数理解析研究所講究録
1136巻 2000年 90-95

Hlawka type inequalities in Banach spaces

岡山県立大・情報工　高橋泰嗣 (Yasuji Takahashi)
山形大・工　高橋眞映 (Sin-Ei Takahasi)
木更津高専・情報工　和田州平 (Shuhei Wada)

要旨：Banach 空間に Hlawka 型不等式が導入され、その最良定数が考察される。特に Hilbert 空間においてその最良定数の値が決定される。

本論の目的は、[12] の続きを話すことにある。しかしながら話しの関係上 [12] の内容の重複を許されたい。

さて Hilbert 空間の任意の元 x, y, z について常に

$$\|x+y\|+\|y+z\|+\|z+x\|\leq\|x\|+\|y\|+\|z\|+\|x+y+z\|$$

が成り立つが、これを Hlawka 不等式と言う (cf. [2], [5]).

注：もともとはn次元ユークリッド空間で考えられた。

勿論 Hilbert 空間以外にも Hlawka 不等式を満たす空間は沢山あるが、これを決定するとなると困難を究める。ここでは空間を固定し、不等式自身に目を向け、次のような Hlawka 型不等式に関する問題を考察する。

問題。Banach 空間 X と指数 s, r (≥ 1) が与えられたとき、不等式

$$(\#)\quad \left(\|x+y\|^s+\|y+z\|^s+\|z+x\|^s\right)^{\frac{1}{s}}\leq C\left(\|x\|^r+\|y\|^r+\|z\|^r+\|x+y+z\|^r\right)^{\frac{1}{r}}\quad (x, y, z\in X)$$

を満たす定数 C は存在するか？もし存在するなら、その最良定数は何か？

最初の問題は次の定理により肯定的に解かれる：

Theorem 1. Let X be a real (or complex) Banach space and $s, r\geq 1$. Then

$$\left(\|x+y\|^s+\|y+z\|^s+\|z+x\|^s\right)^{\frac{1}{s}}\leq 2^{1-\frac{2}{r}}3^{\frac{1}{s}}\left(\|x\|^r+\|y\|^r+\|z\|^r+\|x+y+z\|^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

holds for all $x, y, z \in X$.

略証。各 $x_1, x_2, x_3 \in X$ 及び $p \geq 1$ に対して

$$\boldsymbol{E}\left\|\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3\right\|^p = \frac{1}{8}\sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ 1 \leq j \leq 3}}\left\|\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3\right\|^p$$

と置く。このとき、各 $u = a, b, c \in X$ に対して

$$\|u\| \leq \boldsymbol{E}\left\|\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + \varepsilon_3 c\right\| \leq \left(\boldsymbol{E}\left\|\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + \varepsilon_3 c\right\|^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

が成り立つので、

$$\left(\|a\|^s + \|b\|^s + \|c\|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq 3^{\frac{1}{s}}\left(\boldsymbol{E}\left\|\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + \varepsilon_3 c\right\|^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

を得る。一方 X からそれ自身への変換：

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

を考えると、(#) は

(##) $$\left(\|a\|^s + \|b\|^s + \|c\|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq C \cdot 2^{\frac{2}{r}-1}\left(\boldsymbol{E}\left\|\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + \varepsilon_3 c\right\|^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

に変換されるので、上と合わせて　望ましい式を得る。証終

そこで (#) の最良定数を $C(s, r; X)$ と書けば、上の定理から常に $C(s, r; X) \leq 2^{1-\frac{2}{r}} \cdot 3^{\frac{1}{s}}$ が成り立つ。もし $X = \ell_n^\infty(\boldsymbol{R})$ $(3 \leq n \leq \infty)$ であれば、$C(s, r; X) = 2^{1-\frac{2}{r}} \cdot 3^{\frac{1}{s}}$ であるが、一般には、$C(s, r; X) \neq 2^{1-\frac{2}{r}} \cdot 3^{\frac{1}{s}}$ である。我々は実 Hilbert 空間に限ってその最良定数を決定したい。分かった事を要約すると、最良定数は $C(s, r; \boldsymbol{R})$, $C(s, r; \boldsymbol{R}^2)$, $C(s, r; \boldsymbol{R}^3)$ を決定すればよいこと。また完全に決定出来る指数領域と（我々にとって）良く分からない指数領域があること等である。

もっと詳しく述べよう。先ず $\min\left(s, \frac{s}{s-1}\right) \leq r$ を満たす指数領域については、次の結果を得る。

Theorem 2. Let H be a real Hilbert space. Then

(i) $C(s, r; H) = 2^{1-\frac{2}{r}}$ for $2 \leq s < \infty, \frac{s}{s-1} \leq r < \infty$ and $\dim H \geq 1$.

(ii) $C(s, r; H) = 2^{1-\frac{2}{r}} \cdot 3^{\frac{1}{s}-\frac{1}{2}}$ for $1 \leq s \leq 2 \leq r < \infty$ and $\dim H \geq 3$.

(iii) $C(s, r; H) = 2 \cdot 3^{\frac{1}{s}}(3^r + 3)^{-\frac{1}{r}}$ for $1 \leq s \leq r \leq 2$ and $\dim H \geq 1$.

証明の方針：(i) $(\frac{s}{s-1}, s)$ – Clarkson 型不等式、確率空間上の L_p – ノルムの p に関

する単調性及び (##) を応用する。アテインは $x=y=a\,(\neq 0), z=-a$ のときである。

(ii) $(2,2)-$Clarkson 型不等式、確率空間上の L_p-ノルムの p に関する単調性及び (##) を応用する。アテインは $x=e_2+e_3-e_1,\ y=e_3+e_1-e_2, z=e_1+e_2-e_3$ のときである。但し $\{e_1, e_2, e_3\}$ は互いに直交する単位ベクトル。

(iii) Figiel-Iwaniec-Pelczynski の結果 [3]、確率空間上の L_p-ノルムの p に関する単調性及び (##) を応用する。アテインは $x=y=z=a\,(\neq 0)$ のときである。証終

更に (ii) の指数領域については次の事が言える。

Theorem 3. $C(s,r;R)<C(s,r;R^3)$ for $1\leq s<2$ and $r>\frac{\log 4}{\log 3}\left(-2+\frac{4}{2-s}\right)$.

略証。Let $1\leq s, r\leq\infty$, and set

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}:\ell_4^1(X)\to\ell_4^s(X),\quad B=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}:\ell_4^1(X)\to\ell_4^1(X)$$

and

$$D=\begin{bmatrix}-1&0&0&1\\0&-1&1&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}:\ell_4^1(X)\to\ell_4^s(X).$$

Then we have $A=DB$, $C(s,r;X)=\left\|D:\mathrm{Im}\,(B)\to\ell_4^s(X)\right\|=\sup\limits_{\substack{x\in\mathrm{Im}\,(B)\\ x\neq 0}}\frac{\|Dx\|_s}{\|x\|_r}$ and

$\mathrm{Im}\,(B)=\left(\mathrm{Ker}\,B^*\right)^{\perp}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}^{\perp}$, where $\mathrm{Im}(B)$ denotes the image of $B:\ell_4^r(X)\to\ell_4^r(X)$. On the other hand, if $1\leq r<\infty$, then $\|x\|_\infty=\max\limits_{1\leq j\leq 4}\|x_j\|\leq\|x\|_r=\left(\sum_{j=1}^4\|x_j\|^r\right)^{\frac{1}{r}}\leq 4^{\frac{1}{r}}\|x\|_\infty$ for all $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\in X^4$. Then we have

$$C(s,r;X)\leq C(s,\infty;X)\leq 4^{\frac{1}{r}}C(s,r;X)\quad(1\leq r<\infty)\ \text{and}\ \lim_{r\to\infty}C(s,r;X)=C(s,\infty;X).$$

In what follows, we consider the case of $X=\boldsymbol{R}$. Then we have

$$C(s,\infty;\boldsymbol{R})=\left\|D:\mathrm{Im}\,(B)\to\ell_4^s(\boldsymbol{R})\right\|=\max_{e\in extB_1(\mathrm{Im}\,(B))}\|De\|_s. \tag{22}$$

Also since $\mathrm{Im}\,(B)$ is a hyper plane of $\ell_4^\infty(\boldsymbol{R})$, it follows that an extreme point of

$B_1(\mathrm{Im}\,(B))$ is on the straight line segment combined with two extreme points of $B_1(\ell_4^1(\boldsymbol{R}))$ (cf. [1]). Then we have $extB_1(\mathrm{Im}\,(B)) \subseteq \bigcup_{0\le\lambda\le 1} E_\lambda \subseteq B_1(\mathrm{Im}\,(B))$, where E_λ denotes the set of all $\lambda\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_4\end{bmatrix}+(1-\lambda)\begin{bmatrix}\varepsilon_1'\\ \vdots\\ \varepsilon_4'\end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^4$ such that

(i) $\max_{1\le j\le 4}\left|\lambda\varepsilon_j+(1-\lambda)\varepsilon_j'\right|=1$,

(ii) $\lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_3)+(1-\lambda)(\varepsilon_1'+\varepsilon_2'+\varepsilon_3'-\varepsilon_3')=0$,

(iii) $\varepsilon_j=\pm 1,\ \varepsilon_j'=\pm 1\ (j=1,\cdots,4)$,

(iv) $\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_4\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}\varepsilon_1'\\ \vdots\\ \varepsilon_4'\end{bmatrix}$ in case of $0<\lambda<1$.

By considering the suitable cases, we can conclude that

$$C(s,\infty;\boldsymbol{R})=\max\left(2,\ 2^{\frac{1}{s}},\ \frac{2}{3}\cdot 3^{\frac{1}{s}}\right)=2 \ \text{ for }\ 1\le s<\infty .$$

On the other hand, solve the inequality $2<2^{1-\frac{1}{r}}\cdot 3^{\frac{1}{s}-\frac{1}{2}}$ $(1\le s<2,\ r\ge 1)$ for r. Then we obtain that $r>\frac{\log 4}{\log 3}\left(-2+\frac{4}{2-s}\right)$. Therefore we obtain the desired result. 証終

しかしながら、上の領域について $C(s,r;R)<C(s,r;R^2)<C(s,r;R^3)$ であるかどうかは不明である。

次に $\min\left(s,\frac{s}{s-1}\right)>r$ を満たす指数領域について考察する。U. Haagerupは、$C(2,r;H)=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}}$ for $1\le r\le r_0\,(=1.84742\cdots)$ (where r_0 is the unique solution of the equation : $\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$, $1<r<2$) であることを示し、更に $C(2,r;H)$ for $r_0\le r<2$ はガンマ関数によって表現されるある定数によって抑えられることを示した (cf. [4]). しかしこの定数が最良かどうか不明である。読者は [6], [7], [8], [9], [10] 等の文献を参照されると良い。 以上のようにこの指数領域は最良定数を決定するのに困難な領域であるが、一般に次の事が言える。

Theorem 4. If $1\le r\le s<\infty$, then $C(s,r;\boldsymbol{R})=C(s,r;H)$ for all non-trivial real Hilbert space H .

証明の方針：先ず Minkowski 不等式及びその逆不等式を利用して、X に関する cotype 定数と任意の測度空間上の X-値 Bochner 可積分関数のつくるある L_p-空間に関するcotype 定数は変わらないことを証明し、次に 可分な Hilbert 空間は

$L_p(\mathbf{R})$ $(p \geq 1)$ に等距離同型に埋め込まれると言う事実 (cf. [3, p. 123]) を用いて結果を得る。 証終

特に $r = 1$ の場合は実際最良定数を決定することができ、次の結果を得る。

Theorem 5. If $1 \leq s < \infty$, then $C(s, 1; H) = 2^{\frac{1}{s}-1}$ for all non-trivial real Hilbert space H.

略証。Preserve the notations in the proof of Theorem 3. Note first that the extreme points of the unit ball of $\ell_4^1(\mathbf{R})$ are

$$\pm\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ \pm\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\ \pm\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\ \pm\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Since an extreme point of the unit ball of $\mathrm{Im}\,(B)$ is on the straight line segment combined with two extreme points of the unit ball of $\ell_4^1(\mathbf{R})$, it follows from an easy computation that the extreme points of the unit ball of $\mathrm{Im}\,(B)$ belong to the set of the following vectors :

$$\pm\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix},\ \pm\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix},\ \pm\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix},\ \pm\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix},\ \pm\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix},\ \pm\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Hence we have

$$C(s, 1; \mathbf{R}) = \left\| D : \mathrm{Im}\,(B) \to \ell_4^s(\mathbf{R}) \right\| = \sqrt[r]{\left(\frac{1}{2}\right)^r + \left(\frac{1}{2}\right)^r} = 2^{\frac{1}{r}-1}.$$

証終

References

[1] G. R. Belitskii and Yu. I. Lyubich, Matrix Norms and their Applications, Operator Theory Advances and Applications 36, Birkhäuser, Basel, 1988.

[2] P. S. Bullen, D. S. Mitrinovic and P. M. Vasic, Means and Their Inequalities, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht/Boston/Lancaster/Tokyo, 1988.

[3] T. Figiel, T. Iwaniec and A. Pelczynski, Computing norms and critical exponents of some operators in L^p-spaces, Studia Math., 79(1984), 227-274.

[4] U. Haagerup, The best constant in the Khintchine inequality, Studia Math., 70 (1982), 231-283.

[5] H. Hornich, Eine Ungleichung für Vektorlangen, Math. Z., 48(1942), 268-274.

[6] M. Kato and Y. Takahashi, Type, cotype constants and Clarkson's inequalities for

Banach spaces, Math. Nachr., 186(1997), 187-196.
[7] R. Latala and K. Oleszkiewicz, On the best constant in the Khinchin-Kahane inequality, Studia Math., 109(1994), 101-104.
[8] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach Spaces, Lecture Notes in Math. 338, Springer-Verlag, Berlin-Heiderberg-New York, 1973.
[9] D. M. Smiley and M. F. Smiley, The polygonal inequalities, Amer. Math. Monthly, 71(1964), 755-760.
[10] S. J. Szarek, On the best constants in the Khinchin inequality, Studia Math., 58 (1976), 197-208.
[11] L. R. Williams and J. H. Wells, L^p inequalities, J. Math. Anal. Appl., 64(1978), 518-529.
[12] 高橋眞映・高橋泰嗣, Some convexity constants related to Hlawka inequalities in Banach spaces, RIMS Kokyuroku, 1027(1998), 122-125.