2 + 2l_3 \\ q &= 2l_2 + l_3 + 3l_4 \end{aligned} \quad (23)$$

また、 R_1, R_2, R_3, R_4 は、

$$A = \begin{pmatrix} 1 + q_1^{(i)} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 + q_2^{(i)} \end{pmatrix}$$

を対角化して得られる、

$$PAP^{-1} = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

によって、

$$\begin{aligned} R_1 &= (P_{11}^3 + P_{21}^3)/3 \\ R_2 &= P_{11}P_{12}^2 + P_{21}P_{22}^2 \\ R_3 &= P_{11}^2P_{12} + P_{21}^2P_{22} \\ R_4 &= (P_{12}^3 + P_{22}^3)/3 \end{aligned}$$

で与えられる。ただし、 $q_1^{(i)}, q_2^{(i)}$ 積分 (9) の鞍点である。以上の漸近展開の係数と hyperterminant を用意し、上記手順を逐次実行することにより、4つの鞍点のボレル面のリーマン面上の位置関係を知ることができる。

(i), (ii) の方法以外にも、(iii) 漸近領域 $|q_3| \rightarrow \infty$ でのストークス現象を考察する、ことにより、 q_3 面上の各セクターに応じて、 $|q_3| \rightarrow \infty$ でストークス線が何本あるか? ということを知ることができる。図 1, 2, 3 など得られたストークスグラフの漸近領域での本数と比較をすることによって得られた結果の妥当性を確かめることができる (これも詳しくは論文 [14] を参照)。

結果的には、上記いずれの方法も、図 1 で得たストークスグラフの実線・破線の割り振りと矛盾がないことが確認される [14]。

最後に、exact WKB 法、および、高階の微分方程式に関するストークス現象に関して多くの貴重なコメントを頂いた青木貴史氏 (近畿大理工)、並びに、陪特性方程式に関する計算を確認して頂いた大西孝明氏 (東京都立大) に謝意を表す。

参考文献

- [1] B.V. Chirikov, Phys. Rep., **52**(1979)265; “*Hamiltonian Dynamical Systems*”; a reprint selection compiled and introduced by R.S. Mackay and J.D. Meiss (Adam Hilger, 1987).
- [2] M. Hénon, Commun. Math. Phys. **50**(1976)69.
- [3] S. Friedland and J. Milnor, Ergod. Theor. Dyn. Sys. **9**(1989)67.
- [4] S. C. Creagh, in “*Tunneling in complex systems*” ed. by S. Tomsovic (World Scientific, Singapore, 1998) pp.35-96;
- [5] 上田哲夫, 谷口雅彦, 諸澤俊介 『複素力学系序説』 (倍風館、1995 年); E. Bedford and J. Smillie (一部 M. Lyubich と共著), “*Polynomial Diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 I-VI*”, <http://www.math.sunysb.edu/dynamics/preprints/preprints.html>.
- [6] Y. Ishii, to be published.
- [7] A. Shudo, Y. Ishii and K.S. Ikeda, in preparation.
- [8] A. Shudo and K.S. Ikeda, Phys. Rev. Lett., **74**(1995)682; *ibid* **76**(1996)4151; Physica D**115**(1998)234.

- [9] H.L. Berk, W.M. Nevins and K.V. Roberts, *J. Math. Phys.*, **23**(1982)988.
- [10] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, in *Méthodes résurgentes, Analyse algébrique des perturbations singulières*, L. Boutet de Monvel ed.(1994)69.
- [11] T. Aoki, private communication.
- [12] A. Voros, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **39**(1983)211.
- [13] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, preprint(RIMS-1215).
- [14] A. Shudo, and K.S. Ikeda, in preparation.
- [15] M.V. Berry and C.J. Howls, *Proc. L. Soc. London*, **434** (1991)657.
- [16] C.J. Howls, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **453**(1997)2271.
- [17] Olde Daalhuis A.B., *Proc. R. Soc. Lond. A*, in press.
- [18] Olde Daalhuis A.B., *Methods Appl. Analysis* **2**(1995)198; *J. Comp. Appl. Math.* **76**(1996)255;