数理解析研究所講究録
1151巻 2000年 98-110

位相力学系と双加群

九大数理　綿谷 安男
Watatani, Yasuo

0 はじめに

位相力学系とそれのつくるC^*-環の間の密接な関連を探るのが，今回の研究集会のテーマである。位相力学系のどのような性質がC^*環のどのような性質に対応しているかが知りたいことである。Cantor集合X上の位相同型写像$h : X \to X$とそれに対応するC^*-環の接合積$C(X) \rtimes \mathbb{Z}$の研究や，subshift Λとそれに対応する松本君のC^*-環

$\mathcal{O}_n$の研究などがその典型例である。

私の話の目的は，そのような位相力学系とC*環の対応が，全くうまくいっていない場合もあるという，残念な報告である。がっくり。

フラクタルの理論に出てくる自己相似集合Kから C(K)上のヒルベルト双加群Xをつくる。その双加群から生成されるC*環$\mathcal{O}_X$はみんなCuntz環$\mathcal{O}_n$に同型になってしまう。C*環は位相にしか依らないものだが，K上の距離構造が$\mathcal{O}_X$を研究するのに重要であった。これを非可換距離空間にまで拡張する。

I ヒルベルト双加群のつくるC*環

Pimsner [P] と片山 [K] は C*環A上の双加群 X に対して新しいC*環 $\mathcal{O}_X$ の構成法を導入した。X上の Fock 空間

$$F(X) = A \oplus X \oplus X \otimes_A X \oplus X \otimes_A X \otimes_A X \oplus \cdots$$

上の creation operators のつくる Toeplitz 環 $\mathcal{T}_X$ の商として $\mathcal{O}_X$ は具体的に実現できる。特に A上の自己同型 α からつくられる双加群 X を X = A に対して その双加群としての構造を

$$\begin{cases} (x|y)_A = x^* y \\ a \cdot x \cdot b = \alpha(a) x b \end{cases} \qquad \begin{matrix} a, b \in A \\ x, y \in X \end{matrix}$$

で入れると $\mathcal{O}_X \cong A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ と接合積と同型

になる。また 0-1 行列 B からうまくヒルベルト双加群 X をつくると Cuntz-Krieger 環 $\mathcal{O}_B$ と $\mathcal{O}_X$ は同型にできる。この意味で $\mathcal{O}_X$ は接合積と Cuntz-Krieger 環の両方を一般化した構成法である。C*環 $\mathcal{O}_X$ の単純性やイデアルの構造については [KPW] で考察した。

$\boxed{\text{Def}}$ C*環 A 上のヒルベルト双加群 $X = {}_AX_A$ は、右 A 値内積をもつヒルベルト右 C*加群で左からの作用が $\phi : A \to \mathcal{L}_A(X_A)$ という *homo. で与えられているものをいう。さらに X は full つまり $\{(x|y)_A \mid x, y \in A\}$ の生成する閉部分空間が A と一致することを仮定しておく。また ϕ は 1:1 の場合のみを考える。簡単のために、

Xは有限生成を仮定する。つまり <u>basis</u> という

有限集合 $\{u_1, \cdots, u_n\} \subset X$ が存在して

$\forall x \in X \quad x = \sum_{i=1}^{n} u_i (u_i | x)_A$ となっている。

$\boxed{\text{Def}}$ XをC^*環 A上の有限生成のヒルベルト双加群とする。双加群Xが生成するC^*環 $\mathcal{O}_X$とは、Aと$\{S_x \mid x \in X\}$から生成される universal なC^*環で次の交換関係をもつ：

① (和の保存) $S_{x+y} = S_x + S_y$

② (左右のA-作用の保存)

$$S_{x \cdot a} = S_x a \qquad \qquad \begin{pmatrix} x, y \in X \\ a \in A \end{pmatrix}$$

$$S_{\phi(a)x} = a S_x$$

③ (右内積の保存) $(x|y)_A = S_x^* S_y$

④ ($K_A(X_A)$の保存) $\sum_{i=1}^{n} S_{u_i} S_{u_i}^* = I$

2 自己相似集合と双加群

フラクタル幾何における自己相似集合 K からヒルベルト双加群 X を構成してその C^* 環 $\mathcal{O}_X$ の構造を調べよう。位相だけでなく距離が効いてくることに注目する。

Hutchinson の論 [H] より初等的で基本的なことの復習から始めよう。(Ω, d) を完備な距離空間とする。$\{\gamma_1, \dots, \gamma_d\}$ を Ω 上の真の縮小写像でその Lipschitz 定数が $c_i = \mathrm{Lip}(\gamma_i) < 1$ とする。$d \geqq 2$ と仮定する。すると Ω のコンパクト部分集合 $K \neq \phi$ が唯1つ存在して

$$(*) \quad K = \gamma_1(K) \cup \gamma_2(K) \cup \cdots \cup \gamma_d(K)$$

をみたす。この $(*)$ がある意味での自己相似性である。

よく知られているように，このようにして，Cantor 集合やKoch曲線やSierpinski gasketのような典型的な自己相似集合Kがえられる。そこで可換な C^*-環 $A=C(K)$ を考える。縮小写像 $\gamma_i : K \to K$ は A 上の *endomorphism $\phi_i : A \to A$ を導く：

$$(\phi_i(a))(z) = a(\gamma_i(z)) \qquad (z \in K)$$

$X = A^n$ を次のように A 上の双加群とみる：

$x = (x_i)_i \in X$, $\quad a \in A$, $b \in A$ に対し

$$\begin{cases} a \cdot x \cdot b = (\phi_i(a) x_i b)_i \\ (x|y)_A = \sum_{i=1}^{d} x_i^* y_i \in A \end{cases}$$

つまり $\phi : A \longrightarrow \mathcal{L}_A(X_A)$ は対角行列

$$\phi(a) = \begin{pmatrix} \phi_1(a) & 0 \\ 0 & \phi_d(a) \end{pmatrix}$$ で与えられる。

この時 $\mathcal{O}_X$ は $A = C(K)$ と Cuntz 環 $\mathcal{O}_d = C^*(S_1, \cdots, S_d)$ から生成された普遍的な C^*-環で次の交換関係をもつものである:

$$\boxed{aS_i = S_i\phi_i(a) \quad , \quad a \in A}$$

$\boxed{\text{Proposition 1}}$ ([PWY]) 上のように自己相似集合 K と縮小写像 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_d\}$ からつくられたヒルベルト双加群 X を考える。$A = C(K)$ 上の双加群 X から生成された C^*-環を $\mathcal{O}_X$ とする

$\Longrightarrow$ $\mathcal{O}_X$ は Cuntz 環 $\mathcal{O}_d = C^*(S_1, \cdots, S_d)$ を含んでいるが, 実は $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_d$ となる

注 C^*-環の構造が力学系 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_d\}$ の構造に依らないのは大変残念である。しかし K 上の調和解析を Cuntz 環 $\mathcal{O}_d$ とその部分環 $A = C(K)$

の相対位置 $A \subset \mathcal{O}_\alpha$ を使って記述できる可能性は残っていると思う。

③ 非可換距離空間上の縮小写像

自己相似集合 K とその上の縮小写像 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_N\}$ から構成された $A = C(K)$ 上のヒルベルト加群 X と C^*-環 $\mathcal{O}_X$ の構造を考察するには K 上の距離構造と γ_i の縮小性が効いている。C^*-環の構造に位相構造だけでなく距離構造が関与するのはカテゴリーとして少し「変てこなセンス」を覚える。そこでこれをもっと顕（あらわ）にするために Connes [C] の非可換距離空間の設定にまで拡張してみよう。距離空間 (K, d) があると $A = C(K)$ 上の state space S_A にも次のように自然に距離 L が入る：

K 上の Lipschitz 関数全体 $\mathrm{Lip}(K)$ と $f \in \mathrm{Lip}(K)$ の Lipschitz 定数 $\mathrm{Lip}(f)$ を使って，$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}_A$ にたいしてその距離 $L(\varphi_1, \varphi_2)$ を

$$L(\varphi_1, \varphi_2) \underset{\mathrm{def}}{=} \sup \left\{ |\varphi_1(f) - \varphi_2(f)| \; ; \; \begin{matrix} f \in \mathrm{Lip}(K) \\ \mathrm{Lip}(f) \leq 1 \end{matrix} \right\}$$

で決める。すると $\mathcal{S}_A$ は L に関して完備な距離空間になる。点 $x \in K$ を $\varphi_x(f) = f(x)$ できまる character $\varphi_x \in \mathcal{S}_A$ と同一視することで K を $\mathcal{S}_A$ にうめこむと，$(\mathcal{S}_A, L)$ は距離空間として (K, d) の自然な拡張になっている。

そこで非可換な C^* 環 A から出発してもそこにある付帯的な構造を与えてその state space $\mathcal{S}_A$ 上に上のようにうまく距離 L が入れられる

時に、その付帯的な構造を非可換距離と思いこむことにする。$K=[0,1]$で $f\in C^1[K]$なら $\mathrm{Lip}(f)=\|f'\|_\infty$ と微分とsupnormでかけることに注意しておこう。

$\boxed{\text{Def}}$ AとBをunital C^*-環で Bが A上のBanach bimoduleになっているとする。

$$\delta : A\supset \mathrm{Dom}(\delta)\longrightarrow B$$

という稠密に定義された$*$-derivation δで $\mathrm{Ker}\,\delta=\mathbb{C}I$となるものを考える。$\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{S}_A$に対してその"距離" $L(\varphi_1,\varphi_2)\in[0,\infty]$を

$$L(\varphi_1,\varphi_2)\underset{def}{=}\sup\left\{|\varphi_1(a)-\varphi_2(a)|\,;\ \begin{matrix}a\in\mathrm{Dom}(\delta)\\ \|\delta(a)\|\leq 1\end{matrix}\right\}$$

できめる。この値が∞にならないように

・$\{a \in \mathrm{Dom}(\delta) ; \|\delta(a)\| \leq 1\} / \mathbb{C}I$ が $A/\mathbb{C}I$ の中で有界であることを仮定しておこう。

$\boxed{\text{Proposition 2}}$ ([PWY]). 上のような意味での非可換距離構造が与えられているとする。$\{\phi_1, \cdots, \phi_d\}$ を A 上の unital $*$endomorphism の族とする。γ_i を $\phi_i^* : A^* \to A^*$ の state space $\mathcal{S}_A$ への制限とする。各 $\gamma_i : \mathcal{S}_A \to \mathcal{S}_A$ が L に関して真の縮小写像になっているとする。$C^*(A; \phi_1, \cdots, \phi_d)$ で A の表現 $\pi : A \to C^*(A; \phi_1, \cdots, \phi_d)$ と Cuntz 環 $\mathcal{O}_d = C^*(S_1, \cdots, S_d)$ で生成された普遍的な C^*-環で $\pi(a) S_i = S_i \pi(\phi_i(a))$ をみたすものとする

$\Longrightarrow$ $C^*(A; \phi_1, \cdots, \phi_d)$ は Cuntz 環 $\mathcal{O}_d$ と同型になる.

⟨⟨ References ⟩⟩

[C] A. Connes, Compact metric spaces, Fredholm modules and hyperfiniteness, Ergodic. Th. & Dynam. Sys 9 (1989), 207-220.

[H] J.E. Hutchinson, Fractals and self-similarity, Indiana Univ. Math. J. 30 (1981), 713-747

[KPW] T. Kajiwara, C. Pinzari and Y. Watatani, Ideal structure and simplicity of the C*-algebras generated by Hilbert bimodules, J. Funct. Anal. 159 (1998), 295-322.

[K] Y. Katayama, Generalized Cuntz algebras $\mathcal{O}_N^m$. RIMS Kokyuroku 858 (1994), 87-90.

[P] M. Pimsner, A class of C*-algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$, in Free Probability Theory, editato. by D.V. Voiculescu, Fields Institute Communications vol 12, 1996, 189-212

[PWY] C. Pinzari, Y. Watatani and K. Yonetani, KMS states, entropy and the variational principle in full C*-dynamical systems, preprint, 2000,