数理解析研究所講究録
1137 巻 2000 年 51-56

Polynomial hulls of graphs on the torus

奈良教育大学　神保敏弥
(Toshiya Jimbo)

1. 問題と関連する結果

K を $\mathbb{C}^n$ のコンパクト部分集合とし、$C(K)$ を K 上の 複素数値連続関数の Banach 環とする。$f\in C(K)$ のノルムは sup-norm $\|\ \|$ とする。関数 $f_1,\cdots,f_m\in C(K)$ の多項式によって生成される関数環を $[f_1,\cdots,f_m;K]$ とおく。$\mathbb{C}^n$ の座標 $z_1,\cdots,z_n$ によって生成される K 上の関数環を $P(K)$ で表す。K の多項式凸包 polynomial hull $\hat{K}$ は、

$$\hat{K}=\{z\in\mathbb{C}^n:|p(z)|<\|p\|, for\ every\ polynomial\ p\}.$$

によって定義される。$\hat{K}=K$ を満たすとき、K は多項式凸集合 polynomially convex set といわれる。関数 f のグラフを Σ, Σ_f または $\Sigma(f,K)$ で表す、すなわち

$$\Sigma=\{(z,f(z))\in\mathbb{C}^{n+1}:z\in K\}.$$

π は $\mathbb{C}^{n+1}\mapsto\mathbb{C}^n$ への、$\pi(z,z_{n+1})=z,\ z\in\mathbb{C}^n$ によって定義される射影とする。$D=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|<1\}$, $T=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1\}$ とし、$T^2=T\times T$ とする。 $B=\{z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n:\sum_{j=1}^n|z_j|^2<1\}$ とし、その境界である超球面を ∂B で表す。

グラフの多項式凸包については、次のような問題が最近研究されてきている。どんな K,f に対して、

(1) グラフ Σ_f は多項式凸集合となるか？ そのとき、近似問題 $P(\Sigma_f)=C(\Sigma_f)$ すなわち $[z_1,\cdots,z_n,f;K]=C(K)$ は成立するか？

(2) $\hat{\Sigma}\neq\Sigma$ のとき、$\hat{\Sigma}\setminus\Sigma$ の (解析) 構造はどうなっているか？ $\hat{\Sigma}\setminus\Sigma$ のハウスドルフ次元の最大となる例は何か？ などである。

K が円周 T の場合には、Wermer の maximality theorem によって、$f\in C(T)$ のグラフについては、$\pi(\hat{\Sigma})=\bar{D}$ または $\pi(\hat{\Sigma})=T$ のいずれかが起こる。

K が超球面 ∂B の場合には、H.Alexander ([A1]) は、$f\in C(T)$ のグラフについては常に $\pi(\hat{\Sigma})=\bar{B}$ が成立することを示した。さらに f が 超球 $\bar{B}$ 上で多重調和な関数 g の ∂B 上への制限関数ならば、$\hat{\Sigma}_f=\Sigma(g,\bar{B})$ となることを示した。ハウスドルフ次元については、K が $\mathbb{C}^2$ の超球 $\bar{B}$ の場合で、$f(z_1,z_2)=z_1\bar{z}_2$ の時、$\hat{\Sigma}\setminus\Sigma$ は 6 次元になることが示されている ([AR]) 。

ここでは、K を $\mathbb{C}^2$ 内のトーラス $T^2 = T \times T$ とし、関数 f は主に同次多項式の複素共役関数の場合の結果を報告する。

定理. 自然数 n と複素数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, $\lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 0$ に対して、 $J = \{j \in \{1, \cdots, n\} : |\lambda_j| = 1\}$ とし、 $f(z_1, z_2) = (\bar{z}_1 - \bar{\lambda}_1 \bar{z}_2) \cdots (\bar{z}_1 - \bar{\lambda}_n \bar{z}_2)$ とおく。
(1) $J = \phi$ ならば、$\hat{\Sigma} = \Sigma$. さらに $[z_1, z_2, f; T^2] = C(T^2)$,
(2) $J \neq \phi$ ならば、$\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \bigcup_{j \in J} \{(z_1, z_2, 0) : z_1 - \lambda_j z_2 = 0, z_2 \in D\}$.

2. 補題と例

M は $\mathbb{C}^n$ のある開集合 U の C^∞ 級の実多様体とする。点 $x \in M$ での M の接空間を $T_x M$ で表す。 M が全実 totally real であるとは、各 $x \in M$ に対して $T_x M$ が自明でない複素部分空間を含まないときをいう。すなわち、$T_x M \cap i T_x M = \{0\}$.

補題 1. ρ_j, $j = 1, \cdots, n$ を U での C^∞ 級実数値関数とする。$N = \{z \in U : \rho_j(z) = 0,\ j = 1, \cdots, n\}$ とおく。N 上で複素 Jacobian が $\det(\frac{\partial \rho_j}{\partial z_k}) \neq 0$ を満たすとする。このとき、
(1) N は U の totally real submanifold である。
(2) f が U で C^∞ 級関数ならば、グラフ $\Sigma(f, N)$ はまた $U \times \mathbb{C}$ 内の totally real submanifold である。

補題 2. ([NW], cf. [AW2])
M は U 内の C^∞ 級の totally real submanifold であるとする。このとき、
(1) 点 $z^0 \in M$ に対して、$\bar{B}_0 \cap M$ が多項式凸集合となる様な z^0 を中心とする小さな超球 B_0 が存在する。
(2) K が M 内のコンパクト部分集合ならば、$P(K) = C(K)$.

この補題は、M が、totally real set の場合に拡張されている ([S1])。

L は $\mathbb{C}^2$ のある開集合内のコンパクト多項式凸集合とする。g と h は U で正則な関数とし、$N = \{z \in U : \bar{g}(z) = h(z)\}$ とおく。

補題 3. コンパクト集合 K が $L \cap N$ に含まれるならば、$\hat{K} \subset L \cap N$.

さて、totally real の判定条件のために、

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g(z)}{\partial z_1} & \frac{\partial g(z)}{\partial z_2} \\ \frac{\partial h(z)}{\partial z_1} & \frac{\partial h(z)}{\partial z_2} \end{vmatrix}.$$

とおく。

補題 4. 点 $z_0 \in N$ が条件 $\Delta(z^0) \neq 0$ を満たすならば、$B_0 \cap N$ が totally real submanifold である様な z^0 を中心とする開球 B_0 が存在する。

証明. $z_j = x_j + i y_j$ $(x_j, y_j \in R,\ j = 1, 2)$ とし、$g = u + iv$, $h = U + iV (u, v, U, V$ は実数値関数$)$ とする。さらに $\rho_1 = U - u_1$, $\rho_2 = V + v$

とおくと、 $N=\{z\in U:\rho_j(z)=0,\ j=1,2\}$ となる。Cauchy-Riemann の関係式によって、

$$\frac{\partial v}{\partial z_j}=\frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x_j}-i\frac{\partial v}{\partial y_j})=-\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y_j}+i\frac{\partial u}{\partial x_j})=\frac{-i}{2}\frac{\partial u}{\partial z_j}.$$

を得る。簡単な計算によって、

$$\det(\frac{\partial\rho_j}{\partial z_k})=-i\{(U_{z_1}-u_{z_1})(U_{z_2}+u_{z_2})-(U_{z_2}-u_{z_2})(u_{z_1}+u_{z_1})\}$$

$$=-2i(U_{z_1}u_{z_2}-u_{z_1}U_{z_2})=\frac{i}{2}(h_{z_2}g_{z_1}-h_{z_1}g_{z_2}).$$

補題 1 によって、結論を得る。

A は単位元を持つ可換 Banach algebra とし、$\mathcal{M}(A)$ を A の極大イデアル空間とする。$f\in A$ の Gelfand 変換を $\hat{f}$ で表し、 $\hat{A}=\{\hat{f}:f\in A\}$ とおくとき、$\hat{A}$ の Shilov 境界を $S(A)$ で表す。$f_1,\cdots,f_m\in A$ の合同スペクトルを

$$\sigma(f_1,\cdots,f_m)=\{(\hat{f}_1(\varphi),\cdots,\hat{f}_m(\varphi))\in\mathbb{C}^m:\varphi\in\mathcal{M}(A)\}.$$

とおく。

補題 5 (cf. [AW2]). $f_1,\cdots,f_m$ は A の生成元とするならば、$\sigma(f_1,\cdots,f_m)$ は $\mathbb{C}^m$ 内の多項式凸集合である。さらに、$\Phi(\hat{f}_1(\varphi),\cdots,\hat{f}_m(\varphi))$ によって定義される写像 $\Phi:\mathcal{M}(A)\to C^m$ は、$\sigma(f_1,\cdots,f_m)$ の上への位相同型である。

このことから、$A=P(K)$ のとき、 $\mathcal{M}(P(K))$ と $\hat{K}$ とは自然に同一視され、$\hat{A}=P(\hat{K})$ と考えて良いことになる。そこで、Shilov の Idempotent theorem を $P(K)$ に当てはめれば、次を得る。

補題 6. K が $\mathbb{C}^n$ の連結部分集合ならば、その多項式凸包 $\hat{K}$ は、また連結集合である。

補題 7. (Rossi の local maximum modulus principle)
$\psi\in\mathcal{M}(A)\setminus S(A)$ に対して、$\psi\in\mathcal{M}(A)\setminus S(A)$ 内の ψ の開近傍を U とする。このとき、$f\in A$ に対して、次を得る。

$$|\hat{f}(\psi)|\leq\max_{\varphi\in\partial U}|\hat{f}(\varphi)|.$$

補題 8. L は $\mathbb{C}^2$ の開集合 U 内のコンパクト多項式凸連結部分集合とする。f と g は U で正則な関数とし、$N=\{z\in U:f(\bar{z})=g(z)\}$ とおく。 K は $N\cap L$ に含まれるコンパクト部分集合とする。このとき、点 $z^0\in N\cap L\setminus K$ が $\Delta(z^0)\neq 0$ を満たすならば、$z^0\notin\hat{K}$.

証明. $z^0 \in \hat{K} \setminus K$ とする。補題 2 と 4 から 次の様な z^0 を中心とする小さな超球 B_0 が存在する:

$$\bar{B}_0 \cap K = \phi, \quad P(\bar{B}_0 \cap N) = C(\bar{B}_0 \cap N).$$

$V = N \cap \hat{K} \cap B_0$ とおき bV は $\hat{K}$ 内の V の境界とする。

もし $bV = \phi$ ならば $\hat{K}$ 内で $\bar{V} = V$ である。それ故、 $\bar{V} \cap \hat{K} \setminus V = \phi$. $\hat{K}$ は連結であるので このことは起こらない。

$bV \neq \phi$ ならば、次の様な関数 $f \in C(\bar{V})$ が存在する:

$$|f(z^0)| > 1, \quad \|f\|_{bV} < 1.$$

$P(\bar{V}) = C(\bar{V})$ であるので、f を近似する多項式 p で、$|p(z^0)| > 1$, $\|p\|_{bV} < 1$ を満たすものが存在する。他方、Rossi の局所最大値の原理から $|p(z^0)| \leq \|p\|_{bV}$ を得る。これは矛盾である。故に $z^0 \notin \hat{K}$ となる。

次の補題は論文 [AR], [AW2] と全く同じ方法で示される。

補題 9. $f \in C(T^2)$ とし、 $(z_1^0, z_2^0) \in T^2$ かつ $(z_1^0, z_2^0, z_3^0) \in \hat{\Sigma}$ ならば $z_3^0 = f(z_1^0, z_2^0)$ となる。

例 1. 自然数 n に対して $f(z_1, z_2) = \bar{z}_1^n$ とするならば、次を得る。

$$\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi)} \{(e^{i\theta}, z_2, e^{-ni\theta}) : z_2 \in D\},$$

それ故、 $\pi(\hat{\Sigma}) = T \times \bar{D}$.

例 2. 自然数 m, n に対して $f(z_1, z_2) = \bar{z}_1^m \bar{z}_2^n$ とする。このとき、次を得る。

$$\hat{\Sigma} = \Sigma, \quad [z_1, z_2, f; T^2] = C(T^2).$$

例 3. $f(z_1, z_2) = z_1 \bar{z}_2$ のグラフ Σ の多項式凸包は

$$\hat{\Sigma} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 = z_2 z_3, |z_2| \leq 1, |z_3| \leq 1\}$$

となる。この場合、$\hat{\Sigma} \setminus \Sigma$ のハウスドルフ次元は 4 次元である。

3. 定理の証明

$a = \Pi_{j=1}^n (1 + |\lambda_j|)$ とおく。$\|f\|_{T^2} \leq a$ であるので $\hat{\Sigma} \subset \bar{D}^2 \times a\bar{D}$. トーラス T^2 上で $z_1 \bar{z}_1 = z_2 \bar{z}_2 = 1$ であるので

$$N = \{(z_1, z_2, z_3) \in \bar{D}^2 \times a\bar{D} : z_3 - \Pi_{j=1}^n (\bar{z}_1 - \bar{\lambda}_j \bar{z}_2) = 0,$$
$$z_1^n z_2^n z_3 - \Pi_{j=1}^n (z_2 - \bar{\lambda}_j z_1) = 0\}.$$

とおけば、補題によって、 $\hat{\Sigma} \subset N$ を得る。$E = \bar{D} \times \{0\} \cup \{0\} \times \bar{D}$ とおき、z_3 を消去した式から、

$$M = \{(z_1, z_2) \in \bar{D}^2 \setminus (T^2 \cup E) : \Pi_{j=1}^n (\bar{z}_1 - \bar{\lambda}_j \bar{z}_2) = \frac{1}{z_1^n z_2^n} \Pi_{j=1}^n (z_2 - \bar{\lambda}_j z_1)\}$$

とおく。M の totally real 性を判定するために、M を定義する式の左辺を $\bar{g}(z_1, z_2) = f(z_1, z_2)$ 右辺を $h(z_1, z_2) = \frac{k(z_1, z_2)}{z_1^n z_2^n}$ ($k(z_1, z_2)$ は多項式) とおくと、$\Delta(z_1, z_2) = g_{z_1} h_{z_2} - g_{z_2} h_{z_1}$

$$= \frac{1}{z_1^{n+1} z_2^{n+1}} \{g_{z_1}(k_{z_2} z_1 z_2 - n z_1 k) - g_{z_2}(k_{z_1} z_1 z_2 - n z_2 k)\}.$$

この分子は次数 $n+1$ の同次多項式で、 z_1^{n+1} と z_2^{n+1} の係数はそれぞれ $-n^2 \bar{a}_n$ と $n^2 a_n$ となる。それ故、totally real 性を判定出来ない集合を $G = \{z \in \bar{D}^2 \setminus (T^2 \cup E) : \Delta(z) = 0\}$ とおくと、次の式を満たす 0 でない複素数 μ_j, $j = 1, \cdots, 2n$ が存在する：

$$G = \bigcup_{j=1}^{2n} \{z \in \bar{D}^2 \setminus (T^2 \cup E) : \frac{z_2}{z_1} = \mu_j\}.$$

そこで

$$G_j = \{z \in \bar{D}^2 \setminus (T^2 \cup E) : z_2 - \mu_j z_1 = 0\},$$

$$D_j^* = \{(z_1, z_2, 0) : z_1 - \lambda_j z_2 = 0, z_2 \in D\}$$

とおき、 $D_j = \pi(D_j^*)$ とおく。

さて、(2) の場合 $J \neq \phi$ なので $j \in J$ とせよ。すると $\{(z_1, z_2, 0) : z_1 - \lambda_j z_2 = 0, z_2 \in T\} \subset \Sigma$ であるので、$D_j^* \subset \hat{\Sigma}$ を得る。今 $|\lambda_1| = 1$ と仮定すると、$g = \bar{f} = (z_1 - \lambda_1 z_2) F(z_1, z_2)$, $h = (z_1 - \lambda_1 z_2) H(z_1, z_2)$ (F, H は正則関数) とかけるので、$(z_1, z_2) \in D_1$ ならば、$\Delta(z_1, z_2) = 0$ を得る。

まず、 $J = \{1, \cdots, n\}$ と仮定すると、点 $(z_1, z_2) \in \bar{D}^2 \setminus (T^2 \cup E \cup \bigcup_{j=1}^n \pi(D_j))$ に対して、

$$|h(z_1, z_2)| = |\frac{(-\bar{\lambda}_1) \cdots (-\bar{\lambda}_n)}{z_1^n z_2^n} \Pi_{j=1}^n (z_1 - \lambda_j z_2)| < |\bar{f}(z_1, z_2)|$$

となるので、 $(z_1, z_2) \notin M$. ゆえに $\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \bigcup_{j \in J} D_j$.

次に $J \neq \phi$ かつ $J \neq \{1, \cdots, n\}$ とする。このとき $J = \{1, 2, \cdots, k\}, 1 \leq k < n$ と仮定して良い。すると上での観察から $\mu_j = \bar{\lambda}_j$, $j = 1, \cdots, k$ となる。 集合 $(M \setminus \bigcup_{j \in J} D_j) \cap G_j$ を考えるために、M の式に、$z_2 = \mu_j z_1$ を代入して、次を得る。

$$|z_1|^{2n} = \frac{|\mu_j - \bar{\lambda}_{k+1}|}{|1 - \lambda_{k+1} \mu_j|} \cdots \frac{|\mu_j - \bar{\lambda}_n|}{1 - \lambda_n \mu_j|} \frac{1}{|\mu_j|^n}.$$

このとき、$|z_1|$ に解があれば、$|z_1| = \rho_j$ とおく。$M_j = (M \setminus \cup_{k \in J} D_k) \cap G_j$ とおく。

もし $0 < \rho_j < 1$, または $\rho_j = 1$, $|\mu_j| < 1$ のときは、

$$M_j \subset \bigcup_{j \notin J} \{(z_1, z_2) \in \bar{D}^2 \setminus (T^2 \cup E) : z_1 - \lambda_i z_2 = 0, |z_2| = \rho_j\}$$

を得る (ただし、M_j は空集合でもよい)。それ故、$\bigcup_j M_j \cap (\bigcup_j D_j \cup T^2) = \phi$ を得る。従って、次の条件を満たす $\cup D_j \cup T^2$ の開近傍 V が存在する : $V \cap (\cup D_j \cup T^2)$ が totally real submanifold である。補題によって、グラフ $\Sigma(f, V \cap (\cup D_j \cup T^2))$ は totally real である。それ故、$\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \bigcup_{j \in J} D_j$. これ以外の ρ_j の場合には、$M_j = \phi$ であるので問題ない。

(1) $J = \phi$ の時、$I = \{i \in \{1, 2, \cdots, n\} : |\mu_i| = 1\}$ と置く。

(a) もし $I = \phi$ ならば $V \cap G = \phi$ である様な V の開近傍が存在する。それ故、$\Sigma(f, V \cap M \setminus T^2)$ は totally real であるので、$\hat{\Sigma} = \Sigma$ を得る。

(b) もし $I \neq \phi$ かつ $i \in I$ ならば、$z_2 = \mu_i z_1$ を M の式に代入して $|z_1|^{2n} = |\Pi_j \frac{\mu_i - \lambda_j}{1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_i}| = 1$ を得る。故に、$|z_1| = 1$. 故に M は totally real であるのでグラフ $\Sigma(f, M)$ もまた totally real である。故に、$\hat{\Sigma} = \Sigma$.

最後に、この問題を考えていくうえで、阪井先生とのコミニュケーションと適切なアドバイスをいただいたことは大変有益で、支えとなりました。ここに感謝いたします。

References

[AR] P. Ahern and W. Rudin, 'Hulls of 3-spheres in $\mathbb{C}^3$', Contemporary Math. 137 (1992) 1-27.

[A1] H. Alexander, 'Polynomial hulls of graphs', Pacific J. Math. 147 (1991) 201-212.

[AW1] H. Alexander and J. Wermer, 'Polynomial hulls with convex fibers', Math. Ann. 271 (1985), 99-109.

[AW2] H. Alexander and J. Wermer, 'Several Complex Variables and Banach Algebras', Springer-Verlag, (1998).

[JS] T. Jimbo and A. Sakai, 'Polynomially convex hulls of graphs on the sphere', Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), 2795-2766.

[NW] R. Nirenberg and R. O. Wells, Jr, 'Approximation theorems on differntiable submanifolds of a complex manifol', Trans. Amer. Math. Soc. 142 (1969) 15-35.

[S1] A. Sakai, 'On totally real sets', Geometric Complex Analysis edited by J. Noguchi et. al. World Scientific Publ. Co. (1996) 525-533.