数理解析研究所講究録
1145 巻 2000 年 130-134

Fractional Calculus の数値計算への応用

都田　艶子 (Tsuyako Miyakoda)　*
Department of Applied Physics
Graduated School of Engineering
Osaka University, Suita 565-0871 Japan

1　はじめに

はじめに、N-Fractional Calculus を定義する。よく知られた 1 変数の場合の Cauchy の積分表示の拡張である。Cauchy の積分表示は

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\imath}\oint\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta \quad (n\in\mathbf{N}\bigcup\{0\}, z\in\mathbf{D}) \tag{1}$$

ここで　$f(z)$ は領域 $\mathbf{D}$ で解析的、$\mathbf{D}$ は $\zeta-$ 平面における区分的になめらかな閉 Jordan 曲線に囲まれた領域である。

これを拡張することにより定めた西本の Fractional Calculus の定義 (N-Fractional Calculus) は以下のようなものである。

曲線 C と領域 D は $C=\{C_-,C_+\}$, $D=\{D_-,D_+\}$ と書いて C_- または C_+, D_- または D_+ をとるとする。これらは
C_- は 2 点 z と $-\infty+iIm(z)$　を結ぶカットに沿った曲線、
C_+ は 2 点 z と $\infty+iIm(z)$　を結ぶカットに沿った曲線,
D_- は C_- の内側の領域,　D_+ は C_+ に囲まれた内側の領域とする。
そして $f=f(z)$ が D で正則な関数とするとき、

$$f_\nu(z)=\frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}}d\zeta \tag{2}$$

$$(f)_{-m}=\lim_{\nu\to-m}(f)_\nu \quad (m\in\mathbf{Z}^+), \tag{3}$$

とする。ここで

$$-\pi\leq arg(\zeta-z)\leq\pi \quad for\ \mathbf{C}^-,$$

*email: miyakoda@ap.eng.osaka-u.ac.jp

$$0 \leq arg(\zeta - z) \leq 2\pi \quad for\ \mathbf{C}^{+},$$
$$\zeta \neq z, \quad z \in \mathbf{C}, \quad \nu \in \mathbf{R},$$
$$\Gamma; Gamma \quad \text{関数}$$

このとき、 $|(f)_\nu| < \infty$ がなりたつならば、この $(f)_\nu$ を z に関する f の任意次数 ν の Fractional Differintegration と定義する。

さらに Fractional calculus operator (N-fractional operator) N^ν を次のように定義する。

$$N^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i}\int_C \frac{(\cdot)d\zeta}{(\zeta - z)^{\nu+1}} \quad (\nu \notin \mathbf{Z}^-), \tag{4}$$

そして

$$N^{-m} = \lim_{\nu \to -m} N^\nu \quad (m \in \mathbf{Z}^+), \tag{5}$$

演算子 $\circ$ は次のように定義する。

$$N^\beta \circ N^\alpha f = N^\beta N^\alpha f = N^\beta(N^\alpha f) \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}), \tag{6}$$

するとさらに次のことがいえて

$$N^\beta(N^\alpha f) = N^{\beta+\alpha} f \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}), \tag{7}$$

つぎの集合

$$\{N^\nu\} = \{N^\nu | \nu \in \mathbf{R}\}, \tag{8}$$

は Abelian product group であるといえる。

2 任意次数の微分方程式

次のような形の方程式は液体の中の振動の減衰モデルの記述、diffusion 過程の記述などに使われる。[2]

$$(D^q[x - x_0])(t) = \beta x(t) + f(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{9}$$

$$x(0) = x_0 \tag{10}$$

$$0 < q < 1, \quad \beta \leq 1,$$

ここで f は区間 [0,1] で与えられた関数、x は未知関数である。

[2] でこの型の方程式に対し Diethelm は Riemann-Liouville の Fractional derivative の定義

$$(D^q x)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{x(u)}{(t-u)^q}dt \tag{11}$$

によって取り扱い、数値計算とその誤差評価を行っている。我々はこのような問題に対し、N-Fractional Calculus により解を求めることを試みる。

ここで次数 q は有理数、$\frac{m}{n}$ と書けるものとする。以下の式を考える。

関数φを$\varphi \in \wp^{\circ} = \{\varphi |\ 0 \neq |\varphi_\nu| < \infty, \nu \in \mathbf{R}\}$そして$f \in \wp^{\circ}$とする。このとき与えられた定数$a$と$f(z)$　に対し,

$$\varphi_{m/n} + \varphi \cdot a = f \quad (a \neq 0,\ m < n,\quad m, n \in \mathbf{Z}^{+}) \tag{12}$$

を満たす$\varphi(z)$を求めることを考える。

この式の両辺に対して、順次、演算子$N^{m/n}$, $N^{2m/n}$, $\cdots$, $N^{(n-1)m/n}$を作用させると、N-Fractional Operatorの性質から次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \varphi_{2m/n} + \varphi_{m/n} \cdot a &= f_{m/n} \\ \varphi_{3m/n} + \varphi_{2m/n} \cdot a &= f_{2m/n} \\ &\cdots\cdots \\ \varphi_{(n-1)m/n} + \varphi_{(n-2)m/n} \cdot a &= f_{(n-2)m/n} \\ \varphi_{m} + \varphi_{(n-1)m/n} \cdot a &= f_{(n-1)m/n} \end{aligned}$$

ここでこれらの関係式を最後の式に代入すると

$$\varphi_m - \varphi \cdot (-a)^n = g \tag{13}$$

となり、gは

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} f_{km/n} \cdot (-a)^{n-1-k}.$$

である。未知関数へのFractional Calculusが既知関数へのFractional Calculusへと置き換わったm次の微分方程式に帰着される。

たとえば$q = 1/2$であれば、式は

$$\varphi_1 - \varphi \cdot (-a)^2 = g \tag{14}$$

そしてgは

$$g = -a \cdot \mathrm{f} + f_{1/2}.$$

たとえば$q = 3/4$であれば、式は

$$\varphi_3 - \varphi \cdot (-a)^4 = g \tag{15}$$

そしてgは

$$g = -a^3 \mathrm{f} + a^2 f_{3/4} - a f_{3/2} + f_{9/4}$$

となる。既知関数へのFractional Calculusは[1]の結果を適用する。主なElemantary Functionに対する結果には次のようなものがある。

1.
$$(e^{ax})_\nu = a^\nu e^{ax}, \quad (e^{-ax})_\nu = e^{-i\pi\nu} a^\nu e^{-ax} \quad for \quad a \neq 0$$

2.
$$(\cos ax)_\nu = a^\nu \cos(ax + \frac{\pi}{2}\nu) \quad (a \neq 0)$$

3.
$$(x^a)_\nu = e^{-i\pi\nu}\frac{\Gamma(\nu-a)}{\Gamma(-a)}x^{a-\nu} \quad (|\frac{\Gamma(\nu-a)}{\Gamma(-a)}| < \infty)$$

4.
$$(\log ax)_\nu = -e^{-i\pi\nu}\Gamma(\nu)x^{-\nu} \quad (|\Gamma(\nu)| < \infty)$$

5.
$$(\sinh ax)_\nu = (-ia)^\nu \sinh(ax + i\frac{\pi}{2}\nu) \quad (a \neq 0)$$

3 数値例

(9) の形の定式化は Riemann-Liouville の定義により、$D^q(constant) \neq 0$ であるところからきている。いま $(constant)_\nu = 0$ が成り立つので、(12) 式の形で考えて十分である。

（1）(12) 式で $m/n = 1/2$, $a = 2$, $f(z) = e^{2z}$, $z \in \mathbf{R}$ のとき，解くべき式は

$$\varphi_1 - \varphi \cdot (-2)^2 = g$$

そして g は

$$g = -2 \cdot \mathrm{f} + f_{1/2} = (\sqrt{2}-2)e^{2z}.$$

となる。これを初期条件 $\varphi(0) = 0$ で z が 0 から 1 まで解く。このときの真の解は

$$\varphi(z) = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})e^{2z} - (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})e^{4z}$$

である。

（2）(12) 式で $m/n = 2/3$, $a = 2$, $f(z) = e^{2z}$, $z \in \mathbf{R}$ とする。解くべき式は

$$\varphi_2 - \varphi \cdot (-2)^3 = g$$

そして g は

$$g = e^{2z}(4 - 2 \cdot 2^{2/3} + 2^{4/3})$$

となる。

初期条件 $\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 0$ で z が 0 から 1 まで解く。このとき $b = 4 - 2 \cdot 2^{2/3} + 2^{4/3}$ とおくと

$$\varphi(z) = \frac{b}{12}e^{2z} - \frac{b}{12}\cos(2\sqrt{2}z) - \frac{b}{12\sqrt{2}}\sin(2\sqrt{2}z)$$

が真の解となる。

表 1 に、Runge-Kutta 法 6 次公式による計算結果と真の解の計算値を示す。計算は区間幅 $h = 0.01$ で行った。これをみると計算結果の精度はたかだか 2 桁である。

例に見られるように既知関数 $f(z)$ の Fractional Calculus には既知の結果を組み合わせて適用するが、fractional の次数が高くなればなるほど $g(z)$ の計算は煩雑になり、$f(z)$ が単純な関数であったとしても $g(z)$ は複雑な式となる。一方で、計算方法は線形常微分方程式

Table 1: Runge-Kutta 法による結果

z	(1) の計算値	真の解の値	(2) の計算値	真の解の値
0.2	-0.2192421	-0.2149005	0.07638496	0.07452836
0.4	-0.8150034	-0.7988637	0.3299405	0.3282892
0.6	-2.301757	-2.256174	0.7805111	0.7736428
0.8	-5.850567	-5.734701	1.435172	1.416371
1.0	-14.106600	-13.827220	2.309936	2.271846

の解法そのものの適用であり、そう難しくはない。どちらの要因が大きく影響しているかは今の段階ではまだよくわからない。

また、Fractional Calculus の定義が複素積分であるために、基本的に複素数を取り扱うことになる。[2] による例題で、真の解が実数のべき乗になるよう設定された問題を解いてみたが、定義が異なるため結果も異なり、数値結果をどう解釈したらいいのかを追求中である。

それぞれの定義におけるモデル問題の取り扱いにおいて、得意な問題の領域はそれぞれどこかということが問題となりそうである。

References

[1] K. Nishimoto, Fractional Calculus, Vol.1(1984),Vol.2(1987),Vol.3(1989), Vol.4(1991), Vol.5(1996),Descartes Press,Koriyama,Japan.

[2] K. Diethelm, An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order, *Electronic transactions on Numerical Analysis*,**5**, 1-6,(1997).

[3] T. Miyakoda and K. Nishimoto, N-method to fractional differential equations, *J.Fractional Calculus*, **15**,7-12 (1999).