数理解析研究所講究録
1138巻 2000年 87-95

代数的局所コホモロジー類のローラン展開と L. Ehrenpreis の Noether作用素

新潟大学工学部　田島　慎一(Shinichi Tajima)

1　問題とその背景

多変数多項式環 $\mathbf{C}[z_1, z_2, ..., z_n]$ の零次元イデアル I が与えられたとする. $X = \mathbf{C}^n$ におけるその零点集合を $V(I)$ で表す. X 上の正則関数のなす層 $\mathcal{O}_X$ を係数とし, 零点集合 $V(I)$ に台を持つ代数的局所コホモロジー群を $\mathcal{H}^n_{[V(I)]}(\mathcal{O}_X)$ で表す. 更に, イデアル I に対し

$$\Sigma = \{\psi \in \mathcal{H}^n_{[V(I)]}(\mathcal{O}_X) \mid f\psi = 0, \quad \forall f \in I\}$$

と定める. 層 $\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I, \mathcal{O}_X)$ から代数的局所コホモロジー群のなす層 $\mathcal{H}^n_{[V(I)]}(\mathcal{O}_X)$ への自然な写像を

$$i : \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathcal{H}^n_{[V(I)]}(\mathcal{O}_X)$$

とおくと, 層 Σ は $\Sigma = i(\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I, \mathcal{O}_X))$ と記述できる. また, 層 $\mathcal{H}^n_{[V(I)]}(\mathcal{O}_X)$ の X 上の大域的切断全体 $H^n_{[V(I)]}(\mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \mathcal{H}^n_{[V(I)]}(\mathcal{O}_X))$ に対してベクトル空間 Σ を

$$\Sigma = \{\psi \in H^n_{[V(I)]}(\mathcal{O}_X) \mid f\psi = 0, \quad \forall f \in I\}$$

で定める. この集合 Σ は有限次元ベクトル空間となる. 混乱が生じることはないと思うので, 記号を簡略化するために層とベクトル空間に対して同じ記号 Σ を用いることにした. Grothendieck 留数をとることにより, ベクトル空間 Σ は剰余 $\mathbf{C}[z_1, z_2, ..., z_n]/I$ のベクトル空間としての双対空間と同一視することが出来る (cf. [17]).

零点 $A \in V(I)$ がイデアル I の単純点である場合は, 点 A に台を持つ Σ の要素は点 A に一位の極をもつ代数的局所コホモロジー類として簡単に表現することが出来る. 本稿の目的は, 重複度を持つような点 $A \in V(I)$ で Σ の解析をすることである.

論文 ([16]) では, 零次元イデアル I が complete intersection で, 正規列となるような n 個の生成元が与えられてである場合に, この問題を考察した. このような時は, Σ の $\mathcal{O}_X$ 上での生成元を用いることでベクトル空間 Σ の基底を具体的に表現することが出き, 更に

Hermite-Jacobi の多変数補間積分を解析することで剰余空間 $\mathbf{C}[z_1, z_2, ..., z_n]/I$ との間の双対性を計算することが可能であることを示した. しかし, complete intersection でない一般の場合で, 与えられた零次元イデアル I の零点集合 $V(I)$ が重複度を持つようなときに Σ を具体的に決定することはこの論文では扱っていなかった.

本稿ではこのような一般の場合を想定し, 零次元イデアルが与えられたときにベクトル空間 Σ を決定しその要素を具体的に表現する方法について考察する. これらの計算をおこなうアルゴリズムを構成することがこの研究の目標である. 議論を展開する前に, 研究の目的が明かになるように簡単な例を用いて説明をすることにする.

例 1 $f_1 = x^2 + y^2 - 1,\ f_2 = y - x^2 + 1$ とおく. 多項式 f_1, f_2 の生成するイデアルを $I \subset \mathbf{Q}[x, y]$ とする. 多項式環に $y \succ x$ なる辞書式項順序をいれたとき, イデアル I のグレブナ基底は $\{x^4 - x^2,\ y - x^2 + 1\}$ で与えられる. 因数分解 $x^4 - x^2 = x^2(x+1)(x-1)$ に注目して $I_0 = \langle x^2,\ y+1\rangle$, $I_1 = \langle x+1,\ y\rangle$, $I_2 = \langle x-1, y\rangle$ とおけば, イデアル I の準素イデアル分解 $I = I_0 \cap I_1 \cap I_2$ をえる. 点 A_0, A_1, A_2 を $A_0 = (0, -1), A_1 = (-1, 0), A_2 = (1, 0)$ で定めれば, $V(I) = \{A_0, A_1, A_2\}$ となる. ベクトル空間

$$\Sigma = \{\psi \in H^n_{[V(I)]}(\mathcal{O}_X) \mid f\psi = 0, \quad \forall f \in I\}$$

の基底として

$$\{[\frac{1}{x^2(y+1)}],\ [\frac{1}{x(y+1)}],\ [\frac{1}{(x+1)y}],\ [\frac{1}{(x-1)y}]\}$$

が取れる. いま, 剰余ベクトル空間 $\mathbf{C}[x, y]/I$ の基底として $\{x^3, x^2, x, 1\}$ をとると, Σ におけるその双対基底は

$$\{-[\frac{1}{x^2(y+1)}] - \frac{1}{2}[\frac{1}{(x+1)y}] + \frac{1}{2}[\frac{1}{(x-1)y}],$$

$$-[\frac{1}{x^2(y+1)}] + \frac{1}{2}[\frac{1}{(x+1)y}] + \frac{1}{2}[\frac{1}{(x-1)y}],\ -[\frac{1}{x^2(y+1)}],\ -[\frac{1}{x(y+1)}]\}$$

で与えられる.

一般に, 双対基底をこのように具体的に表現することが出来れば, 様々な計算に応用することが可能となる. 例えば, イデアル I で多項式の剰余を取ったときの剰余項を表現する式を直ちに得ることが出来る.

2 代数的局所コホモロジーとネター作用素

零次元イデアル I の零点集合 $V(I)$ は相異なる ℓ 個の点 $A_1, A_2, ..., A_\ell$ からなるとし, 点 A_i の重複度は μ_i であるとする. 代数的局所コホモロジー群の直和分解

$$\mathcal{H}^n_{[V(I)]}(\mathcal{O}_X) = \mathcal{H}^n_{[A_1]}(\mathcal{O}_X) \oplus \mathcal{H}^n_{[A_2]}(\mathcal{O}_X) \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}^n_{[A_\ell]}(\mathcal{O}_X)$$

に対応して $\Sigma_{A_i} = \Sigma \cap H^n_{[A_i]}(\mathcal{O}_X)$ とおく. 次が成り立つ.

補題 2 *(i)* $\Sigma = \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \oplus \cdots \oplus \Sigma_\ell$,

(ii) $\dim_{\mathbf{C}} \Sigma_{A_i} = \mu_i$.

従って, 各点 A_i における Σ_{A_i} が決定出来れば, ベクトル空間 Σ も決定できることになる. そこで, 一点 $A \in X$ をとり, この点のみに台を持つ代数的局所コホモロジー群 $\mathcal{H}^n_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ を考える. いま, X 上の線形偏微分作用素で, 正則関数を係数にもつもののなす層を $\mathcal{D}_X$ とおく. 代数的局所コホモロジー群 $\mathcal{H}^n_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ は $\mathcal{O}_X$ 加群としては連接ではないが, $\mathcal{D}_X$-加群として連接でホロノミックとなる. しかもその上, $\mathcal{H}^n_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ は $\mathcal{D}_X$-加群として simple となる. この事実に注目して点 $A = (a_1, a_2, ..., a_n) \in X$ に対し, 次の写像

$$i : Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\langle z_1 - a_1, z_2 - a_2, ..., z_n - a_n\rangle, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^n_{[A]}(\mathcal{O}_X)$$

による $\left[\dfrac{1}{z_1 - a_1 \; z_2 - a_2 \; \cdots z_n - a_n}\right]$ の像を考え, それを δ_A で表す. この時, 次が成立する.

補題 3 代数的局所コホモロジー群 $H^n_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ の要素 ψ_A は定数係数の偏微分作用素 $T(-\frac{\partial}{\partial\zeta})$ を用いて $\psi_A = T(-\frac{\partial}{\partial\zeta})\delta_A$ と表現できる.

今, 点 A をイデアル I の零点集合 $V(I)$ の任意の一点とする. 次の結果は基本的である.

補題 4 点 $A \in V(I)$ に台をもつ代数的局所コホモロジー類 $\psi_A = T(-\frac{\partial}{\partial\zeta})\delta_A$ がベクトル空間 $\Sigma_A = \Sigma \cap H^n_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ に属する必要十分条件は

$$fT \in \mathcal{D}_X\langle z_1 - a_1, z_2 - a_2, ..., z_n - a_n\rangle, \quad \forall f \in I$$

である.

ここで, 補題の条件を満たす線形偏微分作用素からなる集合

$$NT_A = \{T \mid fT \in \mathcal{D}_X\langle z_1 - a_1, z_2 - a_2, ..., z_n - a_n\rangle, \quad \forall f \in I\}$$

を導入する. L. Ehrenpreis([6]) に従って, ベクトル空間 NT_A の（要素または）基底をネター作用素と呼ぶことにする.

例 5 $I=\langle x^3, x^2+xy+y^2\rangle$ とおく. イデアル I の零点が原点のみからなり, その重複度は 6 に等しい. ネター作用素として

$$\{1,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2},\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}-\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\}$$

を得る.

この例の様に, 点 $A\in V(I)$ が有理点である場合はネター作用素を比較的簡単に求めることが出来る. また, 数式処理を用いる計算アルゴリズムの構成も容易である.

3 準素イデアル分解による計算の局所化

有理数を係数にもつような多変数多項式の組であり, それらの共通零点集合が零次元となるものが与えられたとする. これらの多項式の生成するイデアルを $I\subset \mathbf{Q}[z_1,z_2,...,z_n]$ とおく. $X=\mathbf{C}^n$ におけるその零点集合を $V(I)$ で表し, $V(I)$ に台を持つ代数的局所コホモロジー群 $\mathcal{H}^n_{[V(I)]}(\mathcal{O}_X)$ をとり, 前節と同様に

$$\Sigma=\{\psi\in\mathcal{H}^n_{[V(I)]}(\mathcal{O}_X)\mid f\psi=0,\quad \forall f\in I\}$$

と定める.

零点 $A\in V(I)$ が有理点でない場合に前節の方法を直接適用してネター作用素を求める計算を行うとすると, 代数拡大をして計算を行う必要が生じる. 数式処理を利用することを考えると, 代数拡大を避けて計算を実行できることが望ましい. そこでこの節では, 計算代数の観点から前節の議論を見直し, 準素イデアル分解とネター作用素の関係を明らかにしておく.

さて, イデアル I の多項式環 $\mathbf{Q}[z_1,z_2,...,z_n]$ における準素イデアル分解 $I=I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_s$ が与えられたとする. この準素イデアル分解に対応して

$$\Sigma_{I_i}=H^n_{[V(I_i)]}(\mathcal{O}_X)\cap\Sigma$$

とおく. この時あきらかに次が成り立つ.

補題 6 *(i)* $\Sigma_{I_i}=\{\psi\in H^n_{[V(I_i)]}(\mathcal{O}_X)\mid f\psi=0,\quad \forall f\in I_i\}$,
(ii) $\Sigma=\Sigma_{I_1}\oplus\Sigma_{I_2}\oplus\cdots\oplus\Sigma_{I_s}$.

この補題により, ベクトル空間 Σ を決定するには各準素イデアル I_i に注目して, その零点集合 $V(I_i)$ に台をもつ代数的局所コホモロジー群を考えればよいことがわかる. そこで次に, $V(I_i)$ に台を持つ局所コホモロジー類を表現する方法について考える.

イデアル I_i の根基 $\sqrt{I_i}$ をとりその生成元 $p_{i,1}, p_{i,2}, ..., p_{i,n}$ が与えられたとしよう. これらの生成元を用いて

$$\sigma_{I_i} = [\frac{det(\frac{\partial(p_{i,1}p_{i,2}\cdots p_{i,n})}{\partial(z_1 z_2 \cdots z_n)})}{p_{i,1}p_{i,2}\cdots p_{i,n}}]$$

と定める. ベクトル空間 $\mathbf{C}[z_1, z_2, ..., z_n]/\sqrt{I_i}$ の次元は, 零点集合 $V(I_i)$ の相異なる点の個数に等しい. 従って, 零次元集合 $V(I_i)$ に高々一位の極を持つような代数的局所コホモロジー類はすべて, 局所コホモロジー類 σ_{I_i} にベクトル空間 $\mathbf{C}[z_1, z_2, ..., z_n]/\sqrt{I_i}$ の基底多項式を掛けてそれらの一次結合として表現することが出来る.

また, Σ_{I_i} のすべての要素はこれらの代数的局所コホモロジー類に, 重複度に応じた偏微分作用素を施すことで表現できることも明かであろう.(次の節ではこの事実に基づいて Noether 作用素の計算を行う.)

例 7 $f_1 = 5x^3 - 9xy^2, f_2 = 6x^2y + 5y^3 - 5y$ の生成するイデアル $I = \langle f_1, f_2 \rangle \subset \mathbf{Q}[x, y]$ をとる. 項順序として $y \succ x$ であるような辞書式項順序をいれると, イデアル I のグレブナ基底は

$$5y^3 + 6x^2y - 5y, 9xy^2 - 5x^3, 79x^3y - 45xy, 79x^5 - 45x^3$$

で与えられる. 剰余ベクトル空間 $\mathbf{Q}[x, y]/I$ の単項式基底 MB は

$$MB = \{y^2, x^2y, xy, y, x^4, x^3, x^2, x, 1\}$$

となる. イデアル I の準素イデアル分解は $I = I_0 \cap I_1 \cap I_2 \cap I_3$ で与えられる. ただし

$$I_0 = \langle x^3, y \rangle, I_1 = \langle x, y+1 \rangle, I_2 = \langle x, y-1 \rangle, I_3 = \langle 79x^2 - 45, 79y^2 - 25 \rangle$$

である. イデアル I_0 の零点 $(0, 0)$ の重複度は 3 であり, 他のイデアル I_1, I_2, I_3 の零点はすべて単純点のみからなる. そこでいま

$$\sigma_{I_0} = [\frac{1}{xy}],\ \sigma_{I_1} = [\frac{1}{x(y+1)}],\ \sigma_{I_2} = [\frac{1}{x(y-1)}],\ \sigma_{I_3} = [\frac{2^2 \cdot 79^2 xy}{(79x^2 - 45)(79y^2 - 25)}]$$

と定める. 準素イデアル分解に応じて $\Sigma = \Sigma_{I_0} \oplus \Sigma_{I_1} \oplus \Sigma_{I_2} \oplus \Sigma_{I_3}$ を得るが

$$\Sigma_{I_0} = span\{\sigma_{I_0},\ (\frac{\partial}{\partial x})\sigma_{I_0},\ (\frac{\partial^2}{\partial x^2})\sigma_{I_0}\},\ \Sigma_{I_1} = span\{\sigma_{I_1}\},\ \Sigma_{I_2} = span\{\sigma_{I_2}\}$$

が成り立つ. また, 零点集合 $V(I_3)$ は 4 点からなり, 剰余ベクトル空間 $\mathbf{Q}[x, y]/I_3$ の単項式基底として $\{xy, y, x, 1\}$ がとれるので, $\Sigma_{I_3} = span\{xy\sigma_{I_3}, y\sigma_{I_3}, x\sigma_{I_3}, \sigma_{I_3}\}$ を得る.

これらの基底を用いると例えば次のような表現を導くことが出来る.

$$[\frac{1}{(5x^3-9xy^2)(6x^2y+5y^3-5y)}] =$$

$$-\frac{1}{25}[\frac{1}{x^3y}] - \frac{6}{125}[\frac{1}{xy}] - \frac{1}{90}[\frac{1}{x(y+1)}] - \frac{1}{90}[\frac{1}{x(y-1)}] - \frac{79}{4500}[\frac{2^2\cdot 79^2 xy}{(79x^2-45)(79y^2-25)}].$$

双対基底の計算を行うことも出来る. 実際

$$\begin{aligned}
\chi_{0,2} &= -[\frac{1}{xy}] + \frac{1}{2}[\frac{1}{x(y+1)}] + \frac{1}{2}[\frac{1}{x(y-1)}],\\
\chi_{2,1} &= \frac{79}{90}[\frac{1}{x(y+1)}] + \frac{79}{90}[\frac{1}{x(y-1)}] + \frac{79^2}{4500}y[\frac{2^2\cdot 79^2xy}{(79x^2-45)(79y^2-25)}],\\
\chi_{1,1} &= \frac{79^2}{4500}xy[\frac{2^2\cdot 79^2xy}{(79x^2-45)(79y^2-25)}],\\
\chi_{0,1} &= -\frac{1}{2}[\frac{1}{x(y+1)}] + \frac{1}{2}[\frac{1}{x(y-1)}],\\
\chi_{4,0} &= -\frac{158}{375}[\frac{1}{xy}] - \frac{79}{45}[\frac{1}{x^3y}] - \frac{79}{162}[\frac{1}{x(y+1)}] - \frac{79}{162}[\frac{1}{x(y-1)}]\\
&= \quad +\frac{79^2}{8100}[\frac{2^2\cdot 79^2xy}{(79x^2-45)(79y^2-25)}],\\
\chi_{3,0} &= -\frac{79}{45}[\frac{1}{x^2y}] + \frac{79^2}{8100}x[\frac{2^2\cdot 79^2xy}{(79x^2-45)(79y^2-25)}],\\
\chi_{2,0} &= [\frac{1}{x^3y}],\ \chi_{1,0} = [\frac{1}{x^2y}],\ \chi_{0,0} = [\frac{1}{xy}]
\end{aligned}$$

とおくと, 代数的局所コホモロジー類 $\{\chi_{0,2},\chi_{2,1},\chi_{1,1},\chi_{0,1},\chi_{4,0},\chi_{3,0},\chi_{2,0},\chi_{1,0},\chi_{0,0}\}$ は剰余空間 $\mathbf{Q}[x,y]/I$ の単項式基底 $\{y^2,x^2y,xy,y,x^4,x^3,x^2,x,1\}$ に対するベクトル空間 Σ における双対基底となる.

4 Noether 作用素の計算

この節では, 代数的局所コホモロジー群が D-加群群の構造を持つことを利用することで, Noether 作用素の特徴付けを与える. その結果を用いることで, 代数拡大を行わないで Noether 作用素を求めることが可能となる.

今までと同じように, 準素イデアル I_i の根基を $\sqrt{I_i}$ で表す. 零点集合 $V(I_i)$ に台を持つ代数的局所コホモロジー群のなす層 $\mathcal{H}^n_{[V(I_i))]}(\mathcal{O}_X)$ は $\mathcal{D}_X$ 上 σ_{I_i} により生成されることは明らかである. 従って, 層 $\mathcal{H}^n_{[V(I_i))]}(\mathcal{O}_X)$ の任意の要素は適当な偏微分作用素 T を用いて $T\sigma_{I_i}$ の形に表現出来ることになる. さて,σ_{I_i} の偏微分作用素環のなす層 $\mathcal{D}_X$ での annihilator イデアルは左イデアル $\mathcal{D}_X\sqrt{I_i}$ に等しい. このことから次の定理が直ちに従う.

定理 **8** 代数的局所コホモロジー類 $T\sigma_{I_i}$ がベクトル空間 Σ_{I_i} に属する必要十分条件は

$$fT \in \mathcal{D}_X\sqrt{I_i}, \quad \forall f \in I_i$$

である.

この定理を用いると代数拡大を回避して Noether 作用素の計算を行うことが出来る. 以下, 具体例を用いた計算でこのことを確かめてみることにする.

例 **9** $f_1(x,y) = (x^2+y^2)^2+3x^2y-y^3$, $f_2(x,y) = x^2+y^2-1$ とおき, $I = \langle f_1(x,y), f_2(x,y)\rangle$ を考える. イデアル I の準素イデアル分解は $I_1 = \langle y-1, x^2\rangle$, $I_2 = \langle 4y^2+4y+1, 4x^2-4y-5\rangle$ とおくと, $I = I_1 \cap I_2$ で与えられる. イデアル I の零点 $A = V(I)$ は三点 A_1, A_2, A_3 からなり, $V(\sqrt{I_1}) = \{A_1\}$, $V(\sqrt{I_2}) = \{A_2, A_3\}$ と既約分解される. ただし $A_1 = (0,1), A_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), A_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ とおいた. 各点 での重複度はいずれも 2 に等しい.

イデアル I の準素イデアル分解 $I = I_1 \cap I_2$ に対応してベクトル空間の直和分解 $\Sigma = \Sigma_{I_1} \oplus \Sigma_{I_2}$ を得る. イデアル I_1, I_2 の根基はそれぞれ $\sqrt{I_1} = \langle x, y-1\rangle$, $\sqrt{I_2} = \langle 4x^2-3, 2y+1\rangle$ であることに注意して, 局所コホモロジー類 $\sigma_{I_1}, \sigma_{I_2}$ を

$$\sigma_{I_1} = [\frac{1}{x(y-1)}], \ \sigma_{I_2} = [\frac{16x}{(4x^2-3)(2y+1)}]$$

で定める. 明らかに $\Sigma_{I_1} = span\{\sigma_{I_1}, \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{I_1}\}$ が成り立つ.

ベクトル空間 Σ_{I_2} の要素を表現するために $T\sigma_{I_2} \in \Sigma_{I_2}$ となる偏微分作用素 T を求めよう. この節の定理により, T の満たすべき条件

$$(4y^2+4y+1)T \in \mathcal{D}_X\langle 4x^2-3, 2y+1\rangle, (4x^2-4y-5)T \in \mathcal{D}_X\langle 4x^2-3, 2y+1\rangle$$

を得る. この条件を満たす偏微分作用素 T として $T = -\frac{\partial}{\partial x} - 2x\frac{\partial}{\partial y}$ を得る. この *Noether* 作用素 T を用いると

$$\Sigma_{I_2} = span\{\sigma_{I_2},\ x\sigma_{I_2},\ T\sigma_{I_2},\ T(x\sigma_{I_2})\}$$

を得る.

参 考 文 献

[1] C.A. Berenstein, R. Gay, A. Vidras and A. Yger, Residue Currents and Bezout Identities, Progress in math. **114**, Birkh"auser, 1993.

[2] C. A. Berenstein and B. A. Taylor, *Interpolation problems in C^n with applications to harmonic analysis*, J. d'Analyse Math. **38** (1980), 188–254.

[3] J.-E. Bj"ork, Rings of Differential Operators, North-Holland, 1979.

[4] J. Delsarte, *Théories des fonctions moyenne-périodiques de deux variables*, Ann. Math. **72** (1960), 121–178.

[5] A. M. Dickenstein and C. Sessa, *Duality methods for the membership problem*, Progress in Math. **94** (1991) Effective Methods in Algebraic Geometry (eds by T. Mora and C. Traverso), 89–103.

[6] L. Ehrenpreis, Fourier Analysis in Several Complex Variables, Wiley-Interscience (1960).

[7] P. Griffiths and J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, Wiley-Interscience 1978.

[8] M. Kashiwara, *On the holonomic systems of linear differntial eqauations,II.* Inventiones mathematicae **49** (1978), 121–135.

[9] M. G. Marinari, H. M. M"oller and T. Mora, *Gr"obner bases of ideals defined by functionals with an application to ideals of projective points*, AAECC **4** (1993), 103–145.

[10] M. G. Marinari, H. M. M"oller and T. Mora, *On multiplicities in polynomial system solving*, Trans. of the AMS. **348** (1996), 3283–3321.

[11] H. M. M"oller, *Systems of algebraic equations solved by means of endomorphisms*, Lect. Notes in Comp. Sci. **673** (1993), 43–56.

[12] H. M. M"oller and H. J. Stetter, *Multivariate polynomial equations with multiple zeros solved by matrix eigenproblems*, Numer. Math. **70** (1995), 311–329.

[13] B. Mourrain, *Isolated points, duality and residues*, J. of Pure and Applied Algebra **117** & **118** (1997), 469–493.

[14] M. Noro and T. Takeshima, *Risa/Asir - a computer algebra system*, in Proc. International Symposium on Symbolic and Algebrais Computation 1992 (ed. P. S. Wang), ACM 1992, 387–396.

[15] T. Shimoyama and K. Yokoyama, *Localization and primary decomposition of polynomial ideals*, J. Symbolic Computation **22** (1996), 247–277.

[16] 田島慎一, *Grothendieck duality* の計算と多変数 *Hermite* 補間問題, 京都大学数理解析研究所講究録 **1085** 「数式処理における理論と応用の研究」(1999), 82–90.

[17] 田島慎一, 多変数補間問題とホロノミック D-加群, 千葉大学数学講究録掲載予定.

[18] 田島慎一, *Hermite-Jacobi* 多変数補間積分とホロノミック D-加群, 京都大学数理解析研究所講究録「代数解析と特殊関数」掲載予定

[19] S. Tajima, *Grothendieck duality and Hermite-Jacobi formulas*, Proc. Seventh International Conference on Several Complex Variables, Dekker, to appear.

[20] S. Tajima, T. Oaku and Y. Nakamura, *Multidimensional residue calculus and holonomic D-modules*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1033**「特異点と複素解析幾何」(1998), 59–70.

[21] N. Takayama, *Kan: A system for computation in algebraic analysis* (1991–), (http://www.math.s.kobe-u.ac.jp).

[22] D. Zeilberger, *A new proof of Ehrenpreis's semilocal quotient structure theorem*, American J. of Math. **100** (1977), 1317–1332.