数理解析研究所講究録
1139巻 2000年 107-112

ランダムな複雑系のホワイトノイズ解析

飛田 武幸
(Takeyuki Hida)
名城大学 理工学部

1. 複雑系

複雑系の内容についての解釈は多種多様であり、それに応じていろいろなアプローチが試みられている。

Poincaré による力学系の研究を嚆矢とする立場もあれば、もっと古い話で、揺らぐ自然現象を取り上げたり,また単に多数のものが関与する事柄を指すことまであったりしたが、最近は fractal や chaos あるいは catastrophe 等までを含めた大きな枠組みを取り上げたりしている。それらをすべて統一して、一つの理論体系を作りあげるのは容易なことではないし、まだ相当時間がかかりそうである。それだけに、複雑系の研究はこれからの学問分野であり、対象とする事柄も多く見出され、今後の稔り多い研究の場であるということができよう。

我々はここで、一般論に立ち向かおうというのではなくて、対象も研究手段も狭く限定して、複雑系の一つの側面を考察することにしたい。すなわち、「ランダムな複雑系」に焦点を」あてて、その特性や重要性などを調べこの方面の研究の一助としたい。ランダムな系の中でも時間、さらには時間・空間をパラメータにもつ（space-time oriented）な偶然現象には、詳しい特色のある構造が内在しており、興味深いものがある。そのような対象の研究には確率かいせき、特にホワイトノイズ解析が有効に用いられる。その様子を逐次眺めていこう。

2. 確率素子

我々の扱おうとするランダムな複雑系とは、厳密な定義は内容が整ってから与えられるものとして,それは時間あるいは時間・空間の移行に応じて変動する確率変数の系である。それらは確率過程あるいは確率場と呼ばれる。これらを一先ずランダムな複雑系と理解して、解析的に取り扱いたい。

方針と手順は次のようである。

（1）基本となる確率過程をきめる。

（2）与えられたランダムな複雑系を、決められた基本的な確率過程の関数(ランダムでない汎関数）として表す。

（3）そのような汎関数の解析を行うのに必要な解析を準備する。必要があれば新しく設定する。

（4）複雑系を表す汎関数の解析により、元の系の性質や構造を調べる。この際の解析はたえずパラメータの動きを考慮に入れたものでなければならない。すなわち、**Causal Calculus** でなければならない。

（５）調べた汎関数と始めに選んだ基本となる確率過程の性質とから、与えられた複雑系の構造を決定し、必要な展開をはかる。

ここで若干の解説が必要である。

i) パラメータが１次元変数 t のとき、基本となる確率過程(超過程も含めて）の典型は当然（ガウス型の）ホワイトノイズである。

より一般に、 t をパラメータとする確率変数の系 ｛ Y(t) ｝ が

a) 各時点で独立な系であり、

b) 同分布であり、(したがって定常)

c) t について適当な regularity をもつ。

このとき,各 Y(t) を確率素子（idealized elementary random variable）と呼び、系 {Y(t)} を素過程（idealized elementary process）という。

さらに、好都合な（基本的な）条件

d) ガウス型である、

を加えることは自然である。典型であるといったホワイトノイズはこれらの条件をすべて満たす素過程である。

このように素（elementary）なものを基準にする立場は、いわゆる Reductionism （または Atomism）に倣ったものといえる。

こうして、ホワイトノイズ汎関数を扱う我々の立場が明らかになった。議論を進めるためには、定義を明確にしなければならないが、それはブラウン運動 $B(t)$ の時間微分 $\dot{B}(t)$ として与えられる。厳密な定義は既知のものとしておく。

ii) 汎関数についても基本的なものから確定していかねばならない。

各 $\dot{B}(t)$ が変数である。したがって、それらの多項式から出発するのが自然であろう。そのとき、多項式は加法的な renormalization が必要となり、結果はホワイトノイズの超汎関数となってしまう。こうして、それらを含む $\dot{B}(t)$ 達の非線形な汎関数を含み、かつ解析を遂行する上に必要なクラスとしての超汎関数空間が導入される。

ホワイトノイズの分布は当然ガウス型である。それは超関数の空間(無限次元である)の上に導かれた標準的な確率測度である。重要なことはそれが無限次元回転で不変なことである。この回転群から生ずる調和解析は、有限次元の解析やその無限次元への極限を含むばかりでなく、近似できない真に無限次元的な調和解析が現れ、極めて興味深いものとなる。その回転群のユニタリ表現、フーリエ変換、ラプラシアンなどで、無限次元特有の結果が多く知られている。

iii) Causal calculus について

汎関数の取り扱いにおいて、変数 t が explicitly に現れることには意義がある。なぜなら、我々の扱うランダムな複雑系を扱うときは、time-oriented または space-time-oriented

でなければならないからである。超汎関数のクラスの決定とか、微分・積分の演算の定義においても、この趣旨に沿うように準備されていることに注意したい。

さらに、多次元パラメータをもつ確率場のときにも、この趣旨を一般化して、それを活かした causal な解析を展開できるのも、ホワイトノイズ解析の一つの特徴である。

これらの詳しい解説は成書に譲り、急ぎ主題に入りたい。

3．複雑性を測る

ホワイトノイズを基礎にして stochastic な立場で複雑性を測るのが基本である。

i) Innovationn approach.

我々の解析において最も特徴的な方法である。

ランダムな複雑系の時間的な流れのもつ「複雑さ」すなわち確率過程や確率場のもつ複雑さを測ろうとするとき、与えられた系に内臓されている素過程で、各時点までの履歴はその系の履歴と全く同じ情報を持つ (このことの厳密な定義は可能である) ものを選びたい。もしそれが出来れば、元の複雑系を、いま得られた素過程の汎関数として表そう。その汎関数はもちろんランダムではない関数で、一般に非線形である。

上のような素過程は、一つでは目的が達せられず、いくつか必要なこともある。確率場の場合では一般に無限個必要となる。どの場合にしても、それら素過程をまとめて Innovation と呼ぶ。

ガウス過程 $X(t)$ が与えられたとき、もし $X(t)$ から素過程としてのホワイトノイズ $\dot{B}(t)$ を構成して、

$$X(t) = \int^{t} F(t,u)\ \dot{B}(u)\ du,$$

F : non-random function,

と表されるならば、$X(t)$ の性質は、ランダムな部分はよく知られた $\dot{B}(t)$ の言葉で、これに加えて核関数 $F(t,u)$ の解析的な性質によって記述される。これがガウス過程の標準表現の理論である ([1] 参照)。このとき、$\dot{B}(t)$ は勿論 innovation である。

ii) Multiplicity

1次元パラメータ t の場合を考える。パラメータがた次元の場合、またそれが曲線や曲面などの場合、後に注意するように、発展に一定の方向性を与えることにより、拡張して考えることができる.

取り上げる素過程は時間の推移に関して定常である。したがって t の進行に応じたランダム現象の推移は、素過程の各要素から生成されるヒルベルト空間に働くユニタリ作用素の1パラメータ群 $\{ U_t \}$ によって記述される。当然 U_t の t についての連続性は仮定される。このユニタリ群について、次の一般的定理を適用する。

ヒルベルト空間 H 上のユニタリ群 $\{ U_t \}$ と H のベクトル f があれば $\{U_t f;\ t \text{ real}\}$ の張る cyclic subspace がきまる。これを $H(f)$ と書く。

定理 (Hellinger-Hahn) 可分なヒルベルト空間 H とそこに作用する 1 パラメータ-ユニタリ群 { Ut } があるとき、高々可算個の cyclic subspaces Hn が存在して、H は

$$H = \bigoplus_n H_n$$

と直和分解され、Hn におけるスペクトル測度を μ_n とするとき

$$\mu_{n+1} \ll \mu_n$$

となっている。更にヒルベルト空間 H のこのような直和分解は、ユニタリ同値を除き、一意的である。

このとき, cyclic subspaces の個数が **multiplicity** (重複度) である。

{X(t), Ut} を発展現象としてのランダムな複雑系とするとき、multiplicity は複雑さを測る一つの尺度となる。

「maultiplicity が大きいほど複雑性が高い」

ということができる。

上の i) で扱った標準表現が存在するようなガウス過程では multiplicity は 1 であり、単純な複雑性をもつ。特に,ブラウン運動はそような典型となる。

iii) 多重マルコフ性

ガウス型の確率過程 X(t) について、 Unit multiplicity の場合でスペクトル測度が絶対連続のときを考える。平均連続かつ純非決定的で定常性があれば、この仮定は当然満たされている。

時刻 t (現在) までのすべての値を知って、未来を予測しようとするとき、常に過去の量からなる有限個の、例えば N 個の、確率変数により最良予測値が得られるときは、N 重マルコフ ガウス過程である。

X(t) が N 重マルコフ純非決定的定常ガウス過程ならそのスペクトル測度の密度関数はスペクトル λ^2 の有理関数で

$$Q(\lambda^2)/P(\lambda^2)$$

と表される。このとき

$$M = P\text{の次数} - Q\text{の次数}$$

が複雑性の一つの尺度となる。

この数は X(t) の t についての regularity の程度を反映し、「M が大きいほど複雑さは少ない」。

「補足」上の i), ii), III) の考察はパラメータが多次元のとき、あるいは曲線、曲面などのときにも、パラメータに適当に線形順序をつけて、その方向への multiplicity 等が定義される。 可能ないくつかの propagation の方向を考えることにより、それぞれの multiplicity を加えあわせて複雑性を考えればよい。こうして、これまでの議論の拡張解釈が可能である。

以下、確率過程のとる値が多次元の場合も含めて、複雑性に関するいくつかの話題を取り

上げよう。

iv) Hausdorff dimension. Fractal dimension.

確率過程の見本関数の幾何学的な図形としての複雑さを表すものとして、これらの次元が導入されている。見本関数の集合を ensemble としてとらえており、関連した 1953 年の P. Lévy の研究は興味深い(例えば [10])。それは確率過程の動きに関した optimality の観点からの考察をより意味のあるものとしている。

v) Entropy.

確率論的な情報量を表すものとしてのエントロピーは、分布 $\{p_i\}$ に対して量

$$-\Sigma\, p_i \log p_i$$

が基本的な量となっており、状況に応じてこれから派生する各種の情報量が定義されている。その大きさ(比較しての量)は一種の複雑さを表している。

通信理論の立場から(複雑さの時間発展)Shannon は 同様な idea からくる dimension rate を定義していることに注意したい。 この概念は、もっと利用されてよいのではないだろうか?

また、関数空間に有限な次元数を与えるために Kolmogoroff-Tikhomirov によって提唱された(1959 年) ε-entropy も、関数空間の複雑さを考えようとする立場からも重要な概念である。

エントロピーあるいはその variation からなる量の時間的な増加率は、最近ホワイトノイズ解析の立場からも、いろいろと研究されている。それは進化の複雑性をみる一つの目安となるであろう。

vi) その他。

ランダムな複雑系に関連する話題として次の二つをあげよう。

a) 発展する諸現象の "reversibility / irreversibility" はこのような量に依存するところが大きい。 Brownian bridge (固定端ブラウン運動)はガウス型マルコフ過程であるとするほか reversible という特徴がある。端をガウス分布で揺らがせるとブラウン運動になるが、これを逆に見るとブラウン運動の複雑さが、より不変性の多い Brownian bridge に分解されることには興味がある。

b) Stochastic area.

P. Lévy は 1940 年、平面上のブラウン運動に対して stochastic area を定義した。それは次の式で与えられる。

$$S(t) = (1/2)\int_0^t \{B_1(s)\dot{B}_2(s) - B_1(s)\dot{B}_2(s)\}\, ds.$$

これは勿論確率過程として、またホワイトノイズの二次形式として、大変特色のあるもので、その詳しい性質が知られている。例えば S(1) の分布については、その特性関数は 1/cosh (z/2) である、など。

一方、この S(t) を力学の立場からみれば、これは２次元ブラウン運動の原点のまわりの "angular momentum" に関連していることに注意したい。２次元ブラウン運動をランダムな複雑系とみた場合に空間における linear な動きばかりでなく、回転についてもその特質が現れるはずであり、その意味で S(t) の時間発展に関する特性は系の複雑性を表す注目すべき量である。

より一般の確率過程についても、類似の量に着目することは有意義であろう。

[参考文献]

[1] T. Hida, Canonical representations of Gaussian processes and their applications. Mem. College of Sci. Univ. of Kyoto A, 33 (1960), 109-155.

[2] T. Hida, Brownian Motion. Springer-Verlag, 1980.

[3] 飛田 武幸 (T. Hida)、Fluctuation, Nonlinearity and Human Beings. 東京情報大学研究論集 (Journal of Tokyo University of Information Sciences), 2 (1998), 169-177.

[4] 飛田 武幸 (T. Hida)、ホワイトノイズと関数解析 (仮題)。(White Noise and Functional Analysis)。Seminar on Probability. 2000.

[5] T. Hida and Si Si, Innovations for random fields. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 1 (1998), 499-509.

[6] T. Kailath et al, An innovation approach to least square estimation. Part I - IV. IEEE Trans. On Automatic Control. Vol.13 ～, 1968 ～.

[7] P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires. Gauthier-Villars, 1937.

[8] P. Lévy, Le mouvement brownien plan. Amer. Journal of Math., 62 (1940), 487-550.

[9] P. Lévy, Random functions; General theory with special reference to Laplacian random functions. Univ. California Press. 1953, 331-388.

[10] P. Lévy, La mesure de Hausdorff de la courbe du mouvement brownien. Giornale dell'Istituto Italians degli Attuari. 16 (1953), 1-37.

[11] P. Lévy, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars, 1951.

[12] B. Mandelbrot, Les objects fractals. Flammarion. Forme, hasard et dimension. 1975.

[13] N. Obata, White Noise Calculus and Fock Space. Lecture Notes in Math, #1577, Springer-Verlag. 1994.

[14] N. Wiener, Nonlinear problems in random theory. MIT Press. 1958.

[15] K. Yosida, Functional Analysis. Springer-Verlag. 6th ed. 1980.

終。