Title	ガロア逆問題に於けるlinear rigidityとその応用(survey) (代数的整数論とその周辺)
Author(s)	伊原, 康隆
Citation	数理解析研究所講究録 (2000), 1154: 117-124
Issue Date	2000-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/64122
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1154 巻 2000 年 117-124

ガロア逆問題に於ける linear rigidity とその応用 (survey)

伊原康隆　(京大・数理研)

最近 " linearly rigid tuples " の研究が進んで、応用として、有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の reductive linear groups に関する有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の Galois の逆問題が色々解かれているので、その紹介を試みます。q が linear group の階数に比べて小さければ必ずしも素数でなくてもよい、というのが最近の主な進展で、その前段階の基礎を築いたのは J. G. Thompson、この方向を切開いたのが H. Völklein とその共著者 K. Strambach [V][SV] など、そして N. Katz の Rigid local systems の研究 [K] との関連に気付きそれを線型代数化した M. Dettweiler、S. Reiter による一般化 [DR] などが主なものですが、ここでは主に [DR] に従って話を進めます。

1　問題と背景

$F_r = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ を階数 $r \geq 2$ の自由群とし、等式 $x_r \cdots x_1 x_0 = 1$ によって $x_0 \in F_r$ を定める。又 $GL_n(K)$ を体 K 上の n 次一般線型群、

$$\varphi : F_r \to GL_n(K)$$

を群の準同型射とする。φ は x_i の像 t_i $(0 \leq i \leq r)$ で一意的に定まる。

$$\begin{aligned} \varphi \quad &\longleftrightarrow \quad r\text{-tuples } t_r, \ldots, t_1 \text{ in } GL_n(K) \\ &\longleftrightarrow \quad (r+1)\text{-tuples } t_r, \cdots, t_1, t_0 \text{ in } GL_n(K) \text{ s.t. } t_r \cdots t_1 t_0 = 1. \end{aligned}$$

φ が既約（絶対既約）とは、φ が F_r の表現として既約（絶対既約）なることとする。

φ が *linearly rigid* (resp. *absolutely linearly rigid*) とは、別に $\varphi' \longleftrightarrow (t'_r, \ldots, t'_1, t'_0)$ で各 i $(0 \le i \le r)$ に対して t'_i が t_i と $GL_n(K)$ (resp. $GL_n(\bar{K})$) で共役なら、ある（一つの） $g \in GL_n(K)$ (resp. $GL_n(\bar{K})$) によって一斉に

$$t'_i = g^{-1} t_i g \qquad (0 \le i \le r)$$

となること、と定義する。ただし $\bar{K}$ は K の代数閉包。（共役の条件の中に $i = 0$ も含まれているからこそ意味がある、という事に注意）。Absolutely linearly rigid (略 *a.l.r.*) なら linearly rigid (略 *l.r.*) になる。

$n = 1$ なら φ は常に絶対既約で *a.l.r.*

$n \ge 2$ のとき、$r = 2$ なら絶対既約な φ はすべて *a.l.r.* となる事が初等的計算で確かめられる（§2 命題1 参照）。だが、$r > 2$ だとそうとは限らない。以後 φ が絶対既約の場合を主に考える。

《問題》 φ:（絶対）既約かつ (absolutely) linearly rigid なものを全部構成する方法はないか？

[K]、[DR] は、これにある意味での解答を与えている。

[問題の背景] (1) $\mathbb{F}_q$ 上の被約線型群 $GL_n(\mathbb{F}_q), Sp_{2n}(\mathbb{F}_q), \ldots$ 等を Galois 群にもつ $\mathbb{Q}$ 上の Galois 拡大体の構成に役立つ。

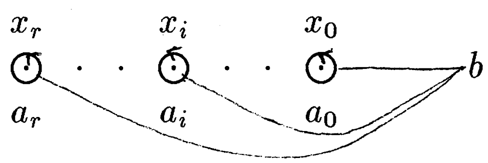
(2) $K = \mathbb{C}$ のとき。$r + 1$ 個の確定特異点を持ち、その外では非特異な $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 上の n 階線型微分方程式であって、「local monodromy を保つ変形」を持たないもの（謂ゆる accessary parameter を持たない微分方程式）を求める問題そのものである。

B. Riemann 以来の問題である (2) の最近の発展が (1) に大きな影響を与えた [DR]。

[我々の問題と (1)(2) との関連] $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 上に $r+1$ 個の相異る点 $a_0, \ldots, a_r$ 及び、それらと異る基点 b をとり、基本群

$$\pi_1 = \pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{a_0, \ldots, a_r\}, b)$$

を考える。また下図の定める π_1 の元を $x_i (0 \le i \le r)$ とすると、$x_r \cdots x_1 x_0 = 1$ であり、π_1 は自由群 $F_r = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ と同一視できる。



[(1) との関連]　準同型射

$$\varphi : \pi_1 \twoheadrightarrow G \subseteq GL_n(\mathbb{F}_q) \quad t_i := \varphi(x_i) \quad (0 \le i \le r)$$

があると、この核と対応する $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{a_0, \ldots, a_r\}$ の G-cover（G をガロア群とする有限正規連結被覆）がある。今 $a_0, \ldots, a_r$ はすべて $\mathbb{Q}$- 有理点とする。（もう少し弱く、それぞれは $\mathbb{Q}$ 上代数的でガロア置換によって全体として不変、でも可。）この G-cover は、代数曲線の代数的被覆とみるとき、φ に関する如何なる条件のもとで、$\mathbb{Q}$ 上定義されると云えるか？その為の十分条件の二つの主要な構成要素は実は：

(i) φ: 既約、かつ linearly rigid、

(ii) $\{t_i\}_{i=0}^r$: rational、即ち各 $tr(t_i)$ $(0 \le i \le r)$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的で、ガロア置換によって集合 $\{tr(t_i)\}$ は保たれる、

である。これら二つが満たされても、まだ必ずしも十分とは云えないが、これらが最も基本的な条件なので、これらを満すものを求め、それから更に残りの条件を確かめるという方法がとられている。上記 G-cover が $\mathbb{Q}$ 上定義されれば、有理関数体 $\mathbb{Q}(t)$ 上のガロア G 拡大が出来るので、それを適当に特殊化して（Hilbert の既約性定理）$\mathbb{Q}$ 上の G 拡大が作れるわけである。((i) を満すものを見つけるのが一番困難、r が大きいものでないと (ii) が成立しにくいので、r が大きいものでしかも (i) を満すものを作る必要がある。)

[(2) との関連]　$\mathbb{C}(t)$ 係数の n 階線型微分方程式 S であって、$a_r, \ldots, a_0$ のみで確定特異点を持ちその外では非特異なものを考える。基点 b での S の局所解の空間の底をとり、各 $\gamma \in \pi_1$ に沿ってそれらを解析接続する事によって π_1 のモノドロミー表現

$$\varphi_S : \pi_1 \to GL_n(\mathbb{C})$$

が生じる。$\varphi_S(x_i)$ $(0 \le i \le r)$ の Jordan 標準型を S の local data と考えると、

$$\varphi_S : \text{linearly rigid} \quad \leftrightarrow \quad \text{local data だけで } \varphi_S \text{ が } (GL_n(\mathbb{C}) \text{ 共役を除いて）定まる。}$$

こういう S は今迄色々知られていて、その解は重要な特殊関数であった。

例えば、Riemann の P 関数（$n = r = 2$: この場合、前述のように、既約 $\to$ $l.r.$）。より一般の場合について、K. Okubo 氏等により日本でも盛んに研究されているようであるが、[DR] では高野一坂内 [TB] による Jordan-Pochhammer 方程式 $(n = r)$ の φ_S の具体的計算が大変有効に用いられている。

(1), (2) は謂わば π_1 のそれぞれ Galois(etale)realization, de Rham realization の両側面なので、内的関連があったのは、むしろ当然だった、と云えよう。

2 Linearly rigid $(r+1)$-tuples について

§1 のように

$$\varphi : F_r \to GL_n(K),$$
$$\varphi \leftrightarrow (t_r, \ldots, t_1, t_0),\ t_r, \ldots, t_0 \in GL_n(K), t_r \cdots t_0 = 1$$

とする。φ が絶対既約のとき、$a.l.r$ である為の必要十分条件が簡単にわかる。ここで各 $i(0 \le i \le r)$ に対して、t_i の $M_n(K)$ の中での centralizer (K-algebra) の $M_n(K)$ 内での余次元を δ_i とおく。

命題 1 φ : 絶対既約とすると常に $2n^2 - \sum_{i=0}^{r} \delta_i \le 2$ が成立ち、ここで等号が成立する事と φ が $a.l.r$ である事が同値。

証明は直観的にもわかりやすく、容易。

この $2n^2 - \sum_{i=0}^{r} \delta_i$ を φ の index of rigidity と呼ぶ。$n = r = 2$ のときは、絶対既約性より $\delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = 2$ となり、この index=2、従って必ず $a.l.r.$ になる。

一般の (n, r) のとき、例えば（1 つの）t_i の（n ヶの）固有値がすべて相異なれば $\delta_i = n^2 - n$ だが、一方、index=2 となるためには δ_i $(0 \le i \le r)$ の平均が $\frac{2n^2}{r+1}$ 位でないといけないので、r が n に比べて大きいとき $a.l.r.$ になる為には、各 δ_i は十分小さく、従って各 t_i の centralizer は十分大きく（即ち各 t_i は"n より低次元的"で）しかも全体としては絶対既約になっていないといけない。

<u>Katz の原理（一応 $\mathbb{C}$ 上）</u>: 与えられた (r, n) に対する既約で $l{\cdot}r.$ な φ_r は、同じ r で $n = 1$ のものから、"middle convolution" と"Λ-multiplication" の 2 つの操作を有限回くり返すことですべて得ることが出来る。

<u>Dettweiler-Reiter</u>: 一般の体 K でこれを線型代数化した。

後者は、全く初等的である。以下これについて述べる。再び任意の

$$\varphi : F_r \to GL_n(K), \qquad t_i = \varphi(x_i)\ (0 \le i \le r)$$
$$t_r \cdots t_1 t_0 = 1$$

をとり、任意の $\lambda \in K^{\times}$ と φ の組に対して "middle convolution" $MC_\lambda(\varphi)$: $F_r \to GL_?(K)$ を次のように定義する。

まず $\Phi' : F_r \to GL_{nr}(K) = GL_r(M_n(K))$ を

$$x_i \to \tilde{T}_i \quad (1 \le i \le r),$$

ただし、$\tilde{T}_i$ は $M_n(K)$ 係数 r 次正方行列

$$\tilde{T}_i = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} I_n & & 0 & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & 0 & \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & & I_n & \vdots & & & \\ t_1 - 1, & \ldots, & t_{i-1} - 1, & \lambda t_i, & \lambda(t_{i+1} - 1), & \ldots, & \lambda(t_r - 1) \\ & & & \vdots & I_n & & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ & & 0 & \vdots & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & 0 & & I_n \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \cdots i\text{行 (block row)} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

で定める。（これは t_i: スカラーのときの高野ー坂内行列 [TB] を元にしている。）一方、K^{nr} （縦ベクトル）の中で

$$(Ker(t_1 - 1), \ldots, Ker(t_r - 1))^{tr}$$

を $\mathcal{K}$ とし、

$$\mathcal{L} = \bigcap_{1 \le i \le r} Ker(\tilde{T}_i - 1)$$

とおく。これらは $\tilde{T}_i$-stable である。各 $\tilde{T}_i$ が $K^{nr}/(\mathcal{L}+\mathcal{K})$ に誘導する線型変換を T_i $(1 \le i \le r)$ とし、$MC_\lambda(\varphi)$ を

$$\begin{aligned} MC_\lambda(\varphi) : F_r &\to GL(K^{nr}/(\mathcal{L} + \mathcal{K})) \\ x_i &\mapsto T_i \quad (1 \le i \le r) \end{aligned}$$

によって定義する（表現の同値類は、一意的に定まる）。各 $\lambda \in K^{\times}$ に対する MC_λ は、$K[F_r]$- 加群で K 上有限次元なるもののなす圏からそれ自身への関手と見倣せる。

定理 2 ([K][DR]) φ は $n>1$ かつ絶対既約、又は $n=1$ で $\#\{i; 0 \le i \le r, t_i \ne 1\} \ge 2$ とするとき、次の (i) ～ (v) が成立つ。

(i) $MC_\lambda(\varphi)$ は絶対既約。

(ii) $MC_1(\varphi) \simeq \varphi, \quad MC_\lambda(MC_{\lambda'}(\varphi)) \simeq MC_{\lambda\lambda'}(\varphi) \quad (\lambda, \lambda \in K^\times)$。

(iii) φ と $MC_\lambda(\varphi)$ は同じ index of rigidity を持つ。とくに

$$\varphi : a.l.r \leftrightarrow MC_\lambda(\varphi) : a.l.r.$$

(iv) $MC_\lambda(\varphi)$ は φ への "braid action", "dualization", "inversion" と可換。

(v) すべての絶対既約で $a.l.r$ な $(r+1)$-tuple φ は、$n=1$ の $(r+1)$-tuple から、MC_λ たちと Λ- 乗法をほどこす操作を有限回くり返して得られる。ただし、K は t_i $(0 \le i \le r)$ のすべての固有値を含む（例えば $K=\bar{K}$）とする。ここに、Λ 乗法とは、

$(\lambda_r, \ldots, \lambda_1) \in K^{\times r}$ に対して、$\lambda_1 \cdots \lambda_1 \lambda_0 = 1$ で $\lambda_0 \in K^\times$ を定めたとき

$$(t_r, \ldots, t_1, t_0) \to (\lambda_r t_r, \ldots, \lambda_1 t_1, \lambda_0 t_0)$$

で得られる φ たち同志の間の変換。

このうち (v) の証明の要点を記す。

$$\varphi \leftrightarrow (t_i),\ n>1, \text{絶対既約かつ } a.l.r. \text{ とするとき、}$$

各 i $(0 \le i \le r)$ に対して t_i の固有空間の余次元の最小値を n_i、対応する固有値（の一つ）を λ_i^{-1} とおくと、命題 1 と Scott のレンマにより、

$$\sum_{i=0}^{r} n_i < 2n, \quad \lambda = \lambda_r \cdots \lambda_0 \ne 1$$

を得る。このとき

$$MC_{\lambda^{-1}}(\lambda_r t_r, \ldots, \lambda_1 t_1, \lambda^{-1}\lambda_0 t_0)$$

の次元 $<n$ となる。

特に、φ として $\varphi = \varphi_{(a)} \leftrightarrow (t_r, \ldots, t_0) = (a_r, \ldots, a_0) \in K^{\times r}$

$$a_r \cdots a_0 = 1, \quad a_i \ne 1\ ({}^\forall i)$$

をとり、$\lambda \neq 1$, $\lambda \neq a_0$ とするとき

$$MC_\lambda(\varphi_{(a)}) : F_r \to GL_r(K)$$

は絶対既約かつ $a.l.r.$ これは

$K = \mathbb{C}$のとき、Pochhammer differential equation と対応 (cf. [TB]).
$K = \mathbb{F}_q$のとき、正規 Thompson (r+1)-tuple と対応

ここで Thompson $(r+1)$-tuple とは、

$$(t_r, \ldots, t_0), \quad t_r \cdots t_0 = 1, \quad t_i \in GL_r(K) \quad (0 \leq i \leq r)で、$$

既約かつ各 t_i が余次元 1 の固有空間を有するもののこと。与えられた $a_i, b_i \in K$ $(0 \leq i \leq r)$ に対して、t_i の固有多項式が $(x-a_i)^{r-1}(x-b_i)$ なる Thompson $(r+1)$-tuple が存在する為の必要十分条件は

$$a_r \cdots a_0 \neq 1,\ b_j \prod_{i \neq j} a_i \neq 1\ (0 \leq j \leq r),\ \prod_i (a_i^{r-1} b_i) = 1$$

である。又これらが満たされるとき、そのような tuple は $GL_r(K)$ 共役を除いて一意的に存在する（特に $l.r.$）ことが知られている。正規とは（Λ- 乗法によって）各 $a_i = 1$ $(1 \leq i \leq r)$ と仮定されたもののこと。

Völklein 等は、Thompson tuples とその $\varphi(F_r)$ の分類を使って（以下の）結果を出し、Dettweiler-Reiter は、$n = 2$ の特定の "rational"(この為 $m > q$ が必要) $a.l.r.$ な φ から $M_{-1}(\varphi)$ 等によって（以下の）結果を出した。

(問) M_λ と Λ-multiplications の積の間に成立つすべての乗法的関係を求めよ！

(筆者に興味あるが、現在答を知りません）。

3 主な応用上の結果

$\mathbb{Q}$ 上の Galois 群として出てくることが $l.r.$ tuples を用いて示せる有限体上の reductive linear groups の主な例は次のものである。

$GL_m(q)$ $\quad q : odd, < m \cdots m : even$: Völklein,
$PSO_{2m+1}(q)$ $\quad q : odd < m,\ 7 < m \cdots$ Dettweiler-Reiter,
$PSp_{2m}(q)$ $\quad q : odd < m, 2 < m \cdots$ Thompson, Völklein, Dettweiler-Reiter.

References

[DR] M. Dettweiler, S. Reiter, An algorithm of Katz and its application to the Inverse Galois problem. Preprint **99 – 47**, IWR, Heidelberg (1999).

[K] N. Katz, Rigid local systems, Princeton Univ. Press.

[SV] K. Strambach, H. Völklein, On linearly rigid triples, J. reine angew. math. **510** (1999), 57–62.

[V] H. Völklein, Rigid generators of classical groups, Math. Ann. **311** (1998).

[TB] K. Takano, E. Bannai, A global study of Jordan-Pochhammer differential equations, Funk. Ekvac. **19**.

[S] J-P. Serre, Topics in Galois theory, Research Notes in Math.

[MM] G. Malle, B.H. Matzat, Inverse Galois theory, Springer.

[V] H. Völklein, Groups as Galois groups, An Introduction, Cambridge Studies in Adv. Math.

その他,

Aspects of Galois theory, London Math. Soc. LNS **256**, Cambridge Univ. Press.