数理解析研究所講究録
1135 巻 2000 年 120-128

準線形発展方程式の解

1.1 準線形発展方程式

Toyo University Kenji Kojima
東洋大学 小島賢二

準線形発展方程式

$$u_t(\mathbf{x},t) = P(\mathbf{x},t)F(u(\mathbf{x},t)), \tag{1.1}$$

の初期値問題を考える。ここで $P(\mathbf{x},t)$ は、偏微分作用素で、必ずしも可換であるとは、限らない。F は非線形写像である。初期条件 $u_0 = u(\mathbf{x},0)$ の元に、上式の解を求める。最初に、作用素と非線形写像に関して

$$PF \cdot u \equiv PF(u), \tag{1.2}$$

帰納的に

$$(PF)^n \cdot u \equiv (PF)^{n-1} \cdot PF(u), \tag{1.3}$$

指数写像

$$\exp[PF] \cdot u \equiv u + \sum_{n=1} \frac{(PF)^n}{n!} \cdot u, \tag{1.4}$$

と定義をする。この準線形発展方程式を直接解くのは、大変難しいので、最初に近似解を求める。時間 t の区間 $[0,t]$ を N 分割して、順に番号 $t_1, t_2, ..., t_N$ を付ける。$\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ 式 (2.1) の近似解は、次の様である。

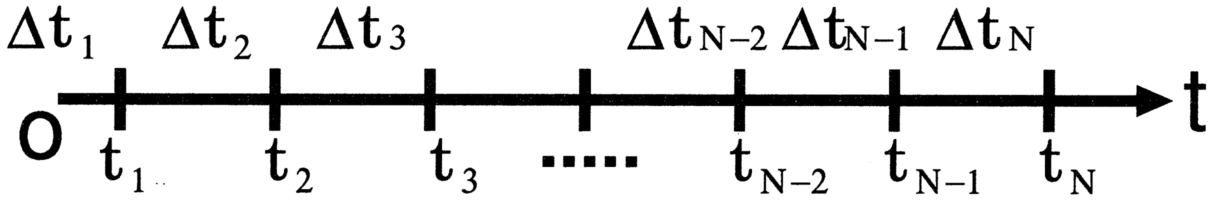

図 1.1: Division of interval $[0,t]$ of variable t

$$u(\mathbf{x},t) = \exp[P(\mathbf{x},t_N)\Delta t_N F] \cdots \exp[P(\mathbf{x},t_1)\Delta t_1 F] \cdot u_0, \tag{1.5}$$

この指数作用素を１つの指数作用素にまとめるには、Lie 代数 L_A の包絡代数 $U(L_A)$ に出てくる Baker-Campbell-Hausdorff(BCH) の公式を利用する。$X_1, \ldots, X_N$ を N 個の非可換作用素とする時、ある作用素 Y が存在して、次の様な関係式

$$Y = \log(e^{X_N} \ldots e^{X_1}) \tag{1.6}$$

指数作用素と log の 1 での展開

$$\log(1+e^{X_N}\dots e^{X_1}-1) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(e^{X_N}\dots e^{X_1}-1)^n, \tag{1.7}$$

から、

$$Y=\log(e^{X_N}\dots e^{X_1})=\sum_{i=1}^{N}X_i+C(X_1,\cdots,X_N), \tag{1.8}$$

ただし $C(X_1,\cdots,X_N)$ は、N 個の非可換作用素の多重交換子で

$$C(X_1,\cdots,X_N)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\sum_{p_{ij}}\frac{(adX_1)^{p_{11}}\cdots(adX_N)^{p_{1N}}(adX_1)^{p_{11}}\cdots(adX_N)^{p_{nn}-1}X_N}{(p_{11}+p_{12}+\cdots+p_{NN})p_{11}!p_{12}!\cdots p_{NN}!}, \tag{1.9}$$

で、$adX_jX_k=[X_j,X_k$ である。従って Y は多重交換子の無限和になっている。$P(\mathbf{x},t_j)\Delta t_jF=X_j$ とおいて、$Max\{\Delta t_i\to 0\}$ なる極限をとり、(Δt_j) の高次項を無視すると、

$$u(\mathbf{x},t)=\exp[\tilde{P}F]\cdot u_0, \tag{1.10}$$

ここで $\tilde{P}F$ は

$$\tilde{P}F=\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n(PF), \tag{1.11}$$

であり、多重交換子 $\eta_n(PF)$ は、

$$\begin{aligned}\eta_n(PF) \;=\; & (1/n)\int_0^t dt_1\cdots\int_0^t dt_n\sum_{m=1}^{N}((-1)^{m-1}/m)(P_{n-m}\Pi)(\theta(t_n-t_{n-1}),\cdots,\theta(t_2-t_1))\times \\ & [P(\mathbf{x},t_n)F,[\cdots,[P(\mathbf{x},t_2)F,P(\mathbf{x},t_1)F]\cdots],\end{aligned} \tag{1.12}$$

である。ただし $P_{n-m}\Pi$ は、$n-m$ 個のすべての組み合わせのの積を採ることを意味する。従って、θ 関数の性質より、$\tilde{P}F$ の t に関する微分は、$\partial\tilde{P}F/\partial t=PF$ になることに注意。

最初の 3 項を上げる。

$$\eta_1(PF)=\int_0^t dt'P(\mathbf{x},t')F, \tag{1.13}$$

$$\eta_2(PF)=\frac{1}{2}\int_0^t dt_1\int_0^t dt_2\theta(t_2-t_1)[P(\mathbf{x},t_2)F,P(\mathbf{x},t_1)F], \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}\eta_3(PF) \;=\; & \frac{1}{3}\int_0^t dt_1\int_0^t dt_2\int_0^t dt_3\{\theta(t_3-t_2)\theta(t_2-t_1)-(1/2)(\theta(t_3-t_2)-\theta(t_2-t_1))\} \\ & \times[P(\mathbf{x},t_3)F,[P(\mathbf{x},t_2)F,P(\mathbf{x},t_1)F]],\end{aligned} \tag{1.15}$$

例 *1: $P=\triangle$ (Laplacian)*
作用素 P が可換であるので、初期値問題の解は

$$u(\mathbf{x},t)=\exp[t\triangle F]\cdot u_0, \tag{1.16}$$

Symmetry	Antisymmetry
$F(u) = F(-u)$	$F(-u) = -F(u)$
$u(\mathbf{x}, t) = \cosh(t\triangle F) \cdot u_0$	$u(\mathbf{x}, t) = \sinh(t\triangle F) \cdot u_0$

表 1.1: 関数 F の性質と解との関係

で与えられる。関数 F が対称である時と、反対称である時には、指数作用素が下記の表の様になる。

例 *2*: $P = \triangle^2$ (biharmonic operator)
作用素 P が可換であるので、初期値問題の解は

$$u(\mathbf{x}, t) = \exp[t\triangle^2 F] \cdot u_0, \tag{1.17}$$

となる。関数 F が対称である時と、反対称である時には、指数作用素が下記の表の様になる。

Symmetry	Antisymmetry
$F(u) = F(-u)$	$F(-u) = -F(u)$
$u(\mathbf{x}, t) = \cosh(t\triangle^2 F) \cdot u_0$	$u(\mathbf{x}, t) = \sinh(t\triangle^2 F) \cdot u_0$

表 1.2: 関数 F の性質と解との関係

例 *3*: $P = a\triangle + b\triangle^2$ (a, b:constants)
この時も作用素 P が可換であるので、初期値問題の解は

$$u(\mathbf{x}, t) = \exp[t(a\triangle + b\triangle^2)F] \cdot u_0, \tag{1.18}$$

となる。関数 F が対称である時と、反対称である時には、指数作用素が下記の表の様になる。

Symmetry	Antisymmetry
$F(u) = F(-u)$	$F(-u) = -F(u)$
$u(\mathbf{x}, t) = \cosh(t(a\triangle + b\triangle^2)F) \cdot u_0$	$u(\mathbf{x}, t) = \sinh(t(a\triangle + b\triangle^2)F) \cdot u_0$

表 1.3: 関数 F の性質と解との関係

1.2 2つの作用素を有する発展方程式

2つの作用素 P(x,t),Q(x,t) を含んだ準線形発展方程式

$$u_t(\mathbf{x},t) = PF(u) + QG(u), \tag{2.1}$$

について、考えてみよう。発展方程式中の作用素を行列の形

$$\begin{bmatrix} u \\ q(u) \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} P & Q \\ Q & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(u) \\ G(u) \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

に書いてみる。ただし補助関数 $q_t(u)$ は、$q_t(u) = u_t(dq(u)/du)$ であるから、

$$q(u)_t = \frac{dq(u)}{du} u_t = QF(u) + PG(u), \tag{2.3}$$

つまり、

$$q(u) = \int_0^u \frac{QF(\xi) + PG(\xi)}{PF(\xi) + QG(\xi)} d\xi. \tag{2.4}$$

と表される。 この方程式の初期値の解は、

$$\begin{bmatrix} u \\ q(u) \end{bmatrix} = \exp[\tilde{M}_{P,Q}\varphi_2] \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ q(u_0) \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

で与えられる。ただし $M_{P,Q}$ と非線形写像 φ_2 は、

$$M_{P,Q} = \begin{bmatrix} P & Q \\ Q & P \end{bmatrix}, \quad \varphi_2 \cdot \begin{bmatrix} u \\ q(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(u) \\ G(u) \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

である。

例 1: Hartree 方程式

量子力学で現れる多体系を記述する Hartree 方程式は、次の様な式である。

$$iu_t - \triangle u + (U * |u|^2)u = 0, \tag{2.7}$$

ここで U は、ポテンシャルを表し、記号$*$は畳み込み (convolution) を意味している。$P = \triangle$、$Q = 1$、$F(u) = -iu$、$G(u) = i(U * |u|^2)u$ であので、補助関数 $q_t(u)$ は、

$$q(u) = \int_0^u \frac{-i\xi + i\triangle(U * |\xi|^2)\xi}{-i\triangle\xi + i(U * |\xi|^2)\xi} d\xi. \tag{2.8}$$

である。作用素行列が可換であるので、この Hartree 方程式の初期値問題の解は、

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ q(u(t)) \end{bmatrix} = \exp(t \begin{bmatrix} \triangle & 1 \\ 1 & \triangle \end{bmatrix} \varphi_H) \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ q(u_0) \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

と表される。ただし非線形写像 φ_H は、

$$\varphi_H \cdot \begin{bmatrix} u \\ q(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -iu \\ i(U * |u|^2)u \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

である。

例 2: Ginzburg-Landau 方程式
超伝導現象を記述する Ginzburg-Landau 方程式は、

$$u_t = \triangle u + (1 - |u|^2)u, \tag{2.11}$$

と表される。$P = \triangle$, $Q = 1$, $F(u) = u$, $G(u) = (1 - |u|^2)u$ であるから、 補助関数 $q_t(u)$ は、

$$q(u) = \int_0^u \frac{\xi + \triangle((1-\xi^2)\xi)}{\triangle\xi + (1-\xi^2)\xi} d\xi. \tag{2.12}$$

で与えられる。作用素行列が可換であるので、この Ginzburg- -Landau 方程式の初期値問題の解は、

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ q(u(t)) \end{bmatrix} = \exp(t \begin{bmatrix} \triangle & 1 \\ 1 & \triangle \end{bmatrix} \varphi_{GL}) \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ q(u_0) \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

と表される。ただし非線形写像φ_{GL}は、

$$\varphi_{GL} \cdot \begin{bmatrix} u \\ q(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ (1 - |u|^2)u \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

である。

例 3: Cahn-Kolmogorov 方程式
Cahn-Kolmogorov 方程式は

$$u_t = \triangle u + u - u^3, \tag{2.15}$$

と表される。 $P = \triangle$, $Q = 1$, $F(u) = u$, $G(u) = u - u^3$ であるから、補助関数 $q_t(u)$ は、

$$q(u) = \int_0^u \frac{\xi + \triangle(\xi - \xi^3)}{\triangle\xi + \xi - \xi^3} d\xi. \tag{2.16}$$

で与えられる。作用素行列が可換であるので、この Cahn- -Kolmogorov 方程式の初期値問題の解は、

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ q(u(t)) \end{bmatrix} = \exp(t \begin{bmatrix} \triangle & 1 \\ 1 & \triangle \end{bmatrix} \varphi_{CK}) \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ q(u_0) \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

と表される。ただし非線形写像φ_{CK}は、

$$\varphi_{CK} \cdot \begin{bmatrix} u \\ q(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ u - u^3 \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

である。

例 4: Swift-Hohenberg 方程式
Swift-Hohenberg 方程式は

$$u_t(\mathbf{x},t) = P_{SH}u - u^3, \tag{2.19}$$

と表される。 ただし P_{SH} は

$$P_{SH} = -(1-\triangle)^2 + \epsilon^3. \tag{2.20}$$

である。$Q=1$, $F(u)=u$, $G(u)=-u^3$であるから、補助関数 $q_t(u)$ は、

$$q(u) = \int_0^u \frac{\xi - \triangle\xi^3}{\triangle\xi - \xi^3} d\xi. \tag{2.21}$$

で与えられる。作用素行列が可換であるので、この Swift- -Hohenberg 方程式の初期値問題の解は、equation

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ q(u(t)) \end{bmatrix} = \exp(t \begin{bmatrix} -(1-\triangle)^2+\epsilon^3 & 1 \\ 1 & -(1-\triangle)^2+\epsilon^3 \end{bmatrix} \varphi_{SH}) \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ q(u_0) \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

と表される。ただし非線形写像φ_{SH}は、

$$\varphi_{SH} \cdot \begin{bmatrix} u \\ q(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ -u^3 \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

である。

1.3 3つの作用素を有する準線形発展方程式

3つの作用素を有する準線形発展方程式について、考えてみよう。

$$u_t(\mathbf{x},t) = PF(u) + QG(u) + RH(u), \tag{3.1}$$

について、考えてみよう。ただし、P,Q,R は作用素で、F,G,R は、非線形写像とする。2つの作用素を有する準線形発展方程式の拡張であるので、作用素行列として、巡回形の行列を導入と、上式は、

$$\begin{bmatrix} u \\ q(u) \\ r(u) \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} P & Q & R \\ R & P & Q \\ Q & R & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(u) \\ G(u) \\ H(u) \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

の様に書き換えられる。ここで補助関数 $q(u)$,$r(u)$ は、

$$q(u)_t = \frac{dq(u)}{du}u_t = QF(u) + PG(u) + RH(u), \tag{3.3}$$

$$r(u)_t = \frac{dr(u)}{du}u_t = RF(u) + QG(u) + PH(u), \tag{3.4}$$

であるから

$$q(u)=\int_0^u \frac{RF(\xi)+PG(\xi)+QH(\xi)}{PF(\xi)+QG(\xi)+RH(\xi)}d\xi, \tag{3.5}$$

$$r(u)=\int_0^u \frac{QF(\xi)+RG(\xi)+PH(\xi)}{PF(\xi)+QG(\xi)+RH(\xi)}d\xi. \tag{3.6}$$

となる。この方程式の初期値問題の解は、

$$\begin{bmatrix} u \\ q(u) \\ r(u) \end{bmatrix} = \exp[\tilde{M}_{P,Q,R}\varphi_3]\cdot\begin{bmatrix} u_0 \\ q(u_0) \\ r(u_0) \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

である。ただし、作用素行列 $M_{P,Q,R}$と、非線形写像φ_3は

$$M_{P,Q,R}=\begin{bmatrix} P & Q & R \\ R & P & Q \\ Q & R & P \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

$$\phi_3\cdot\begin{bmatrix} u \\ q(u) \\ r(u) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F(u) \\ G(u) \\ H(u) \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

である。

1.4 連立準線形発展方程式

次の連立準線形発展方程式

$$u_t(\mathbf{x},t)=PF(u,v), \tag{4.1}$$

$$v_t(\mathbf{x},t)=PG(u,v), \tag{4.2}$$

について、考えてみよう。 この連立準線形発展方程式は、

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t = P\phi_2\cdot\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

の様に書き換えられる。ただし、非線形写像ϕ_2は

$$\phi_2\cdot\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F(u,v) \\ G(u,v) \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

で定義する。この連立準線形発展方程式の初期値問題の解は、

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=\exp[\tilde{P}\phi_2]\cdot\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

で与えられる。ここで u_0 and v_0 は、u,v の初期値でである。
例：

$$u_t(\mathbf{x},t) = \triangle F(u,v), \tag{4.6}$$

$$v_t(\mathbf{x},t) = \triangle G(u,v), \tag{4.7}$$

作用素 $\triangle$ が可換であるので、この連立準線形発展方程式の初期値問題の解は、

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \exp[t\triangle\phi_E]\cdot\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

で与えられる。ただし、非線形写像ϕ_Eは

$$\phi_E\cdot\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(u,v) \\ G(u,v) \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

1.5　3元連立準線形発展方程式

3 元連立準線形発展方程式

$$u_t(\mathbf{x},t) = P(\mathbf{x},t)F(u(\mathbf{x},t),v(\mathbf{x},t),w(\mathbf{x},t)), \tag{5.1}$$

$$v_t(\mathbf{x},t) = P(\mathbf{x},t)G(u(\mathbf{x},t),v(\mathbf{x},t),w(\mathbf{x},t)), \tag{5.2}$$

$$w_t(\mathbf{x},t) = P(\mathbf{x},t)H(u(\mathbf{x},t),v(\mathbf{x},t),w(\mathbf{x},t)), \tag{5.3}$$

について、考えてみよう。
Quasilinear evolution equations in the vector form

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_t = P\phi_3\cdot\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

ただし、非線形写像ϕ_3は

$$\varphi_3\cdot\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(u,v,w) \\ G(u,v,w) \\ H(u,v,w) \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

である。この連立準線形発展方程式の初期値問題の解は、

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \exp[\tilde{P}\varphi_3]\cdot\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix}. \tag{5.6}$$

と表される。
例：G. Halphen 方程式
G. Halphen 方程式は、

$$u_t + v_t = 2uv, \tag{5.7}$$

$$v_t + w_t = 2vw, \tag{5.8}$$

$$w_t + u_t = 2wu. \tag{5.9}$$

の様に表される。この連立準線形発展方程式は、

$$u_t = uv - vw + wu, \tag{5.10}$$

$$v_t = vw - wu + uv, \tag{5.11}$$

$$w_t = wu - uv + vw, \tag{5.12}$$

の様に書き換えられる。この連立準線形発展方程式の初期値問題の解は、

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \exp[t\varphi_H] \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix}. \tag{5.13}$$

で与えられる。ただし、非線形写像φ_Hは

$$\varphi_H \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uv - vw + wu \\ vw - wu + uv \\ wu - uv + vw \end{bmatrix}. \tag{5.14}$$

と表わされる。

今後の問題
1. 2つの作用素の積を有する準線形発展方程式の初期値問題
2. 準線形波動方程式の初期値問題
3. 2つの作用素を有する準線形波動方程式の初期値問題
4. 半線形 Laplace 方程式の境界値問題
5. Navier-Stokes 方程式の初期値問題
6. Yang-Mills 方程式の初期値問題
7. Monge-Ampère 方程式の境界値問題

がある。

参考文献

1. T. Cazenave and A. Haraux, Translated by Y. Martel *An Introduction to Semilinear Evolution Equations* (Oxford Science Publications, Oxford , 1998).
2. N. Jacobson, *Lie Algebras* (Dover Publication, Inc., New York, 1962) p. 151.
3. J. P. Serre, *Lie Algebras and Lie Groups* (Benjamin, Inc., Reading, Massachusetts, 1965).
4. J. Dixmier, *Enveloping Algebras* (North-Holland Publ. Com., New York, 1977).
5. K. Kojima, Research Reports of Faculty of Engineering, Toyo University, **34**(1998) 49.