数理解析研究所講究録
1147 巻 2000 年 107-120

半線形発展方程式に対する解の数値的検証法

九州大学大学院システム情報科学研究科　　皆本 晃弥 (Teruya Minamoto)

1 はじめに

本稿では，次のような半線形放物型方程式

$$\begin{cases} u_t - \triangle u &= -f(x,t,u), \quad (x,t) \in Q, \\ u(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times J, \\ u(x,0) &= 0, \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

および，半線形双曲型方程式

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u &= -f(x,t,u) \quad (x,t) \in Q, \\ u(x,t) &= 0 \quad x \in \partial\Omega \times J, \\ u(x,0) &= 0 \quad x \in \Omega, \\ u_t(x,0) &= 0 \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

に対する解の数値的検証法について考える．ここで，Ωは$\mathbf{R}$の有界開区間，または，$\mathbf{R}^2$の有界矩形領域であり，$(\cdot,\cdot)$は，$L^2(\Omega)$内積を表す．また，$Q=\Omega\times J$であり，$(\hat{f}(u))(x,t) := f(x,t,u(x,t))$で定義される非線形写像$\hat{f}$は，$L^p(Q)$から$L^2(Q)$への非線形写像である$(2 \le p \le 6)$.

著者らは[5, 6]において，１次元の場合に半線形発展方程式の解の存在を保証する方法を提案した．本稿では，それらの方法を2次元に拡張し，さらに，Krawczyk法に基づく[10]の考えを取り入れ，解の存在だけでなく一意性までもを保証するような方法を提案する．今回の方法は，空間設定や定式化は放物型と双曲型ではほとんど同じであり，主な違いは，放物型の場合に，重み付きノルムを使用することである．そのため，放物型方程式の方が，実際の検証手順に現れるノルム評価がやや煩雑になる．そこで，本稿では，定式化と検証条件を分かりやすく説明するために，主に双曲型方程式について述べ，最後に，放物型方程式について簡単に触れることにする．

2 問題と不動点定式化

次の双曲型方程式を満たす関数uを求めることを考える．

$$u \in L^2(J;H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(J;L^2(\Omega)),$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(u,v) + (\nabla u, \nabla v) &= (-f(\cdot,u),v), \qquad v \in H_0^1(\Omega), \quad t \in J := (0,T), \\ u(\cdot,0) = 0, &\qquad u_t(\cdot,0) = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

この方程式は，(1.2) の弱形式であり，また，(2.1) の微分は，超関数の意味での微分である．つまり，

$$\int_0^T (u(\cdot,t),v)\varphi''(t)dt + \int_0^T (\nabla u(\cdot,t),\nabla v)\varphi(t)dt = \int_0^T (-f(\cdot,t,u(\cdot,t)),v)\varphi(t)dt, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(0,T)$$

である．

次に, 次式で定義される時間依存 Sobolev 空間

$$H \equiv L^2(J;H_0^1(\Omega)) \cap H^1(J;L^2(\Omega))$$

を導入する．また，この空間のノルムを

$$\|u\|_H^2 = \int_J \|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_J \|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$$

で定義する．

さらに，$u_h \in \tilde{H}$を (2.1) の近似解とし，非線型写像$\hat{f}$に対して次のような仮定をおく．

(A1)$\hat{f} : L^p(Q) \to L^2(Q)$ は連続で，有界集合 $U \subset L^p(Q)$ に対して，$\hat{f}(U) \subset L^2(Q)$ は有界.
(A2)$\hat{f}$は，$L^p(Q)$ において Fréchet 微分可能.

さて，各 $g \in L^2(Q)$, に対して， $a \in C^1([0,T];L^\infty(\Omega))$ ならば，次の方程式は一意解$\phi \in \tilde{H} := \{\phi \in H | \phi(\cdot,0) = 0, \phi_t(\cdot,0) = 0\}$ を持つことが知られている [3].

$$\frac{d^2}{dt^2}(\phi,v) + (\nabla\phi,\nabla v) + (a\phi,v) = (g,v) \qquad v \in H_0^1(\Omega), \quad t \in J. \tag{2.2}$$

(2.2) の対応を $Ag = \phi$と書き，$a = f'(\cdot,u_h)$ かつ$\frac{d}{dt}f'(\cdot,u_h) \in L^\infty(Q)$ を仮定するとき，合成作用素Tを

$$Tu \equiv A[f'(\cdot,u_h)u - f(\cdot,u)] \tag{2.3}$$

で定義する．ただし， $f'(\cdot,u_h)(x,t) := \frac{\partial f}{\partial u}(x,t,u_h(x,t))$ である．

このとき，作用素 $A : L^2(Q) \to \tilde{H}$と埋め込み $H \hookrightarrow L^p(Q)$ が有界連続なので，仮定 (A1) と (A2) より，作用素$T : L^p(Q) \to L^p(Q)$ は，$L^p(Q)$ で Fréchet 微分可能である．

注意 1. 例えば，$f(\cdot,u) = gu^m$は，$g \in L^\infty(Q)$ および自然数 $m = 1,2,3$ に対して，仮定 (A1) および (A2) を満たす．このとき，$f'(\cdot,u_h) = mgu_h^{m-1}$であり，$u_h \in C^1([0,T];L^\infty(Q))$ ならば, Tは定義可能である．なお，1 次元の場合は，Sobolev の埋め込み定理より，$2 \le p < \infty$ と選ぶことができるので，この例では，$1 \le m < \infty$ と選ぶことができる．

3 検証条件

元の不動点形式 (2.3) を残差形式に変形するために，$v = u - u_h$とし，次式で定義される作用素$\tilde{T}: L^p(Q) \to L^p(Q)$ を導入する．

$$\tilde{T}v \equiv T(u_h + v) - u_h. \tag{3.1}$$

そして，(2.1) の解を含むような集合Vを構成するために，ある実数α_0を選び，

$$V \equiv \{v \in L^p(Q) | \|v\|_{L^p(Q)} \leq \alpha_0\} \tag{3.2}$$

と定義する．

次に，

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}(0)\|_{L^p(Q)} &\leq \beta_0, & \qquad (3.3)\\ \|\tilde{T}'(v_1)v_2\|_{L^p(Q)} &\leq \gamma_0 \qquad \forall v_1, v_2 \in V, & \qquad (3.4) \end{aligned}$$

を満たす正数β_0とγ_0を選び，集合$K \subset L^p(Q)$を次式で定義する．

$$K \equiv \{v \in L^p(Q) | \|v\|_{L^p(Q)} \leq \beta_0 + \gamma_0\}. \tag{3.5}$$

このとき，[7, 10] と同様な議論を用いることにより，次のような検証条件を導くことができる．

定理 1. $K \subset V$が任意のVに対して成り立つ，すなわち，$\beta_0 + \gamma_0 \leq \alpha_0$が成り立つならば，

$$v = \tilde{T}(v)$$

の不動点がKに存在し，それはVにおいて一意である．

4 検証に必要なノルム評価

この節では，前節のβ_0およびγ_0を求める方法を述べる．そのために，次を満たす2つの定数C_1およびC_2が存在すると仮定する．

$$\begin{aligned} \|Ar\|_H &\leq C_1 \|r\|_{L^2(Q)} \qquad \forall r \in L^2(Q), & \qquad (4.1)\\ \|Ar\|_{L^p(Q)} &\leq C_2 \|Ar\|_H. & \qquad (4.2) \end{aligned}$$

もし，$z[u_h] \equiv u_{htt} - \triangle u_h + f(\cdot, u_h) \in L^2(Q)$ を満たすような近似解$u_h \in \tilde{H}$を求めることができるならば，

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}(0)\|_{L^p(Q)} &= \|Az[u_h]\|_{L^p(Q)} \\ &\leq C_2 \|Az[u_h]\|_H \\ &\leq C_1 C_2 \|z[u_h]\|_{L^2(Q)} & \qquad (4.3) \end{aligned}$$

が成り立つ．また，同様にして，

$$\begin{aligned}\|\tilde{T}'(v_1)v_2\|_{L^p(Q)} &\le C_1C_2\|\hat{f}'(u_h+v_1)v_2-\hat{f}'(u_h)v_2\|_{L^2(Q)}\\ &\le C_1C_2G_{\alpha_0} \qquad \forall v_1,v_2\in V \end{aligned} \tag{4.4}$$

を得ることができる．ここで，G_{α_0}は，(3.2) のα_0に依存するパラメータである．

以下では，$a_{x_1}<b_{x_1}$および $a_{x_2}<b_{x_2}$とし，開区間 $I_{x_1}=(a_{x_1},b_{x_1})$ および $I_{x_2}=(a_{x_2},b_{x_2})$ に対して，$\Omega=I_{x_1}\times I_{x_2}$，$d=max\{b_{x_1}-a_{x_1},b_{x_2}-a_{x_2}\}$ とする．このとき，次の補題により，C_1の値が分かる．

補題 1. $\underline{a}$および$\overline{a}$を$\underline{a}\le a(x,t)\le\overline{a}$ を満たす定数とする．このとき，(4.1) における C_1は，次式で与えられる．

$$C_1=\sqrt{\frac{1}{c}(e^{cT}-1)}.$$

ただし，

$$c=\begin{cases}\max(1-\underline{a}T,\dfrac{d^2}{n_0\pi^2}\|a_t\|_{L^\infty(Q)}) & (\underline{a}<0\text{のとき})\\ \max(1,\dfrac{d^2}{n_0\pi^2}\|a_t\|_{L^\infty(Q)}) & (\underline{a}\ge 0\text{のとき})\end{cases}$$

であり，n_0は次元を表す．

(証明)

1 次元の場合も全く同様に証明できる [6] ので，2 次元の場合のみ証明する．

まず，

$$b(\phi,v)(t)\equiv(\nabla\phi(\cdot,t),\nabla v(\cdot,t))+(a(\cdot,t)\phi(\cdot,t),v(\cdot,t)) \qquad \phi(\cdot,t),v(\cdot,t)\in H_0^1(\Omega) \tag{4.5}$$

とし，(2.2) において，形式的に $v=\phi_t(\cdot,t)$ とすると，

$$\frac{d^2}{dt^2}(\phi(\cdot,t),\phi_t(\cdot,t))+b(\phi,\phi_t)(t)=(g(\cdot,t),\phi_t(\cdot,t)) \tag{4.6}$$

を得る．

このとき，

$$\frac{d}{dt}b(\phi,\phi)(t)=2b(\phi,\phi_t)(t)+(a_t(\cdot,t)\phi(\cdot,t),\phi(\cdot,t))$$

を使うと，

$$\frac{d}{dt}(\|\phi_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+b(\phi,\phi)(t))-(a_t(\cdot,t)\phi(\cdot,t),\phi(\cdot,t))=2(g(\cdot,t),\phi_t(\cdot,t))$$

となる．そして，上式の両辺を t について積分すると，

$$\|\phi_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+b(\phi,\phi)(t)=\int_0^t(a_t(\cdot,s)\phi(\cdot,s),\phi(\cdot,s))ds+2\int_0^t(g(\cdot,s),\phi_t(\cdot,s))ds$$

が従う．

ここで，

$$b(\phi,\phi)(t) \geq \|\nabla\phi(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \underline{a}\|\phi(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

に注意すると

$$\|\phi(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\phi(\cdot,t)-\phi(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (\int_0^t \|\phi_s(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}ds)^2 \leq T\int_0^t \|\phi_s(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds$$

となる．

$\underline{a} \geq 0$ の場合は，以下の証明において，$\underline{a} = 0$ とすればいいので，$\underline{a} \leq 0$ の場合のみ証明をする．

上の不等式より，

$$\begin{aligned}\|\phi_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq & -\underline{a}T\int_0^t \|\phi_s(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds + \|a_t\|_{L^\infty(Q)}\int_0^t \|\phi(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds \\ & + \int_0^t \|g(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds + \int_0^t \|\phi_s(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds\end{aligned}$$

を得ることができる．さらに，Poincaré の不等式より，

$$\|\phi(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{d}{\pi\sqrt{2}}\|\nabla\phi(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.7}$$

を得て，

$$c = max(1-\underline{a}T, \frac{d^2}{2\pi^2}\|a_t\|_{L^\infty(Q)})$$

とおくと

$$\begin{aligned}\|\phi_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c(\int_0^t \|\phi_s(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds & + \int_0^t \|\nabla\phi(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds) \\ & + \int_0^t \|g(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds\end{aligned}$$

を導くことができる．

ここで，Gronwall の補題を適用すると

$$\|\phi_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{ct}\int_0^t \|g(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds \leq e^{ct}\|g\|^2_{L^2(Q)}$$

となり，さらに，両辺を (0,T) 上で積分すると， 結局，

$$\|\phi\|^2_{L^2(Q)} + \|\nabla\phi\|^2_{L^2(Q)} \leq \frac{1}{c}(e^{cT}-1)\|g\|^2_{L^2(Q)}$$

が成り立つ．

□

(4.2) の C_2 は補題 2 で与えられ，C_2 を求めるために，次の命題を利用する．

命題 1. (e.g.[1]) $\tilde{x_1} = (x_2, x_3)$, $\tilde{x_2} = (x_1, x_3)$, $\tilde{x_3} = (x_1, x_2)$ とし，$I_k(k = 1, 2, 3)$ は有界開区間とする．そして，次式で定義される関数 F を考える．

$$F(x) = F(x_1, x_2, x_3) = F_1(\tilde{x_1})F_2(\tilde{x_2})F_3(\tilde{x_3}).$$

ただし，$F_k \in L^2(\Omega_k)(k = 1, 2, 3)$, $\Omega_1 = I_2 \times I_3$, $\Omega_2 = I_1 \times I_3$, $\Omega_3 = I_1 \times I_2$, $\Omega = I_1 \times I_2 \times I_3$である．

このとき，$F \in L^1(\Omega)$ であり，次の不等式が成り立つ．

$$\|F\|_{L^1(\Omega)} \leq \|F_1\|_{L^2(\Omega_1)}\|F_2\|_{L^2(\Omega_2)}\|F_3\|_{L^2(\Omega_3)}.$$

補題 2. (4.2) の C_2は次式で与えられる．

$$C_2 = \begin{cases} \frac{p}{4}|Q|^{\frac{1}{p}} & (\Omega\text{が 1 次元の場合}) \\ (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}\frac{2\sqrt{3}}{9}p|Q|^{\frac{6-p}{6p}} & (\Omega\text{が 2 次元の場合}). \end{cases}$$

(証明)

1 次元の場合は，[6] で証明が与えられているので，ここでは，2 次元の場合のみを考える．

任意の $w \in \tilde{C} := \{v \in C^1([0,T]; C_0^\infty(\Omega)) | v(\cdot, 0) = 0, v_t(\cdot, 0) = 0\}$ および $(x_1, x_2, t) \in Q$ に対して，

$$|w(x_1, x_2, t)| \leq \frac{1}{2}\int_{I_{x_1}} |w_{x_1'}(x_1', x_2, t)|dx_1' =: f_1(\tilde{x_1}),$$

$$|w(x_1, x_2, t)| \leq \frac{1}{2}\int_{I_{x_2}} |w_{x_2'}(x_1, x_2', t)|dx_2' =: f_2(\tilde{x_2})$$

および

$$|w(x_1, x_2, t)| \leq \int_J |w_{t'}(x_1, x_2, t'))|dt' =: f_3(\tilde{t})$$

が成り立つ．

これより，

$$|w(x_1, x_2, t)|^{\frac{3}{2}} \leq f_1^{\frac{1}{2}}(\tilde{x_1})f_2^{\frac{1}{2}}(\tilde{x_2})f_3^{\frac{1}{2}}(\tilde{t}) \tag{4.8}$$

が従う．

このとき，(4.8) に命題 1 を適用すると，

$$\int_Q |w(x_1, x_2, t)|^{\frac{3}{2}} dx_1 dx_2 dt \leq \frac{1}{2}\|w_{x_1}\|_{L^1(Q)}^{\frac{1}{2}}\|w_{x_2}\|_{L^1(Q)}^{\frac{1}{2}}\|w_t\|_{L^1(Q)}^{\frac{1}{2}}$$

を得ることができるので，

$$\|w\|_{L^{\frac{3}{2}}(Q)} \leq (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}\|w_{x_1}\|_{L^1(Q)}^{\frac{1}{3}}\|w_{x_2}\|_{L^1(Q)}^{\frac{1}{3}}\|w_t\|_{L^1(Q)}^{\frac{1}{3}} \tag{4.9}$$

が成り立つ．

ここで，$\tilde{C}$が$\tilde{H}$で稠密である [11] ことを利用すると，任意の$w \in \tilde{H}$に対して (4.9) が成り立つことが分かる．

$w = |v|^s (1 \leq s \leq 4)$ を (4.9) に代入すると，

$$\|v\|^s_{L^{\frac{3}{2}s}(Q)} \leq (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} s \|v^{s-1}\|_{L^2(Q)} \|v_{x_1}\|^{\frac{1}{3}}_{L^2(Q)} \|v_{x_2}\|^{\frac{1}{3}}_{L^2(Q)} \|v_t\|^{\frac{1}{3}}_{L^2(Q)} \tag{4.10}$$

なので，Hölder の不等式より

$$\int_Q |v(x_1, x_2, t)|^{2(s-1)} dx_1 dx_2 dt \leq \|v\|^{2(s-1)}_{L^{\frac{3}{2}s}(Q)} |Q|^{\frac{4-s}{3s}} \tag{4.11}$$

を得る．

(4.10) および (4.11) より，

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^{\frac{3}{2}s}(Q)} &\leq (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} s |Q|^{\frac{4-s}{6s}} \|v_{x_1}\|^{\frac{1}{3}}_{L^2(Q)} \|v_{x_2}\|^{\frac{1}{3}}_{L^2(Q)} \|v_t\|^{\frac{1}{3}}_{L^2(Q)} \\
&\leq (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} s |Q|^{\frac{4-s}{6s}} \frac{1}{3} (\|v_{x_1}\|_{L^2(Q)} + \|v_{x_2}\|_{L^2(Q)} + \|v_t\|_{L^2(Q)}) \\
&\leq (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} s |Q|^{\frac{4-s}{6s}} \frac{\sqrt{3}}{3} \|v\|_H
\end{aligned}$$

が従うので，最後に $s = \frac{2}{3}p$ とすることにより，望むべき結果を得る．

□

5　検証手順と数値例

S_hをパラメータ h に依存する $H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ の有限次元部分空間とし，N を S_h の次元とする．このとき，u_hを次のように表す．

$$u_h(x, t) = \sum_{i=1}^{N} u_i(t) \hat{\phi}_i(x).$$

ただし，$\hat{\phi}_i$は S_hの基底関数である．

このようにして，u_hを Newton 反復

$$(u^{(n)}_{htt}, \hat{\phi}_j) + (\nabla u^{(n)}_h, \nabla \hat{\phi}_j) + (f'(u^{(n-1)}_h) u^{(n)}_h, \hat{\phi}_j) = (f'(u^{(n-1)}_h) u^{(n-1)}_h - f(u^{(n-1)}_h), \hat{\phi}_j) \tag{5.1}$$

により求める．ここで，n は反復回数を表す．

次に，時間を離散化するために，区間を等分割し，その幅をΔt として，

$$t_k = k\Delta t, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

と表すことにする．

そして，時間微分については，以下のような Newmark 法を [9] 適用する．

$$u_i^{(n)}(t+\Delta t) \approx u_i^{(n)}(t) + \Delta t \dot{u}_i^{(n)}(t) + \Delta t^2[\beta \ddot{u}_i^{(n)}(t+\Delta t) + (\frac{1}{2}-\beta)\ddot{u}_i^{(n)}(t)] \quad (5.2)$$

$$\dot{u}_i^{(n)}(t+\Delta t) \approx \dot{u}_i^{(n)}(t) + \Delta t[\theta \ddot{u}_i^{(n)}(t+\Delta t) + (1-\theta)\ddot{u}_i^{(n)}(t)]. \quad (5.3)$$

ただし，$\dot{u}_i = \dfrac{du_i}{dt}$ and $\ddot{u}_i = \dfrac{d^2u_i}{dt^2}$であり，$\theta$および$\beta$は，非負パラメータである．

また，(5.2) より，

$$\ddot{u}_i^{(n)}(t+\Delta t) \approx \frac{1}{\beta\Delta t^2}[u_i^{(n)}(t+\Delta t) - u_i^{(n)}(t)] - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}_i^{(n)}(t) - (\frac{1}{2\beta}-1)\ddot{u}_i^{(n)}(t) \quad (5.4)$$

となることに注意する．このとき，時刻tにおける近似解$u_i^{(n)}(t)$, $\dot{u}_i^{(n)}(t)$, $\ddot{u}_i^{(n)}(t)$が既知ならば，手順 (i)-(iii) により時刻$t+\Delta t$における近似解を得ることができる．

(i):(5.4) を次の方程式

$$\begin{aligned}(u_{htt}^{(n)}(t+\Delta t), \hat{\phi}_j) &+ (\nabla u_h^{(n)}(t+\Delta t), \nabla\hat{\phi}_j) + (f'(u_h^{(n-1)}(t+\Delta t))u_h^{(n)}(t+\Delta t), \hat{\phi}_j) \\ &= (f'(u_h^{(n-1)}(t+\Delta t))u_h^{(n-1)}(t+\Delta t) - f(u_h^{(n-1)}(t+\Delta t)), \hat{\phi}_j) \quad (5.5)\end{aligned}$$

に代入し， $u_i^{(n)}(t+\Delta t)$を求める．

(ii):(i) で求めた$u_i^{(n)}(t+\Delta t)$を (5.4) に代入して，$\ddot{u}_i^{(n)}(t+\Delta t)$を求める．

(iii):(ii) で求めた$\ddot{u}_i^{(n)}(t+\Delta t)$を (5.3) に代入して，$\dot{u}_i^{(n)}(t+\Delta t)$を求める．

このスキームの初期値は，初期条件より$u_i(0) = \dot{u}_i(0) = 0$であり，連立１次方程式$\sum_{i=1}^{N}(\hat{\phi}_j, \hat{\phi}_i)\ddot{u}_i(0) = -(f(0), \hat{\phi}_j)(j=1,2,\ldots,N)$を解けば，$\ddot{u}_i(0)$を得ることができる．

以下の数値例において，$u_{htt} - \triangle u_h + f(\cdot, u_h) \in L^2(Q)$を満たさなければならないので，空間方向の基底関数には区分的エルミート３次関数を用い，時間方向には区分的エルミート３次補間を用いる．

１次元の場合

(1.2) において，

$f(x,t,u) = -Bu^2 - k\sin\pi x(2+\pi^2t^2 - Bkt^4\sin\pi x)$

とする．ただし，Bとkは定数で，$\Omega = (0,1)$，$T=1$とする．このとき，問題 (1.2) は，厳密解$u(x,t) = kt^2\sin\pi x$を持つ．

また，$p=4$とすると，仮定 $(A1)$ および $(A2)$ は満され，

$$\begin{aligned}\|\hat{f}'(u_h+v_1)v_2 - \hat{f}'(u_h)v_2\|_{L^2(Q)}^2 &= 4B^2\int\int|v_1v_2|^2dxdt \\ &\le 4B^2\|v_1\|_{L^4(Q)}^2\|v_2\|_{L^4(Q)}^2 \le 4B^2\alpha_0^4\end{aligned}$$

なので，(3.4) は

$$G_{\alpha_0} = 2B\alpha_0^2$$

に対して成り立つ.

一般に, 非線形問題に対するNewmark法の安定性を述べるのは難しいが, $\theta = \frac{1}{2}$ かつ$\beta = \frac{1}{4}$の場合, Newmark法は線形双曲型方程式に対して無条件安定 [9] なので, 以下の例では, $\theta = \frac{1}{2}$および$\beta = \frac{1}{4}$ とした.

以下の表において, NS および NT をそれぞれ空間方向, 時間方向の分割数を表し, $M = NS \times NT$ とする.

表 5.1: 1 次元の場合

Case 1: $B = 1.5, k = 1, NS = 60, M = 216000$	
C_1C_2	1.6487213
$\|z[u_h]\|_{L^2(Q)}$	0.0013745
α_0	0.0022922

Case 2: $B = 0.8, k = 2, NS = 100, M = 1000000$	
C_1C_2	1.6487213
$\|z[u_h]\|_{L^2(Q)}$	0.00075867
α_0	0.001255

2 次元の場合

(1.2) において,

$$f(x,t,u) = f(x_1,x_2,t,u) = -Bu^2 - k\sin\pi x_1 \sin\pi x_2 (2+2t^2\pi^2 - Bkt^4 \sin\pi x_1 \sin\pi x_2),$$

および$\Omega = (0,1) \times (0,1)$ とする. このとき, 方程式 (1.2) は厳密解 $u(x_1,x_2,t) = kt^2 \sin\pi x_1 \sin\pi x_2$を持つ.

表 5.2: 2 次元の場合

Case 3 $B = 1.0, k = 1.0$	
NS	8
Δt	$\frac{1}{64}$
C_1C_2	1.27137
$\|z[u_h]\|_{L^2(Q)}$	0.01825348
α_0	0.0247665

6　放物型方程式の場合

この節では，半線形放物型方程式 (1.1) に対する解の数値的検証法について簡単に述べる．

6.1　不動点定式化と検証条件

第 2 節で導入した空間 H に対して，次のような重み付きノルムを導入する．

$$\|u\|_{H_w}^2 = \int_J e^{-2\lambda t}\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_J e^{-2\lambda t}\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

ただし，λは固定された実数である．

さらに，$L^p(Q)$ に対しても次のような重み付きノルムを導入する．

$$\|u\|_{L_w^p(Q)}^p = \int_J e^{-p\lambda t}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}^p dt.$$

このとき，元の問題 (1.1) の弱形式は次のようになる．

$$(u_t, v) + (\nabla u, \nabla v) = (-f(\cdot,u), v), \qquad t \in J, \quad v \in H_0^1(\Omega). \tag{6.1}$$

これ以降，この方程式の解 $u \in \widehat{H} = \{\phi \in H | \phi(0) = 0\}$ を探すことを考える．

まず，問題

$$(\phi_t, v) + (\nabla\phi, \nabla v) + (a\phi, v) = (g, v) \qquad v \in H_0^1(\Omega), \quad t \in J \tag{6.2}$$

の解は，各 $g \in L^2(Q)$ に対して，$a \in L^\infty(Q)$ ならば，一意解$\phi \in \widehat{H}$を持つ [11] ので，この対応を $A_w g = \phi$と書くことにすると，次のような作用素T_wを定義することができる．

$$T_w u \equiv A_w[f'(\cdot,\hat{u}_h)u - f(\cdot,u)]. \tag{6.3}$$

次に，$\hat{u}_h$を，(1.1) の近似解とし，$v := u - \hat{u}_h$として，次式で定義される作用素 $\tilde{T_w} : L^p(Q) \to L^p(Q)$ を導入する．

$$\tilde{T_w} v \equiv T_w(\hat{u}_h + v) - \hat{u}_h. \tag{6.4}$$

そして，ある実数α_wに対して，$V_w \equiv \{v \in L^p(Q) | \|v\|_{L_w^p(Q)} \le \alpha_w\}$ とし，2 つの非負実数β_wおよびγ_wを

$$\begin{aligned} \|\tilde{T_w}(0)\|_{L_w^p(Q)} &\le \beta_w, & (6.5)\\ \|\tilde{T_w}'(v_1)v_2\|_{L_w^p(Q)} &\le \gamma_w \qquad \forall v_1, v_2 \in V_w & (6.6)\end{aligned}$$

を満すように選び，集合 $K_w \subset L^p(Q)$ を

$$K_w \equiv \{v \in L^p(Q) | \|v\|_{L_w^p(Q)} \le \beta_w + \gamma_w\} \tag{6.7}$$

とする．このとき，次の検証条件を得る．

定理 2. 集合V_wに対して，$K_w \subset V_w$が成り立つ，すなわち，$\beta_w + \gamma_w \le \alpha_w$が成り立つならば，

$$v = \tilde{T}_w(v)$$

の解がK_wに存在し，それはV_wにおいて一意である．

近似解$\hat{u}_h$が$\hat{z}[\hat{u}_h] \equiv \hat{u}_{ht} - \triangle \hat{u}_h + f(\hat{u}_h) \in L^2(Q)$を満すならば，

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}_w(0)\|_{L^p_w(Q)} &\le C\|\hat{z}[\hat{u}_h]\|_{L^2_w(Q)}, &(6.8)\\ \|\tilde{T}_w{}'(v_1)v_2\|_{L^p_w(Q)} &\le C\|\hat{f}'(\hat{u}_h + v_1)v_2 - \hat{f}'(\hat{u}_h)v_2\|_{L^2_w(Q)} &(6.9)\\ &\le C\hat{G}_{\alpha_w} \end{aligned}$$

が成り立つことが双曲型の場合と同様の議論により分かる．ここで，$\hat{G}_{\alpha_w}$はα_wに依存するパラメータである．

(6.8) および (6.9) の定数Cを計算するためには，次を満す定数C_3およびC_4を求めればよい．

$$\begin{aligned} \|A_w[r]\|_{H_w} &\le C_3\|r\|_{L^2_w(Q)} \qquad \forall r \in L^2(Q), &(6.10)\\ \|A_w[r]\|_{L^p_w(Q)} &\le C_4\|A_w[r]\|_{H_w}. &(6.11) \end{aligned}$$

このとき，$C = C_3C_4$であり，補題3と補題4が，それぞれ，C_3とC_4の値を与える．なお，これらは，[5] および補題2と同様の議論により証明することができる．

補題 3. $\underline{a}$および$\overline{a}$は，$\underline{a} < a(x,t) < \overline{a}$を満たす定数とする．このとき，(6.10) の$C_3$は，次式で与えられる．

$$C_3 = \begin{cases} \sqrt{\frac{d^2}{\pi^2}\left(1 + \frac{(4(\overline{a}-\underline{a})^2 + 2\underline{a}^2)d^2}{\pi^2}\right) + 4} & (\Omega\text{が 1 次元の場合}) \\ \sqrt{\frac{d^2}{2\pi^2}\left(1 + \frac{(2(\overline{a}-\underline{a})^2 + \underline{a}^2)d^2}{\pi^2}\right) + 4} & (\Omega\text{が 2 次元の場合}), \end{cases}$$

ただし，重み付きノルムにおいて$\lambda = -\underline{a}$と選ぶものとする．

補題 4. (6.11) のC_4は次式で与えられる．

$$C_4 = \begin{cases} \frac{p}{4}|Q|^{\frac{1}{p}}\sqrt{\frac{d|\lambda|}{\pi} + \sqrt{\left(\frac{d\lambda}{\pi}\right)^2 + 1}} & (\Omega\text{が 1 次元の場合}) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{2}{9}p|Q|^{\frac{6-p}{6p}}\left(\frac{|\lambda|d}{\pi} + \sqrt{3}\right) & (\Omega\text{が 2 次元の場合}), \end{cases}$$

ただし，λは重み付きノルムに現れる実数である．

6.2 検証手順および数値例

双曲型の場合と同様，近似解$\hat{u}_h$を求めるために，Newton 反復

$$(\hat{u}_{ht}^{(n)},\hat{\phi}_j)+(\nabla\hat{u}_h^{(n)},\nabla\hat{\phi}_j)+(f'(\hat{u}_h^{(n-1)})\hat{u}_h^{(n)},\hat{\phi}_j)=(f'(\hat{u}_h^{(n-1)})\hat{u}_h^{(n-1)}-f(\hat{u}_h^{(n-1)}),\hat{\phi}_j) \tag{6.12}$$

を用い，S_hの基底$\hat{\phi}_i$を使って，

$$\hat{u}_h^{(n)}(x,t)=\sum_{i=1}^{N}\hat{u}_i^{(n)}(t)\hat{\phi}_i(x)$$

と表す．次に，(6.12) の時間微分を

$$\frac{\theta}{\Delta t}(\hat{u}_h(t)-\hat{u}_h(t-\Delta t))+(1-\theta)\hat{u}_{ht}(t-\Delta t) \qquad (\theta\geq 0:\text{実数})$$

と表すことにして，(6.12) を

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{\Delta t} &\quad (\hat{u}_h^{(n)}(t)-\hat{u}_h^{(n)}(t-\Delta t),\hat{\phi}_j)+(\nabla\hat{u}_h^{(n)}(t),\nabla\hat{\phi}_j)+(f'(\hat{u}_h^{(n-1)}(t))\hat{u}_h^{(n)}(t),\hat{\phi}_j)\\ = &\quad (\theta-1)(\hat{u}_{ht}(t-\Delta t),\hat{\phi}_j)+(f'(\hat{u}_h^{(n-1)}(t))\hat{u}_h^{(n-1)}(t)-f(\hat{u}_h^{(n-1)}(t)),\hat{\phi}_j)\end{aligned} \tag{6.13}$$

により近似する．このとき，$t=t_{k+1}$とすると，各時刻における近似解を求めることができる．なお，$\hat{u}_{ht}-\Delta\hat{u}_h+f(\cdot,\hat{u}_h)\in L^2(Q)$ という条件があるので，以下の例において，空間方向については区分的 3 次エルミート関数を使い，時間方向には区分的に線形補間を行う．

1 次元の場合

(1.1) において，

$$f(x,t,u)=-Bu^2-(k\text{sin}\pi x+k\pi^2 t\text{sin}\pi x-B(kt\text{sin}\pi x)^2)$$

とする．ただし，B および k は定数であり，$\Omega=(0,1)$，$T=1$，$\theta=1$ とする．このとき，方程式 (1.1) は，厳密解 $u(x,t)=kt\sin\pi x$ を持つ．

そして，

$$\begin{aligned}\|f'(\hat{u}_h+v_1)v_2-f'(\hat{u}_h)v_2\|_{L_w^2(Q)}^2 &= 4B^2\int\!\!\int e^{-2\lambda t}|v_1v_2|^2dxdt\\ &\leq 4B^2e^{2\lambda T}\int\!\!\int |e^{-\lambda t}v_1e^{-\lambda t}v_2|^2dxdt\\ &\leq 4B^2e^{2\lambda T}\|v_1\|_{L_w^4(Q)}^2\|v_2\|_{L_w^4(Q)}^2\\ &\leq 4B^2e^{2\lambda T}\alpha_w^4,\end{aligned} \tag{6.14}$$

なので，(6.9) の$\hat{G}_{\alpha_w}$として，

$$\hat{G}_{\alpha_w}=2Be^{\lambda T}\alpha_w^2$$

表 6.1: 1 次元の場合

	Case 1:$B=2, k=1, NS=100$	**Case 2**:$B=1, k=3, NS=200$
λ	0	0
C	2.181362	2.362123
$\Vert\hat{z}[\hat{u}_h]\Vert_{L^2_w(Q)}$	0.010584	0.015578
α_w	0.03205	0.047418

表 6.2: 2 次元の場合

Case 3: $B=1.0, k=1.0, NS=10$	
λ	0
C	2.6943
$\Vert\hat{z}[\hat{u}_h]\Vert_{L^2_w(Q)}$	0.014761
α_w	0.057849

と選べばよいことが分かる．1 次元の場合の数値結果を表 6.1 に示す．

2 次元の場合

(1.1) において，

$$f(x,t,u) = f(x_1,x_2,t,u) = -Bu^2 - k\sin\pi x_1 \sin\pi x_2 (1+2t\pi^2 - Bkt^2 \sin\pi x_1 \sin\pi x_2)$$

とし，$\Omega = (0,1)\times(0,1)$，$T=1$ とする．このとき，方程式 (1.1) の厳密解は，$u(x_1,x_2,t) = kt\sin\pi x_1 \sin\pi x_2$である．近似解を求めるために，ここでは，予測子-修正法を用いる．つまり，(6.13) において$\theta=0$として求めた近似解を予測子として用いて，$\theta=2$としたスキームを修正子を求めるために使用する．これによって，得られた結果は表 6.2 に示されている．

参考文献

[1] Adams, R.A, Sobolev Spaces, Academic Press, 1978.

[2] Johnson, C., Schatz, A.H. & Wahlbin, L. B., Crosswind Smear and Pointwise Errors in Streamline Diffusion Finite Element Methods, Math. Comp.,49,(1987), 25-38.

[3] Lions,J.L., Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, Springer,(1971).

[4] Lions,J.L. and Magenes,E., Non-homogeneous boundary value problems and applications II, Springer,(1972).

[5] Minamoto,T. and Nakao,M.T., Numerical verifications of solutions for non-linear parabolic equations in one-space dimensional case, Reliable Computing 3(1997),137-147.

[6] Minamoto,T., Numerical verifications of solutions for nonlinear hyperbolic equations, Applied Mathematics Letters 10(1997),91-96.

[7] Nagatou, K., Yamamoto, N. & Nakao, M. T., An approach to the numerical verification of solutions for nonlinear elliptic problems with local uniqueness, Numerical Functional Analysis and Optimization 20(1999),543-565.

[8] Plum,M., Inclusion Methods for Elliptic Boundary Value Problems, Studies in Computational Mathematics 5(1994),323-379.

[9] Quarteroni,A. and Valli,A., Numerical Approximation of Partial Differential Equations, Springer,(1994).

[10] Yamamoto, N., A numerical verification method for solutions of boundary value problems with local uniqueness by Banach's fixed point theorem, SIAM Journal on Numerical Analysis 35(1998),2004-2013.

[11] Zeidler,E., Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A, Springer,(1990).