数理解析研究所講究録
1136 巻 2000 年 60-75

Iterative Methods for Approximation of Fixed Points and Feasibility Problems
(点列的不動点近似法と制約可能性問題)

Wataru Takahashi (高橋　渉)

TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF MATHEMATICAL AND COMPUTING SCIENCES
(東京工業大学大学院情報理工学研究科)

1 はじめに

H を Hilbert 空間とし，$C_1, C_2, \dots, C_r$ をその共通部分 C_0 が空でない H の閉凸集合とする．距離射影 $P_i:\ H \to C_i\ (i = 1, 2, \dots, r)$ のみが与えられて，ある点列的近似法によって C_0 の元を求めよ，という問題がある．このような問題は制約可能性問題と関係がある．実際，$\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ を H 上で定義された r 個の連続凸関数とする．このとき，凸制約可能性問題とは，凸不等式のシステム

$$C_0 = \{x \in H : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, 2, \dots, r\}$$

に対して，C_0 の元 x を見つけよ，というものである．

Crombetz [2] は，H から C_i への距離射影 $P_i\ (i = 1, 2, \dots, r)$ の凸結合からなる写像

$$T = \alpha_0 I + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i T_i$$

を考え（ただし，$T_i = I + \lambda_i(P_i - I),\quad 0 < \lambda_i < 2\ (i = 1, 2, \dots, r)$ であり，

$$\alpha_i > 0\ (i = 1, 2, \dots, r),\quad \sum_{i=0}^{r} \alpha_i = 1$$

とする），H の任意の元 x に対して，点列 $\{T^n x\}$ は C_0 の元に弱収束するということを示した．後に，北原-高橋 [5] と高橋-田村 [13] はこれを一様凸な Banach 空間の場合まで拡張した．一方，我々は，非拡大写像 T の 2 つの不動点近似法を知ってる．Halpern[3] によって導入された点列的近似法

$$x_0 = x \in H,\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) T x_n\ (n = 0, 1, 2, \dots)$$

と，あとは Mann[6] によって導入された

$$x_0 = x \in H,\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n\ (n = 0, 1, 2, \dots)$$

の近似法である．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ である．

ここでは，まず初めに，Halpern と Mann による点列的不動点近似法を Hilbert 空間で議論している．つぎにこれらの定理を Banach 空間の場合に拡張する．1つは塩路-高橋 [9] による強収束定理であり，他の1つは Reich[7] による弱収束定理である．このあと，非拡大レトラクトの凸結合によって解かれる制約可能性問題を考える．

2 準備

E を Banach 空間とし，E^* をその共役空間とする．$x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値を $x^*(x)$ または (x, x^*) で表す．E における点列 $\{x_n\}$ が x に強収束することを $x_n \to x$ で表し，弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ で表す．

E の凸性の modulus δ は，$0 \leqq \varepsilon \leqq 2$ となる ε に対して

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} : \|x\| \leqq 1,\ \|y\| \leqq 1,\ \|x-y\| \geqq \varepsilon\right\}$$

で定義される．Banach 空間 E が一様凸であるとは，$\varepsilon > 0$ に対して，$\delta(\varepsilon) > 0$ がつねに成り立つときをいう．E の元 x に対して，

$$J(x) = \{x^* \in E^* : (x, x^*) = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

が定義されるが，この J を E 上の duality 写像という．$U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ としよう．このとき，$x, y \in U$ に対して，極限

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \tag{1}$$

を考えよう．E のノルムが Gâteaux 微分可能であるとは，任意の $x, y \in U$ に対して，(1) がつねに存在するときをいう．E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるとは，任意の $y \in U$ に対して，(1) が $x \in U$ に関して一様に収束するときをいう．E のノルムが Fréchet 微分可能であるとは，任意の $x \in U$ に対して，(1) が $y \in U$ に関して一様に収束するときをいう．E が Gâteaux 微分可能なノルムをもてば，E 上の duality 写像は一価写像になる．

E を Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ としよう．A が増大作用素（accretive operator）であるとは，$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対して，つねに $(y_1 - y_2, j) \geqq 0$ となる $j \in J(x_1 - x_2)$ が存在するときをいう．ただし，J は E の duality 写像である．E を Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を増大作用素とする．このとき，すべての $\lambda > 0$ に対して $\overline{D(A)} \subset R(I + \lambda A)$ が成立するならば，A は値域条件（range condition）を満たすといわれる．このとき，$A^{-1}0 = \{x \in D(A) :\ 0 \in Ax\}$ と A の resolvent J_r の不動点の集合 $F(J_r)$ の間には $F(J_r) = A^{-1}0$ という関係がある．また，つぎの定理 [15] は第4節の定理の証明で本質的となる．

定理 2.1（$r \to \infty$ のときの $J_r x$ の収束性）　E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．C を E の空でない閉凸集合で，

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} R(I + rA)$$

を満たすものとする．このとき，$0 \in R(A)$ ならば，任意の $x \in C$ に対して $\lim_{t \to \infty} J_t x$ が存在して，その極限は $A^{-1}0$ に属する．

3 Hilbert 空間での不動点近似法

この節では，Hilbert 空間における Halpern と Mann による点列的不動点近似法を紹介する．H を Hilbert 空間とし，C を H の閉凸部分集合とする．このとき，$T : C \to C$ が

$$\|Tx - Ty\| \leqq \|x - y\| \quad ({}^\forall x, y \in C)$$

を満たすならば，T は C 上で非拡大（nonexpansive）写像であるといわれる．いま，T の不動点の全体を $F(T)$ で表すと，$F(T)$ は閉凸集合となる．Halpern による点列的不動点近似法に関する定理を紹介する前に，つぎの補助定理をあげておく．

補助定理 3.1 $\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ とし，$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ とする．このとき $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n) = 0$ である．

定理 3.2 H を Hilbert 空間とし，C を H の空でない閉凸集合とする．T を C から C への非拡大写像とし，$F(T) \neq \phi$ とする．また P を H から $F(T)$ の上への metric projection とする．$\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ は $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$，$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$，$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ を満たすとする．このとき，$x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) T x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は Px に強収束する．

証明 $x \in C$ とし，$u \in F(T)$ とする．$D = \{z \in C : \|z - u\| \leqq \|x - u\|\}$ とすると，D は C の有界閉凸集合であり，$x \in D$ でもある．また，$z \in D$ とすると，$Tz \in C$ であり，かつ $\|Tz - u\| \leqq \|z - u\|$ でもあるから，$Tz \in D$ である．そこで，一般性を失うことなしで C を有界であると仮定できる．$K = \sup\{\|z\| : z \in C\}$ とすると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_n\| &= \|\alpha_n x + (1 - \alpha_n) T x_n - \alpha_{n-1} x - (1 - \alpha_{n-1}) T x_{n-1}\| \\
&\leqq |\alpha_n - \alpha_{n-1}| \|x\| + (1 - \alpha_n) \|T x_n - T x_{n-1} + |\alpha_n - \alpha_{n-1}| \|T x_{n-1}\| \\
&\leqq 2K |\alpha_n - \alpha_{n-1}| + (1 - \alpha_n) \|x_n - x_{n-1}\|
\end{aligned}$$

となる．そこで，$n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+m+1} - x_{n+m}\| \\
&\leqq 2K |\alpha_{n+m} - \alpha_{n+m-1}| + (1 - \alpha_{n+m}) \|x_{n+m} - x_{n+m-1}\| \\
&\leqq 2K |\alpha_{n+m} - \alpha_{n+m-1}| + (1 - \alpha_{n+m}) \\
&\qquad \big(2K |\alpha_{n+m-1} - \alpha_{n+m-2}| + (1 - \alpha_{n+m-1}) \|x_{n+m-1} - x_{n+m-2}\|\big) \\
&\leqq 2K (|\alpha_{n+m} - \alpha_{n+m-1}| + |\alpha_{n+m-1} - \alpha_{n+m-2}|) \\
&\qquad\qquad + (1 - \alpha_{n+m})(1 - \alpha_{n+m-1}) \|x_{n+m-1} - x_{n+m-2}\| \\
&\leqq 2K \sum_{k=m}^{n+m-1} |\alpha_{k+1} - \alpha_k| + \prod_{k=m}^{n+m-1} (1 - \alpha_{k+1}) \|x_{m+1} - x_m\|
\end{aligned}$$

となる．よって

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\| = \limsup_{n\to\infty}\|x_{n+m+1}-x_{n+m}\| \leqq 2K\sum_{k=m}^{\infty}|\alpha_{k+1}-\alpha_k|$$

となる．$m\to\infty$ とすると，仮定より $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{k+1}-\alpha_k|<\infty$ であるから

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\| \leqq 0$$

を得る．よって $\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0$ である．また，$n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}\|x_n-Tx_n\| &= \|\alpha_{n-1}x+(1-\alpha_{n-1})Tx_{n-1}-Tx_n\|\\ &\leqq \alpha_{n-1}\|x-Tx_n\|+(1-\alpha_{n-1})\|Tx_{n-1}-Tx_n\|\\ &\leqq 2K\alpha_{n-1}+\|x_{n-1}-x_n\|\end{aligned}$$

であるから，$\|x_n-Tx_n\|\to 0$ を得る．つぎに

$$\limsup_{n\to\infty}(Tx_n-Px,\, x-Px) \leqq 0$$

を示す．上極限の性質より

$$\limsup_{n\to\infty}(Tx_n-Px,\, x-Px) = \lim_{n\to\infty}(Tx_{n_k}-Px,\, x-Px)$$

となる $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}$ が存在する．$\{x_{n_k}\}$ は有界だから，弱収束する部分列 $\{x_{n_{k_i}}\}$ をもつ．一般性を失うことなしで $x_{n_k}\rightharpoonup z$ と仮定できる．また $\|x_n-Tx_n\|\to 0$ より $Tx_{n_k}\rightharpoonup z$ でもある．よって，

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}(Tx_n-Px,\, x-Px) &= \lim_{n\to\infty}(Tx_{n_k}-Px,\, x-Px)\\ &= (z-Px,\, x-Px) \leqq 0\end{aligned}$$

となる．よって

$$\limsup_{n\to\infty}(Tx_n-Px,\, x-Px) \leqq 0$$

である．そこで，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $m\in\mathbb{N}$ が存在して，$n\geqq m$ ならば

$$(Tx_n-Px,\, x-Px)\leqq\varepsilon,\ \alpha_n\|x-Px\|^2\leqq\varepsilon$$

となるようにできる．いま，$n\geqq m$ とすると

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-Px\|^2 &= \|\alpha_n x+(1-\alpha_n)Tx_n-Px\|^2\\ &= \alpha_n^2\|x-Px\|^2+2\alpha_n(1-\alpha_n)(Tx_n-Px,\, x-Px)+(1-\alpha_n)^2\|Tx_n-Px\|^2\\ &\leqq \alpha_n\varepsilon+2\alpha_n(1-\alpha_n)\varepsilon+(1-\alpha_n)\|Tx_n-Px\|^2 \leqq 3\alpha_n\varepsilon+(1-\alpha_n)\|Tx_n-Px\|^2\\ &\leqq 3\alpha_n\varepsilon+(1-\alpha_n)\|x_n-Px\|^2\\ &= 3\varepsilon\bigl(1-(1-\alpha_n)\bigr)+(1-\alpha_n)\|x_n-Px\|^2\end{aligned}$$

である．よって，$n \geqq m$ ならば

$$
\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - Px\|^2 \\
&\quad \leqq 3\varepsilon\bigl(1 - (1-\alpha_n)\bigr) + (1-\alpha_n)\bigl(3\varepsilon(1-(1-\alpha_{n-1})) + (1-\alpha_{n-1})\|x_{n-1} - Px\|^2\bigr) \\
&\quad = 3\varepsilon\bigl(1 - (1-\alpha_n)(1-\alpha_{n-1})\bigr) + (1-\alpha_n)(1-\alpha_{n-1})\|x_{n-1} - Px\|^2
\end{aligned}
$$

を得る．同様にして，

$$
\|x_{n+1} - Px\|^2 \leqq 3\varepsilon\left(1 - \prod_{k=m}^{n}(1-\alpha_k)\right) + \prod_{k=m}^{n}(1-\alpha_k)\|x_m - Px\|^2
$$

を得る．よって

$$
\limsup_{n\to\infty}\|x_{n+1} - Px\|^2 \leqq 3\varepsilon
$$

である．$\varepsilon > 0$ は任意なので，$\limsup_{n\to\infty}\|x_{n+1} - Px\|^2 \leqq 0$ となり，$x_n \to Px$ を得る． ■

つぎに，Mann による点列的不動点近似法に関する定理を紹介する．

定理 3.3 H を Hilbert 空間とし，C を H の空でない閉凸集合とする．T を C から C への非拡大写像とし，$F(T) \neq \phi$ とする．$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ は $0 \leqq \alpha_n < 1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(1-\alpha_n) = \infty$ を満たすとする．このとき

$$
x_1 = x \in C,\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n \quad (n = 1, 2, \dots)
$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(T)$ の元 z に弱収束する．

証明 $u \in F(T)$ とする．このとき

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u\| = \|\alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n - u\| &\leqq \alpha_n\|x_n - u\| + (1-\alpha_n)\|Tx_n - u\| \\
&\leqq \alpha_n\|x_n - u\| + (1-\alpha_n)\|x_n - u\| = \|x_n - u\|
\end{aligned}
$$

となるから，$\lim_{n\to\infty}\|x_n - u\|$ が存在する．$\lim_{n\to\infty}\|x_n - u\| = c$ とする．

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u\|^2 &= \|\alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n - u\|^2 \\
&= {\alpha_n}^2\|x_n - u\|^2 + (1-\alpha_n)^2\|Tx_n - u\|^2 + 2\alpha_n(1-\alpha_n)(x_n - u,\, Tx_n - u) \\
&= {\alpha_n}^2\|x_n - u\|^2 + 2\alpha_n(1-\alpha_n)\|x_n - u\|^2 \\
&\quad + (1-\alpha_n)^2\|Tx_n - u\|^2 + 2\alpha_n(1-\alpha_n)(x_n - u,\, Tx_n - x_n) \\
&\leqq \bigl({\alpha_n}^2 + 2\alpha_n(1-\alpha_n) + (1-\alpha_n)^2\bigr)\|x_n - u\|^2 \\
&\qquad\qquad + 2\alpha_n(1-\alpha_n)(x_n - u,\, Tx_n - x_n) \\
&= \|x_n - u\|^2 - 2\alpha_n(1-\alpha_n)(u - x_n,\, Tx_n - x_n)
\end{aligned}
$$

であるが

$$
2(u - x_n,\, Tx_n - x_n) = \|u - x_n\|^2 + \|Tx_n - x_n\|^2 - \|u - Tx_n\|^2
$$

であることより

$$
\|x_{n+1} - u\|^2 \leqq \|x_n - u\|^2 - \alpha_n(1-\alpha_n)\bigl(\|u - x_n\|^2 + \|Tx_n - x_n\|^2 - \|u - Tx_n\|^2\bigr)
$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\alpha_n(1-\alpha_n)\|Tx_n - x_n\|^2 &\leqq \|x_n - u\|^2 - \|x_{n+1} - u\|^2 \\ &\qquad - \alpha_n(1-\alpha_n)\big(\|u - x_n\|^2 - \|u - Tx_n\|^2\big) \\ &\leqq \|x_n - u\|^2 - \|x_{n+1} - u\|^2\end{aligned}$$

である．そこで，$\lim_{n\to\infty}\|x_n - u\| = c$ から

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(1-\alpha_n)\|Tx_n - x_n\|^2 \leqq \|x_1 - u\|^2 - c^2$$

を得る．よって，$\liminf_{n\to\infty}\|Tx_n - x_n\| = 0$ である．$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n$ の定義より

$$\begin{aligned}\|Tx_{n+1} - x_{n+1}\| &= \|Tx_{n+1} - \alpha_n x_n - (1-\alpha_n)Tx_n\| \\ &= (1-\alpha_n)\|Tx_{n+1} - Tx_n\| + \alpha_n\|Tx_{n+1} - x_n\| \\ &\leqq (1-\alpha_n)\|x_{n+1} - x_n\| + \alpha_n\|Tx_{n+1} - x_{n+1}\| + \alpha_n\|x_{n+1} - x_n\| \\ &= \|x_{n+1} - x_n\| + \alpha_n\|Tx_{n+1} - x_{n+1}\| \\ &= (1-\alpha_n)\|Tx_n - x_n\| + \alpha_n\|Tx_{n+1} - x_{n+1}\|\end{aligned}$$

を得る．よって $\|Tx_{n+1} - x_n\| \leqq \|Tx_n - x_n\|$ である．そこで

$$\lim_{n\to\infty}\|Tx_n - x_n\| = \liminf_{n\to\infty}\|Tx_n - x_n\| = 0$$

を得る．$\{x_n\}$ が $F(T)$ の点に弱収束することを示すには $x_{n_i} \rightharpoonup z_1$，$x_{n_j} \rightharpoonup z_2$ のとき，$z_1 = z_2 \in F(T)$ を示せばよい．いま，$z_1 \neq Tz_1$ とすると，

$$\begin{aligned}\liminf_{i\to\infty}\|x_{n_i} - z_1\| < \liminf_{i\to\infty}\|x_{n_i} - Tz_1\| &= \liminf_{i\to\infty}\|x_{n_i} - Tx_{n_i} + Tx_{n_i} - Tz_1\| \\ &\leqq \liminf_{i\to\infty}\|x_{n_i} - z_1\|\end{aligned}$$

となり，矛盾を得る．よって $z_1 \in F(T)$ である．同様に，$z_2 \in F(T)$ である．$z_1 = z_2$ を示す．$z_1 \neq z_2$ とすると

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|x_n - z_1\| = \lim_{i\to\infty}\|x_{n_i} - z_1\| &< \lim_{i\to\infty}\|x_{n_i} - z_2\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\|x_n - z_2\| = \lim_{j\to\infty}\|x_{n_j} - z_2\| \\ &< \lim_{j\to\infty}\|x_{n_j} - z_1\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n - z_1\|\end{aligned}$$

となり，矛盾を得る．よって，$z_1 = z_2$ であり，$\{x_n\}$ は $F(T)$ の点に弱収束する． ■

4 Banach 空間での不動点近似法

この節では，第3節の結果（定理3.2，定理3.3）を Banach 空間の場合まで拡張する．その前に塩路-高橋 [9] によって証明された Banach limit に関する2つの補助定理を証明しておく．

補助定理 4.1　a を実数とし，$(a_1, a_2, \ldots) \in \ell^\infty$ とする．このとき，すべての Banach limit μ に対して，$\mu_n(a_n) \leqq a$ が成り立つための必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $m \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$\frac{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p-1}}{p} < a + \varepsilon \quad ({}^\forall p \geqq m,\ {}^\forall n \in \mathbb{N}) \tag{2}$$

が成り立つことである．

証明　$(\Rightarrow)$ を証明する．まず，ℓ^∞ 上の関数 q を

$$q_n(b_n) = \varlimsup_{p\to\infty} \sup_n \frac{1}{p} \sum_{i=n}^{n+p-1} b_i \quad ({}^\forall (b_1, b_2, \ldots) \in \ell^\infty)$$

で定義する．すると，q は sublinear な関数になる．そこで ℓ^∞ 上の線形汎関数で

$$\mu \leqq q, \quad \mu_n(a_n) = q_n(a_n)$$

を満たすものが存在する．μ が Banach limit になることはよい．仮定より，$\mu_n(a_n) = q_n(a_n) \leqq a$ である．よって，$\varepsilon > 0$ に対して，ある $m \in \mathbb{N}$ が存在し，

$$\sup_n \frac{1}{p} \sum_{i=n}^{n+p-1} a_i < a + \varepsilon \quad ({}^\forall p \geqq m)$$

となる．

$(\Leftarrow)$ を証明する．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$m \in \mathbb{N}$ が存在し，(2) が成立するとしよう．μ を Banach limit とする．すると

$$\mu_n(a_n) = \mu_n\left(\frac{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+m-1}}{m}\right) \leqq a + \varepsilon$$

となる．ここで，$\varepsilon > 0$ は任意であるから，$\mu_n(a_n) \leqq a$ となる．■

補助定理 4.2　a を実数とし，$(a_1, a_2, \ldots) \in \ell^\infty$ とする．すべての Banach limit μ に対して，$\mu_n(a_n) \leqq a$ が成り立ち，かつ

$$\varlimsup_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) \leqq 0$$

であれば，$\varlimsup_{n\to\infty} a_n \leqq a$ が成り立つ．

証明　$\varepsilon > 0$ とする．前の補助定理より，$p \geqq 2$ となる $p \in \mathbb{N}$ が存在し，

$$\frac{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p-1}}{p} < a + \frac{\varepsilon}{2} \quad ({}^\forall n \in \mathbb{N})$$

となる．いま，$m \in \mathbb{N}$ を

$$a_{n+1} - a_n < \frac{\varepsilon}{p-1} \quad ({}^\forall n \geqq m)$$

となるように選ぶ．このとき，$n \geqq m + p$ ならば

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-i} + (a_{n-i+1} - a_{n-i}) + (a_{n-i+2} - a_{n-i+1}) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \\ &\leqq a_{n-i} + \frac{i\varepsilon}{p-1} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, p-1) \end{aligned}$$

である．そこで

$$a_n \leqq \frac{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{n-p+1}}{p} + \frac{1}{p} \cdot \frac{(p-1)p}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{p-1} \leqq a + \varepsilon$$

となる．よって

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n \leqq a + \varepsilon$$

となる．$\varepsilon > 0$ は任意なので，$\varlimsup_{n\to\infty} a_n \leqq a$ である． ■

塩路-高橋 [9] によって証明されたつぎの定理は，定理 3.2 を Banach 空間の場合に拡張するものである．

定理 4.3 E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸 Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．T を C から C への非拡大写像とし，$F(T) \neq \phi$ とする．$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ は $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$，$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$，$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ を満たすものとする．このとき，$x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) T x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列は $F(T)$ の元に強収束する．

証明 $x \in C$ とし，$u \in F(T)$ とする．いま

$$D = \{z \in C : \|z - u\| \leqq \|x - u\|\}$$

とすると，D は有界，閉凸集合であり，$x \in D$ でもある．また，$z \in D$ とすると $Tz \in C$ であり，かつ $\|Tz - u\| \leqq \|z - u\|$ であるから，D は T のもとで不変でもある．そこで，一般性を失うことなしで，C は有界であると仮定してもよい．

まず，定理 3.2 の証明と同様にして，$\|x_{n+1} - x_n\| \to 0$ を証明することができる．その結果として，$\|x_n - Tx_n\| \to 0$ も証明できる．つぎに

$$\varlimsup_{n\to\infty} \bigl(x - z,\, J(x_n - z)\bigr) \leqq 0 \tag{3}$$

を証明する．μ を Banach limit とし，$0 < t < 1$ とする．

$$\begin{aligned} \|x_n - Tz_t\|^2 &= \|x_n - Tx_n + Tx_n - Tz_t\|^2 \\ &\leqq \|x_n - Tx_n\|^2 + \|x_n - z_t\|^2 + 2\|x_n - Tx_n\|\|x_n - z_t\| \end{aligned}$$

なので

$$\mu_n \|x_n - Tz_t\|^2 \leqq \mu_n \|x_n - z_t\|^2 \tag{4}$$

である．$(1-t)(x_n - Tz_t) = x_n - z_t - t(x_n - x)$ から

$$\begin{aligned} (1-t)^2 \|x_n - Tz_t\|^2 &\geqq \|x_n - z_t\|^2 - 2t\bigl(x_n - x,\, J(x_n - z_t)\bigr) \\ &= (1-2t)\|x_n - z_t\|^2 + 2t\bigl(x - z_t,\, J(x_n - z_t)\bigr) \end{aligned}$$

を得る．これより

$$(1-t)^2 \mu_n \|x_n - Tz_t\|^2 \geqq (1-2t)\mu\|x_n - z_t\|^2 + 2t\mu_n\bigl(x - z_t,\, J(x_n - z_t)\bigr)$$

であり，(4) を使うと

$$(1-t)^2\mu_n\|x_n-z_t\|^2 \geqq (1-2t)\mu_n\|x_n-z_t\|^2+2t\mu_n\big(x-z_t,\ J(x_n-z_t)\big)$$

となる．よって

$$\frac{t}{2}\mu_n\|x_n-z_t\|^2 \geqq \mu_n\big(x-z_t,\ J(x_n-z_t)\big)$$

となる．$\varepsilon>0$ に対して，$z_t\to z$ と E が一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつことより

$$\big|\big(x-z,\ J(x_n-z)\big)-\big(x-z,\ J(x_n-z_t)\big)\big| < \frac{\varepsilon}{3} \quad ({}^\forall n)$$
$$\big|\big(x-z,\ J(x_n-z_t)\big)-\big(x-z_t,\ J(x_n-z_t)\big)\big| < \frac{\varepsilon}{3} \quad ({}^\forall n)$$

となるような十分大きな $t>0$ をとることができる．また，$t>0$ を十分大きくとれば

$$\mu_n\big(x-z_t,\ J(x_n-z_t)\big) \leqq \frac{\varepsilon}{3}$$

とできる．よって，十分大きな t をとると

$$\begin{aligned}\mu_n\big(x-z,\ J(x_n-z)\big) &= \mu_n\big(x-z,\ J(x_n-z)\big)-\mu_n\big(x-z,\ J(x_n-z_t)\big)\\ &\quad+\mu_n\big(x-z,\ J(x_n-z_t)\big)-\mu_n\big(x-z_t,\ J(x_n-z_t)\big)\\ &\quad+\mu_n\big(x-z_t,\ J(x_n-z_t)\big)\\ &\leqq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

となり，$\mu_n\big(x-z,\ J(x_n-z)\big)\leqq 0$ となる．また，$\|x_{n+1}-x_n\|\to 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\big|\big(x-z,\ J(x_{n+1}-z)\big)-\big(x-z,\ J(x_n-z)\big)\big|=0$$

である．ここで補助定理 4.2 を使うと

$$\limsup_{n\to\infty}\big(x-z,\ J(x_n-z)\big)\leqq 0$$

を得る．最後に，$\{x_n\}$ が $F(T)$ の元 z に強収束することを示す．

$$(1-\alpha_n)(Tx_n-z)=x_{n+1}-z-\alpha_n(x-z)$$

であるから

$$(1-\alpha_n)^2\|Tx_n-z\|^2 \geqq \|x_{n+1}-z\|^2-2\alpha_n\big(x-z,\ J(x_{n+1}-z)\big)$$

を得る．これから

$$\|x_{n+1}-z\|^2 \leqq (1-\alpha_n)\|x_n-z\|^2+2\big(1-(1-\alpha_n)\big)\big(x-z, J(x_{n+1}-z)\big)$$

を得る．また，(3) より，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $m\in\mathbb{N}$ が存在して

$$\big(x-z,\ J(x_n-z)\big)\leqq\frac{\varepsilon}{2} \quad ({}^\forall n\geqq m)$$

とできる．あとは，定理 3.2 の証明と同様にして

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n-z\|^2\leqq\varepsilon$$

を得る．$\varepsilon > 0$ は任意なので，$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - z\|^2 \leqq 0$ となり，$x_n \to z$ を得る． ■

Reich[7] によって証明されたつぎの定理は，定理 3.3 を Banach 空間の場合に拡張するものである．その前に，補助定理を 1 つ述べておく．

補助定理 4.4　E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様な凸 Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．$\{T_1, T_2, T_3, \dots\}$ を C から C への非拡大写像の列とし，$\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \phi$ を仮定する．$x \in C$ とし，$S_n = T_n T_{n-1} \dots T_1$ $(n \in \boldsymbol{N})$ とする．このとき，集合

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{co}\{S_m x : m \geqq n\} \cap U$$

は高々一点からなる．ただし，$U = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ である．

定理 4.5　E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸 Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．T を C から C への非拡大写像とし，$F(T) \neq \phi$ とする．$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ は $0 \leqq \alpha_n < 1$，$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) = \infty$ を満たすものとする．このとき $x_1 = x \in C$，

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(T)$ の元 z に弱収束する．

証明　$u \in F(T)$ とする．このとき

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u\| &= \|\alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T x_n - u\| \\
&\leqq \alpha_n \|x_n - u\| + (1-\alpha_n)\|T x_n - u\| \\
&\leqq \alpha_n \|x_n - u\| + (1-\alpha_n)\|x_n - u\| \\
&= \|x_n - u\|
\end{aligned}$$

となるから，$\lim_{n\to\infty} \|x_n - u\|$ が存在する．$\lim_{n\to\infty} \|x_n - u\| = c$ とすると，一般性を失うことなしで，$c \neq 0$ と仮定できる．

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u\| &= \|\alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T x_n - u\| \\
&= \|\alpha_n (x_n - u) + (1-\alpha_n)(T x_n - u)\| \\
&\leqq \|x_n - u\| \left\{ 1 - 2\alpha_n (1-\alpha_n) \delta \left(\frac{\|T x_n - x_n\|}{\|x_n - u\|} \right) \right\}
\end{aligned}$$

から

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (1-\alpha_n) \delta \left(\frac{\|T x_n - x_n\|}{\|x_n - x\|} \right) \leqq \|x_1 - u\| - c < +\infty$$

を得る．$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) = \infty$ より

$$\lim_{n\to\infty} \delta \left(\frac{\|T x_n - x_n\|}{\|x_n - x\|} \right) = 0$$

を得る．δ の性質より

$$\lim_{n\to\infty}\|Tx_n - x_n\| = 0$$

を得る．一方

$$\begin{aligned}
\|Tx_{n+1} - x_{n+1}\| &\leqq \alpha_n\|Tx_{n+1} - x_n\| + (1-\alpha_n)\|Tx_{n+1} - Tx_n\| \\
&\leqq \alpha_n\|Tx_{n+1} - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\| \\
&\leqq \alpha_n\|Tx_{n+1} - x_{n+1}\| + (1-\alpha_n)\|Tx_n - x_n\|
\end{aligned}$$

であるので，$\|Tx_{n+1} - x_{n+1}\| \leqq \|Tx_n - x_n\|$ となる．よって

$$\lim_{n\to\infty}\|Tx_n - x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|Tx_n - x_n\| = 0$$

となる．$\{x_n\}$ が $F(T)$ の元に弱収束することを示すには，$\{x_n\}$ の弱収束する部分列の極限が $F(T)$ の元であり，かつその極限がすべて同じであることをいえばよい．いま，$x_{n_i} \rightharpoonup v$ とすると，$x_n - Tx_n \to 0$ より，$v \in F(T)$ である．また

$$T_n z = \alpha_n z + (1-\alpha_n)Tz \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおけば，$x_{n+1} = T_n T_{n-1} \dots T_1 x$ とかける．そこで $v \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{co}\{x_m : m \geqq n\}$ でもある．よって補助定理 4.4 を使えば

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{co}\{x_m : m \geqq n\} \cap F(T) = \{v\}$$

となる．だから $\{x_n\}$ は $F(T)$ の元に弱収束する．■

5 制約可能性問題

H を Hilbert 空間とし，$C_1, C_2, \dots, C_r$ を $C_0 = \bigcap_{i=1}^{r} C_i \neq \phi$ となる H の空でない閉凸集合とする．このとき，H から C_i の上への距離射影 P_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ のみを用いて，C_0 の元をもとめるという点列的近似法は $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ を H 上の実数値連続凸関数の r 個の族に対して，

$$C_0 = \{x \in H : g_i(x) \leqq 0,\ i = 1, 2, \dots, r\}$$

となる C_0 の元を見つけるという制約可能性問題と関係がある．

この節では，第 4 節の点列的不動点近似法を用いて，制約可能性問題を考察してみる．

C を Banach 空間 E の空でない凸集合とする．$T_1, T_2, \dots, T_r$ を C から C への r 個の写像とし，$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ を $0 \leqq \alpha_i \leqq 1$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ となる r 個の実数とする．このとき，

C から C への写像 W を

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \alpha_1 T_1 + (1-\alpha_1)I, \\
U_2 &= \alpha_2 T_2 U_1 + (1-\alpha_2)I, \\
&\ \vdots \\
U_{r-1} &= \alpha_{r-1} T_{r-1} U_{r-2} + (1-\alpha_{r-1})I, \\
W = U_r &= \alpha_r T_r U_{r-1} + (1-\alpha_r)I
\end{aligned} \tag{5}
$$

で定義する．このような写像 W は $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される $W-$ 写像といわれる．つぎの補助定理はこの節では大切である．

補助定理 5.1　E を狭義凸な Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．$T_1, T_2, \ldots, T_r$ を $\bigcap_{i=1}^{r} F(T_i) \neq \phi$ となる．C から C への r 個の非拡大写像とし，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$，$0 < \alpha_r \leqq 1$ となる r 個の実数とする．また，W を $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される $W-$ 写像とする．このとき，つぎの式が成立する．

$$F(W) = \bigcap_{i=1}^{r} F(T_i).$$

証明　$U_1, U_2, \ldots, U_{r-1}, U_r$ と W を $(*)$ によって定義される C から C への写像とする．

$$\bigcap_{i=1}^{r} F(T_i) \subset F(W)$$

は簡単に証明できる．そこで，$F(W) \subset \bigcap_{i=1}^{r} F(T_i)$ を証明する．$z \in F(W)$，$w \in \bigcap_{i=1}^{r} F(T_i)$ とする．$z = Wz = \alpha_r T_r U_{r-1} z + (1-\alpha_r) z$ であるから，$\alpha_r z = \alpha_r T_r U_{r-1} z$ である．$0 < \alpha_r \leqq 1$ であるので，$z = T_r U_{u-1} z$ である．よって

$$
\begin{aligned}
\|z - w\| &= \|T_r U_{r-1} z - w\| \leqq \|U_{r-1} z - w\| = \|\alpha_{r-1} T_{r-1} U_{r-2} z + (1-\alpha_{r-1}) z - w\| \\
&\leqq \alpha_{r-1} \|T_{r-1} U_{r-2} z - w\| + (1-\alpha_{r-1}) \|z - w\| \\
&\leqq \alpha_{r-1} \|U_{r-2} z - w\| + (1-\alpha_{r-1}) \|z - w\| \\
&= \alpha_{r-1} \|\alpha_{r-2} T_{r-2} U_{r-3} z + (1-\alpha_{r-2}) z - w\| + (1-\alpha_{r-1}) \|z - w\| \\
&\leqq \alpha_{r-1}\alpha_{r-2} \|T_{r-2} U_{r-3} z - w\| + (1-\alpha_{r-1}\alpha_{r-2}) \|z - w\| \\
&\leqq \alpha_{r-1}\alpha_{r-2} \|U_{r-3} z - w\| + (1-\alpha_{r-1}\alpha_{r-2}) \|z - w\| \\
&= \alpha_{r-1}\alpha_{r-2} \|\alpha_{r-3} T_{r-3} U_{r-4} z + (1-\alpha_{r-3}) z - w\| + (1-\alpha_{r-1}\alpha_{r-2}) \|z - w\| \\
&\leqq \alpha_{r-1}\alpha_{r-2}\alpha_{r-3} \|T_{r-3} U_{r-4} z - w\| + (1-\alpha_{r-1}\alpha_{r-2}\alpha_{r-3}) \|z - w\| \\
&\ \vdots \\
&\leqq \alpha_{r-1}\alpha_{r-2} \ldots \alpha_2 \|T_2 U_1 z - w\| + (1-\alpha_{r-1}\alpha_{r-2} \ldots \alpha_2) \|z - w\| \\
&\leqq \alpha_{r-1}\alpha_{r-2} \ldots \alpha_2 \|U_1 z - w\| + (1-\alpha_{r-1}\alpha_{r-2} \ldots \alpha_2) \|z - w\| \\
&= \alpha_{r-1}\alpha_{r-2} \ldots \alpha_2 \|\alpha_1 T_1 z + (1-\alpha_1) z - w\| + (1-\alpha_{r-1}\alpha_{r-2} \ldots \alpha_2) \|z - w\| \\
&\leqq \alpha_{r-1}\alpha_{r-2} \ldots \alpha_2\alpha_1 \|T_1 z - w\| + (1-\alpha_{r-1}\alpha_{r-2} \ldots \alpha_1) \|z - w\| \\
&\leqq \|z - w\|
\end{aligned}
$$

となる．これから

$$\begin{aligned}\|z-w\| &= \|T_1z-w\| = \|U_1z-w\| \\ &= \|\alpha_1T_1z+(1-\alpha_1)z-w\|\end{aligned}$$

を得る．E は狭義凸であるから $z-w=T_1z-w$ となる．よって $z=T_1z$ である．そこで，$U_1z=z$ である．同様にして

$$\begin{aligned}\|z-w\| &= \|T_2U_1z-w\| = \|U_2x-w\| \\ &= \|\alpha_2T_2U_1z+(1-\alpha_2)z-w\|\end{aligned}$$

である．E が狭義凸で，$U_1z=z$ であるから，$z-w=T_2z-w$ となり，$z=T_2z$ となる．そこで，$U_2z=z$ である．このような方法を繰り返して

$$z=T_kz, \quad z=U_kz \quad (k=3,4,\ldots,r-1)$$

を得る．これから，$z=T_rU_{r-1}z$ となり，$z=T_rz$ を得る．よって，$z\in\bigcap_{i=1}^{r}F(T_i)$ である．これで証明は完了する． ■

補助定理 5.1，定理 4.3，定理 4.5 を用いて，制約可能性問題と関係のあるつぎの 2 つの定理を得ることができる．

定理 5.2　E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸 Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．$T_1,T_2,\ldots,T_r$ を $\bigcap_{i=1}^{r}F(T_i)\neq\phi$ となる r 個の非拡大写像の r 個の族とし，$\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_r$ を $0<\alpha_i<1$ $(i=1,2,\ldots,r-1)$，$0<\alpha_r\leqq 1$ となる r 個の実数とする．W を $T_1,T_2,\ldots,T_r$ と $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ によって生成される $W-$ 写像とし，$\{\beta_n\}\subset[0,1]$ を $\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n=0$，$\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_{n+1}-\beta_n|<\infty$ を満たす実数の列とする．このとき

$$x_1=x\in C, \quad x_{n+1}=\beta_nx+(1-\beta_n)Wx_n \quad (n=1,2,\ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(W)=\bigcap_{i=1}^{r}F(T_i)$ の元に強収束する．

証明　補助定理 5.1 より

$$F(W)=\bigcap_{i=1}^{r}F(T_i)$$

である．これより，$F(W)\neq\phi$ となり，定理 4.3 を用いると $\{x_n\}$ は $F(W)$ の元に強収束する． ■

定理 5.3　E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．$T_1,T_2,\ldots,T_r$ を $\bigcap_{i=1}^{r}F(T_i)\neq\phi$ となる r 個の非拡大写像の r 個の族として，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ を $0<\alpha_i<1$ $(i=1,2,\ldots,r-1)$，$0<\alpha_r\leqq 1$ となる r 個の実数とする．W を $T_1,T_2,\ldots,T_r$ と $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ によって生成される $W-$ 写像とし，$\{\beta_n\}\subset[0,1]$ を $0\leqq\beta_n<1$ $(n=1,2,\ldots)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(1-\beta_n)=\infty$ を満たす実数とする．このとき

$$x_1=x\in C, \quad x_{n+1}=\beta_nx_n+(1-\beta_n)Wx_n \quad (n=1,2,\ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(w)=\bigcap_{i=1}^{r}F(T_i)$ の元に弱収束する．

証明　補助定理 5.1 と定理 4.5 を用いればよい． ∎

定理 5.2，定理 5.3 は有限個の写像の族 $\{T_1, T_2, \ldots, T_r\}$ による定理であったが，これらを加算個の写像の族 $\{T_1, T_2, \ldots\}$ の場合まで拡張できないのだろうか．これに答えたのが，下地-高橋 [8]，木村-高橋 [4] であった．彼らは，$\{T_1, T_2, \ldots\}$ と $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ が与えられたとき，まず，$n\in\mathbb{N}$ に対して，$T_n, T_{n-1}, \ldots, T_1$ と $\alpha_n, \alpha_{n-1}\ldots, \alpha_1$ によって生成される W_n を

$$
\begin{aligned}
U_{n,n+1} &= I,\\
U_{n,n} &= \alpha_n T_n U_{n,n+1} + (1-\alpha_n)I,\\
U_{n,n-1} &= \alpha_{n-1} T_{n-1} U_{n,n} + (1-\alpha_{n-1})I,\\
&\ \vdots\\
U_{n,k} &= \alpha_k T_k U_{n,k+1} + (1-\alpha_k)I,\\
U_{n,k-1} &= \alpha_{k-1} T_{k-1} U_{n,k} + (1-\alpha_{k-1})I\\
&\ \vdots\\
U_{n,2} &= \alpha_2 T_2 U_{n,3} + (1-\alpha_2)I,\\
W_n = U_{n,1} &= \alpha_1 T_1 U_{n,2} + (1-\alpha_1)I
\end{aligned}
$$

で定義し，点列 $\{x_n\}$ を，$\{\beta_n\}\subset[0,1]$ を用いて

$$x_1 = x\in C,\quad x_{n+1}=\beta_n x+(1-\beta_n)W_n x_n\quad (n=1,2,\ldots)$$

または

$$x_{n+1}=\beta_n x_n+(1-\beta_n)W_n x_n\quad (n=1,2,\ldots)$$

の形で定義した．これらの研究は可算個の制約をもつ凸最小化問題にも関係があるので興味のある読者は，参考文献の［8］,［4］を参照されるとよい．

この節の最後に，nonexpansive retraction を用いて，Banach 空間における制約可能性問題を考える．その前に，定義を1つ与えておく．C を Banach 空間 E の閉凸集合とし，D を C の部分集合とする．このとき，C から D の上への nonexpansive retraction が存在するとき，D は C の nonexpansive retract といわれる．

定理 5.4　E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸 Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．$C_1, C_2, \ldots, C_r$ を $\bigcap_{i=1}^{r}C_i\neq\phi$ となる C の r 個の nonexpansive retract とし，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を $0<\alpha_i<1$ $(i=1,2,\ldots,r-1)$，$0<\alpha_r\leqq 1$ となる r 個の実数とする．W を $P_1, P_2, \ldots, P_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される $W-$ 写像とする（ただし，P_i は C から C_i の上への nonexpansive retraction とする）．また，$\{\beta_n\}\subset[0,1]$ を $\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n=\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_{n+1}-\beta_n|<\infty$ を満たすとする．このとき

$$x_1 = x\in C,\quad x_{n+1}=\beta_n x+(1-\beta_n)Wx_n\quad (n=1,2,\ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(W) = \bigcap_{i=1}^{r} C_i$ の元に強収束する．

定理 5.4 は定理 5.2 より明らかである．同様に定理 5.3 を用いれば，つぎの定理が得られる．

定理 5.5 E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．$C_1, C_2, \ldots, C_r$ を $\bigcap_{i=1}^{r} C_i \neq \phi$ となる C の r 個の nonexpansive retract とし，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$, $0 < \alpha_r \leqq 1$ となる r 個の実数とする．W を $P_1, P_2, \ldots, P_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される $W-$ 写像とする（ただし，P_i は C から C_i の上への nonexpansive retraction とする）．また $\beta_n \subset [0,1]$ は $0 \leqq \beta_n < 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(1-\beta_n) = \infty$ を満たすとする．このとき

$$x_1 = x \in C, \quad x_{n+1} = \beta_n x_n + (1-\beta_n) W x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(W) = \bigcap_{i=1}^{r} C_i$ の元に弱収束する．

参考文献

[1] S. Atushiba and W.Takahashi, *Strong convergence theorems for a finite family of nonexpansive mappings and applications*, Indian J. Math., to appear.

[2] G. Crombez, *Image recovery by convex combinations of projections*, J. Math. Anal. Appl., **155**(1991), 413-419.

[3] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc., **73**(1967), 957-961.

[4] Y. Kimura and W. Takahashi, *Weak convergence to common fixed points of countable nonexpansive mappings and its applications*, to appeear.

[5] S. Kitahara and W. Takahashi, *Image recovery by convex combinations for sunny nonexpansive retractions*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **2**(1993), 333-342.

[6] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration.* Proc. Amer. Math. Soc., **4**(1953), 506-510.

[7] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math.Anal. Appl. **67**(1979), 274-276.

[8] K. Shimoji and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of infinite nonexpansive mappings and applications*, to appear.

[9] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorems of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **125**(1997), 3641-3645.

[10] W. Takahashi, *Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications*, Nonlinear Analysis, **30**(1997), 1283-1293.

[11] W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for families of nonexpansive mappings and their applications*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, **51**(1997), 277-292.

[12] W. Takahashi and K. Shimoji, *Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility probelms*, Math. Comput. Modelling, to appear.

[13] W. Takahashi and T. Tamura, *Limit theorems of operators by convex combinations for nonexpansive retractions in Banach space*, J. Approximation Theory, **91**(1997), 386-397.

[14] W. Takahashi and T. Tamura, *Convergence theorems for a pair of nonexpansive mappings*, J. Convex Analysis, **5** (1998), 45-56.

[15] W. Takahashi and Y. Ueda, *On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators*. J. Math. Anal. Appl., **104** (1984), 546-553.

[16] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math., **58**(1992), 486-491.