数理解析研究所講究録
1158 巻 2000 年 200-212

The Herglotz-Petrovskiĭ-Leray formula in boundary value problems

阪大理　由良 浩一 (Koichi Yura)

本稿では，定数係数双曲型境界値問題における Herglotz-Petrovskiĭ-Leray の公式を与える.

1　定数係数双曲型境界値問題の前進基本解

$\mathbf{R}_+^n$ で半空間 $\{x \in \mathbf{R}^n ; x_n > 0\}$ をあらわし，$x = (x_1, \ldots, x_n)$ に対して，$x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ などとして次のような定数係数双曲型境界値問題を考える.

$$\begin{cases} P(D)F_{k^0}(x) = 0, & x \in \mathbf{R}_+^n, \\ B_j(D)F_{k^0}(x)\Big|_{x_n=0} = \delta_{jk^0}\delta(x'), & x' \in \mathbf{R}^{n-1},\ 1 \le j \le \mu. \end{cases} \tag{1}$$

$k_0 \in \mathbf{N}$ は $1 \le k_0 \le \mu$ で固定する. $P(D)$, $B_j(D)$ はそれぞれ $m(\ge 2)$ 階, r_j 階の斉次微分作用素であり，$B_j(D)$ $(1 \le j \le \mu)$ の個数 μ はあとで決められる. ここで次の仮定をおく.

(A-1). $P(\xi)$ は $\vartheta = (1, 0, \ldots, 0)$ に関して狭義双曲型 (strictly hyperbolic) で，$\mathbf{C}$ で既約である.

(A-2). $\{x \in \mathbf{R}^n ; x_n = 0\}$ は $P(\xi)$ に関して非特性的である. すなわち，$P(0,1) \ne 0$.

(A-3). (1) は $\mathscr{E}$ 適切である. すなわち，Lopatinskiĭ 行列式 $R(\xi')$ は ϑ' に関して双曲型である.

$F_{k^0}(x)$ は，境界 $\{x \in \mathbf{R}^n ; x_n = 0\}$ 上に単位衝撃を与えたときの波動の伝播をあらわす. 以下，$F_{k^0}(x)$ を記述するための準備をする.

$$\Gamma(P, \vartheta) = \mathbf{R}^n \setminus \{\xi \in \mathbf{R}^n ; P(\xi) = 0\} \text{ の } \vartheta \text{ を含む連結成分}$$

の $\xi_n = 0$ での切り口 $\Gamma^0(P, \vartheta)$ を

$$\Gamma^0(P, \vartheta) = \{\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} ; (\xi', 0) \in \Gamma(P, \vartheta)\}$$

で定義する．

$$P(\xi)=\sum_{j=0}^{m}P_{m-j}(\xi')\xi_n{}^j$$

とあらわせば，$P_0(\xi')=P(0,1)$ であるから，(A-2) より $P_0(\xi')$ は 0 でない定数である．また，$\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}-i\Gamma^0(P,\vartheta)$ に対して，$P(\xi',\lambda)=0$ は λ に関して実根をもちえないので，それらの根を

$$\lambda_1^+(\xi'),\dots,\lambda_\mu^+(\xi'),\lambda_1^-(\xi'),\dots\lambda_{m-\mu}^-(\xi'),$$
$$\operatorname{Im}\lambda_k^\pm(\xi')\gtrless 0$$

とあらわすことができる．もちろん，μ は $\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}-i\Gamma^0(P,\vartheta)$ なる限り一定である．この μ が (1) の境界条件の個数である．

これらを使って，(1) に対する Lopatinskiĭ 行列式 $R(\xi')$ を定義する．$\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}-i\Gamma^0(P,\vartheta)$ に対して，

$$R(\xi')=\det L(\xi'),$$
$$L(\xi')=\left(\frac{1}{2\pi i}\oint B_j(\xi',\lambda)\lambda^{k-1}P_+(\xi',\lambda)^{-1}\,d\lambda\right)_{j,k=1,\dots,\mu}, \qquad (2)$$
$$P_+(\xi',\lambda)=\prod_{j=1}^{\mu}(\lambda-\lambda_j^+(\xi'))$$

とおく．ただし，(2) の積分は複素 λ 平面において，$P_+(\xi',\lambda)=0$ の根を全て囲むような単一閉曲線に沿うものである．これより，$P_+(\xi)$，$R(\xi')$ はそれぞれ

$$(\xi_n,\lambda_1^+(\xi'),\dots,\lambda_\mu^+(\xi')),\quad(\xi',\lambda_1^+(\xi'),\dots,\lambda_\mu^+(\xi'))$$

の多項式 (特に $(\lambda_1^+(\xi'),\dots,\lambda_\mu^+(\xi'))$ の対称式) で，μ 次，$\gamma=\sum_{j=1}^{\mu}r_j-\mu(\mu-1)/2$ 次斉次であることがわかる．このとき，前進基本解 (forward fundamental solution) $F_{k^0}(x)$ $(1\le k^0\le\mu)$ は

$$F_{k^0}(x)=(2\pi)^{-n}i^{-1}\sum_{j=1}^{\mu}\int_{\mathbf{R}^n-i\vartheta}e^{ix\xi}R_{jk^0}(\xi')\xi_n^{j-1}(R(\xi')P_+(\xi))^{-1}\,d\xi \qquad (3)$$

であらわされる．ここで，$R_{jk^0}(\xi')$ は $L(\xi')$ の (k^0,j) 余因子 $(\gamma+\mu-r_{k^0}-j$ 次斉次) である．また，前進基本解とは，

$$\operatorname{supp} F_{k^0}(x) \subset \{x \in \mathbf{R}^n\,;\, x\vartheta \geq 0\}$$

となる基本解である．

2 終結式と双曲錐 $\widetilde{\Gamma}_{\xi'}(\mathscr{R}_{\mathbf{real}})$

P と $\partial P/\partial \xi_n$ の ξ_n に関する終結式 (resultant) を $\mathscr{R}(\xi')$ によってあらわす．すなわち，

$$\mathscr{R}(\xi') = \det \mathscr{L}(\xi'),$$

$$\mathscr{L}(\xi') = \begin{pmatrix} P_0(\xi') & P_1(\xi') & \dots & P_m(\xi') & & \\ & P_0(\xi') & \dots\dots\dots\dots & & P_m(\xi') & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & & & P_0(\xi') & \dots\dots\dots\dots & & P_m(\xi') \\ mP_0(\xi') & (m-1)P_1(\xi') & \dots & P_{m-1}(\xi') & & \\ & mP_0(\xi') & \dots\dots\dots\dots & & P_{m-1}(\xi') & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & & & mP_0(\xi') & \dots\dots\dots\dots & & P_{m-1}(\xi') \end{pmatrix}.$$

$\mathscr{L}(\xi')$ は，上半分が $(m-1)$ 行で下半分が m 行の $(2m-1)\times(2m-1)$ 行列である．また，

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\mathscr{R}_{\mathrm{real}} &= \{\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}\,;\, P(\xi',\lambda)=0 \text{ が } \lambda \text{ に関して} \\ &\qquad\qquad \text{少なくとも 1 つの実多重根をもつ}\} \end{aligned}$$

とし，$\xi' \in \operatorname{Re}\mathscr{R}_{\mathrm{real}}$ で，$P(\xi',\lambda)=0$ が λ に関して実多重根を $r_{\xi'}$ 個もつとき，それらを $\lambda_k(\xi')$ $(1 \leq k \leq r_{\xi'})$ と書いて，

$$\widetilde{\Gamma}_{\xi'}(\mathscr{R}_{\mathrm{real}}) = \begin{cases} \mathbf{R}^{n-1} \setminus \{\zeta' \in \mathbf{R}^{n-1}\,;\, \prod_{k=1}^{r_{\xi'}} P_{(\xi',\lambda_k(\xi'))}(\zeta)=0\} & \\ \text{の } \vartheta' \text{ を含む連結成分} & (\xi' \in \operatorname{Re}\mathscr{R}_{\mathrm{real}}), \\ \mathbf{R}^{n-1} & (\xi' \notin \operatorname{Re}\mathscr{R}_{\mathrm{real}}) \end{cases}$$

で定義する．$\xi' \in \mathrm{Re}\,\mathscr{R}_{\mathrm{real}}$ で $P(\xi',\lambda)=0$ の λ に関する根が虚の多重根をもたないならば，$\widetilde{\Gamma}_{\xi'}(\mathscr{R}_{\mathrm{real}})$ は $\mathscr{R}$ の $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ での局所双曲錐に一致する．このことを以下で証明する．

行列 $\mathscr{L}(\xi')$ の第 $j_1,\ldots,j_r$ 行，第 $k_1,\ldots,k_r$ 列を省いてできる $(2m-r-1)\times(2m-r-1)$ 行列の行列式に

$$(-1)^{\sum_{i=1}^{r}(j_i+k_i)+\sum_{i=1}^{r-1}[(j_i-j_{i+1}+|j_i-j_{i+1}|)/(2|j_i-j_{i+1}|)]}$$

を掛けたものを $\mathscr{R}\binom{j_1,\ldots,j_r}{k_1,\ldots,k_r}(\xi')$ であらわす．次の補題2.1,2.2,2.3は行列式の簡単な性質から導かれる．

補題 2.1

$$\sum_{0\le k\le m-1}\mathscr{R}\binom{m+k}{m+k-l}(\xi')=0 \quad (0\le l\le m-2),$$

$$\sum_{\substack{1\le j_i\le m-1\ (1\le i\le r)\\ 0\le k\le m-1\\ s\ne t\Longrightarrow j_s\ne j_t\\ k\ne j_i+l\ (1\le i\le r)}}\mathscr{R}\binom{j_1,\ldots,j_r,m+k}{m+j_1,\ldots,m+j_r,m+k-l}(\xi')=0$$

$$(1\le r\le m-1,\ 0\le l\le m-2).$$

□

補題 2.2 $P(\xi)=\frac{\partial P}{\partial\xi_n}(\xi)=0$ なる $\xi\in\mathbf{C}^n$ に対して，

$$\sum_{0\le k\le m-1}\mathscr{R}\binom{m+k}{k+1}(\xi')=0.$$

さらに，$P(\xi)=\frac{\partial P}{\partial\xi_n}(\xi)=\cdots=\frac{\partial^{r+1}P}{\partial\xi_n^{r+1}}(\xi)=0$ なる $\xi\in\mathbf{C}^n$ に対して，

$$\sum_{\substack{1\le j_i\le m-1\ (1\le i\le r)\\ 0\le k\le m-1\\ s\ne t\Longrightarrow j_s\ne j_t\\ k\ne m+j_i-1\ (1\le i\le r)}}\mathscr{R}\binom{j_1,\ldots,j_r,m+k}{m+j_1,\ldots,m+j_r,k+1}(\xi')=0 \quad (1\le r\le m-1).$$

□

補題 2.3 $P(\xi)=\frac{\partial P}{\partial \xi_n}(\xi)=0$ なる $\xi\in\mathbf{C}^n$ に対して,

$$\mathscr{R}\binom{k}{m+k-l}(\xi')=\xi_n^l\mathscr{R}\binom{k}{m+k}(\xi')\quad(1\le k\le m-1,\ 1\le l\le m).$$

さらに $m\ge 3$ のとき, $P(\xi)=\frac{\partial P}{\partial \xi_n}(\xi)=\cdots=\frac{\partial^{r+1}P}{\partial \xi_n^{r+1}}(\xi)=0$ なる $\xi\in\mathbf{C}^n$ に対して,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\le j_i\le m-1\ (1\le i\le r)\\ 1\le k\le m-1\\ s\ne t\Longrightarrow j_s\ne j_t\\ k\ne j_i,j_i+l\ (1\le i\le r)}}&\mathscr{R}\binom{j_1,\dots,j_r,k}{m+j_1,\dots,m+j_r,m+k-l}(\xi')\\ &=\xi_n^l\sum_{\substack{1\le j_i\le m-1\ (1\le i\le r)\\ 1\le k\le m-1\\ s\ne t\Longrightarrow j_s\ne j_t\\ k\ne j_i\ (1\le i\le r)}}\mathscr{R}\binom{j_1,\dots,j_r,k}{m+j_1,\dots,m+j_r,m+k}(\xi')\\ &\qquad\qquad(1\le r\le m-2,\ 1\le l\le m).\end{aligned}$$

□

これらの補題を使えば次が示せる.

命題 2.4 $\xi'\in\mathrm{Re}\,\mathscr{R}_{\mathrm{real}}$ において $P(\xi',\lambda)=0$ が λ に関して実多重根のみをもつとき, $\mathscr{R}$ の $\xi'\in\mathrm{Re}\,\mathscr{R}_{\mathrm{real}}$ での局所化は, ϑ' に関して双曲型である.

□

(証明) 簡単のため $P(\xi^{0'},\xi_n)=0$ が ξ_n に関して実多重根 λ_1(重複度 l_1) を一つだけもつ場合を考える. このとき $\mathscr{R}$ は $\xi^{0'}$ で (l_1-1) 次で消える. $\mathscr{R}$ の1回微分は補題2.1,2.2,2.3を使えば,

$$\begin{aligned}\partial_{\xi_s}\mathscr{R}(\xi^{0'}) &= \partial_{\xi_s}P_m(\xi^{0'})\sum_{1\le k\le m-1}\mathscr{R}\binom{k}{m+k}(\xi^{0'})\\ &\quad+\sum_{1\le j\le m}[\partial_{\xi_s}P_{m-j}(\xi^{0'})\{\sum_{1\le k\le m-1}\mathscr{R}\binom{k}{m+k-j}(\xi^{0'})\\ &\qquad\qquad+j\sum_{0\le k\le m-1}\mathscr{R}\binom{m+k}{m+k-j+1}(\xi^{0'})\}]\\ &=\{\sum_{0\le j\le m}\lambda_1^j\partial_{\xi_s}P_{m-j}(\xi^{0'})\}\sum_{1\le k\le m-1}\mathscr{R}\binom{k}{m+k}(\xi^{0'}).\end{aligned}$$

$P(\xi)$ が狭義双曲型であることより,

$$\sum_{0\le j\le m} \lambda_1^j \partial_{\xi_s} P_{m-j}(\xi^{0'}) \neq 0$$

なる $1 \le s \le m-1$ が少なくとも一つ存在する．ゆえに $l_1 - 1 \ge 2$ なら,

$$\sum_{1\le k\le m-1} \mathscr{R}\binom{k}{m+k}(\xi^{0'}) = 0.$$

そこで $\sum_{1\le k\le m-1} \mathscr{R}\binom{k}{m+k}$ の1回微分を考える．補題2.1,2.2,2.3を使えば,

$$\begin{aligned}
&\partial_{\xi_s} \sum_{1\le k\le m-1} \mathscr{R}\binom{k}{m+k}(\xi^{0'}) \\
&= \partial_{\xi_s} P_m(\xi^{0'}) \sum_{\substack{1\le j_1\le m-1 \\ 1\le k\le m-1,\ k\neq j_1}} \mathscr{R}\binom{j_1,k}{m+j_1,m+k}(\xi^{0'}) \\
&\quad + \sum_{1\le j\le m} [\partial_{\xi_s} P_{m-j}(\xi^{0'}) \{ \sum_{\substack{1\le j_1\le m-1 \\ 1\le k\le m-1 \\ k\neq j_1, j_1+j}} \mathscr{R}\binom{j_1,k}{m+j_1,m+k-j}(\xi^{0'}) \\
&\qquad + j \sum_{\substack{1\le j_1\le m-1 \\ 0\le k\le m-1 \\ k\neq j_1, j_1+j-1}} \mathscr{R}\binom{j_1,m+j_1}{m+k,m+k-j+1}(\xi^{0'})\}] \\
&= \{\sum_{0\le j\le m} \lambda_1^j \partial_{\xi_s} P_{m-j}(\xi^{0'})\} \sum_{\substack{1\le j_1\le m-1 \\ 1\le k\le m-1,\ k\neq j_1}} \mathscr{R}\binom{j_1,k}{m+j_1,m+k}(\xi^{0'}).
\end{aligned}$$

したがって結局,

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_{\xi^{0'}}(\zeta') &= \frac{1}{(l_1-1)!}\{\sum_{s=1}^{n-1}(\sum_{j=0}^{m} \lambda_1^j \partial_{\xi_s} P_{m-j}(\xi^{0'}))\zeta_s\}^{l_1-1} \\
&\quad \times \sum_{\substack{1\le j_i\le m-1\ (1\le i\le l_1-1) \\ s\neq t \Longrightarrow j_s\neq j_t}} \mathscr{R}\binom{j_1,\ldots,j_{l_1-1}}{m+j_1,\ldots,m+j_{l_1-1}}(\xi^{0'}).
\end{aligned}$$

もし，$P(\xi^{0'}, \lambda) = 0$ が λ に関して実多重根を r 個もてば，それらを λ_k $(1 \le k \le r)$，その重複度を l_k とすると，$\mathscr{R}$ は $\xi^{0'}$ で $L_{\xi^{0'}} = \sum_{k=1}^{r}(l_k - 1)$ 次で

消える．したがって，

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_{\xi^{0\prime}}(\zeta') &= \sum_{|\alpha|=L_{\xi^{0\prime}}} \frac{1}{\alpha!}\zeta'^{\alpha}\partial_{\xi'}^{\alpha}\mathscr{R}(\xi^{0\prime}) \\ &= \frac{1}{L_{\xi^{0\prime}}!}\prod_{k=1}^{r}\{\sum_{s=1}^{n-1}(\sum_{j=0}^{m}\lambda_k^j\partial_{\xi_s}P_{m-j}(\xi^{0\prime}))\zeta_s\}^{l_k-1} \\ &\qquad \times \sum_{\substack{1\le j_i\le m-1\ (1\le i\le L_{\xi^{0\prime}}) \\ s\ne t\Longrightarrow j_s\ne j_t}} \mathscr{R}\binom{j_1,\ldots,j_{L_{\xi^{0\prime}}}}{m+j_1,\ldots,m+j_{L_{\xi^{0\prime}}}}(\xi^{0\prime}).\end{aligned}$$

ゆえに，$\mathscr{R}_{\xi^{0\prime}}$ は ϑ' に関して双曲型である．

■

$P(\xi)$ が ϑ に関して双曲型多項式のとき，P の $\xi\in\mathbf{R}^n$ における局所双曲錐 $\Gamma_\xi(P,\vartheta)$ が $\xi\in\mathbf{R}^n$ に関して内半連続であることより，$\widetilde{\Gamma}_{\xi'}(\mathscr{R}_{\mathrm{real}})$ は $\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}$ に関して内半連続 (inner semi-continuous) である．内半連続性の定義を [1] からそのまま引用すると，

定義 2.5 τ をある位相空間，C_τ を $\mathbf{R}^n$ の錐集合とする．写像 $\tau\to C_\tau$ が内半連続であるとは，任意の閉錐集合 $N\subset C_{\tau_0}\cup\{0\}$ に対して，次を満たす τ_0 の近傍 U が存在することをいう．

$$N\setminus\{0\}\subset C_\tau,\quad \tau\in U.$$

□

R, P_+ は共に

$$\mathscr{R}_{\mathrm{real}} = \{\xi'\in\mathbf{C}^{n-1}; P(\xi',\lambda)=0 \text{ が } \lambda \text{ に関して少なくとも 1 つの実多重根をもつ}\}$$

に分岐点をもつ．したがって，R, P_+ の $\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}$, $\xi\in\mathbf{R}^n$ での局所双曲錐をそれぞれ

$$\begin{aligned}\Gamma_{\xi'}(R,\vartheta') &= \{\eta'\in\widetilde{\Gamma}_{\xi'}(\mathscr{R}_{\mathrm{real}}); R_{\xi'}(\eta')\ne 0\} \text{ の } \vartheta' \text{ を含む連結成分}, \\ \Gamma_\xi(P_+,\vartheta) &= \{\eta\in\widetilde{\Gamma}_{\xi'}(\mathscr{R}_{\mathrm{real}})\times\mathbf{R}; P_{+\xi}(\eta)\ne 0\} \text{ の } \vartheta \text{ を含む連結成分}\end{aligned}$$

で定義する．また，RP_+ の局所双曲錐とその双対錐を

$$\begin{aligned}\Gamma_\xi(RP_+,\vartheta) &= (\Gamma_{\xi'}(R,\vartheta')\times\mathbf{R})\cap\Gamma_\xi(P_+,\vartheta),\\ K_\xi(RP_+,\vartheta) &= \{x\in\mathbf{R}^n\,;\xi\in\Gamma_\xi(RP_+,\vartheta)\ \text{ならば},\ x\xi\geq 0\}\end{aligned}$$

で定義する．$K(RP_+,\vartheta)=K_0(RP_+,\vartheta)$ と書けば，

$$\operatorname{supp}F_{k^0}(x)\subset K(RP_+,\vartheta)$$

である．

次の補題は $\Gamma_{\xi'}(R,\vartheta')$ の $\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}$ に関する内半連続性を述べたものである．

補題 2.6 (Wakabayashi[2]) $\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}\setminus\{0\}$ とする．任意のコンパクト集合 $K\subset\Gamma_{\xi'}(R,\vartheta')$ に対して，ξ' の錐近傍 U と $t_0>0$ が存在して，$\eta'\in K$, $\zeta'\in U$, $0<t\leq t_0$ のとき，

$$R(\zeta'-it|\zeta'|\eta')\neq 0.$$

□

P_+ に対しても補題2.6と同じことが言える．

$$W(RP_+,\vartheta)=\bigcup_{\xi\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}}K_\xi(RP_+,\vartheta)$$

とおくと，補題2.6より

系 2.7 $x\notin W(RP_+,\vartheta)$ のとき，次を満たす C^∞-ベクトル場 $v(\xi)$ が存在する．

- $\lambda\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ のとき，

$$v(\lambda\xi)=|\lambda|v(\xi).$$

- 任意の $\xi\in\mathbf{R}^n$ に対して，

$$v(\xi)\in\Gamma_\xi(RP_+,\vartheta)\cap\{\xi\in\mathbf{R}^n\,;x\xi=0\}.$$

- $0 < t \leq 1$ のとき,

$$R(\xi - itv(\xi))P_+(\xi - itv(\xi)) \neq 0.$$

□

上を満たすベクトル場 $v(\xi)$ の集合を $V(RP_+, X, \vartheta)$ と書く.

3　ホモロジー類 $[\alpha_x^\dagger]$

ベクトル場の集合 $V(RP_+, X, \vartheta)$ を用いて Herglotz-Petrovskiĭ-Leray の公式にあらわれるホモロジー類 $[\alpha_x^\dagger]$ を構成する.

Kronecker の微分形式を

$$\omega(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \zeta_j d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\zeta_j} \wedge \cdots \wedge d\zeta_n,$$

$\mathcal{S}_X^{n-1}$ を, ξ 空間における実 $(n-1)$ 次元球面に $(x\xi)\omega(\xi) > 0$ なる向きを入れたチェイン (境界が $\{x\xi = 0\}$ に含まれる実 $(n-1)$ 次元相対サイクル) とする.

定義 3.1 $x \notin \pm W(RP_+, \vartheta)$, $v \in V(RP_+, X, \vartheta)$ のとき,

$$\alpha_{x,v} = \text{chain-}\{\xi - iv(\xi)\,;\xi \in \tfrac{1}{2}\mathcal{S}_X^{n-1}\}$$

とおく. $\mathcal{S}_X^{n-1}$ の前についた $\frac{1}{2}$ はチェインの係数である.

□

定義3.1で, chain-$\{\cdot\}$ と書いたのは, 単なる点集合と向き付け可能で向きが定義されたチェインを区別しているからである. 向きは $\frac{1}{2}\mathcal{S}_X^{n-1}$ から誘導される向きをもつ. $\mathscr{R}^*_{\text{real}}$, X^*, W^* をそれぞれ

$$\mathscr{R}_{\text{real}},$$

$$X = \{\zeta \in \mathbf{C}^n\,; x\zeta = 0\},$$

$$W = \bigcup \{\xi + i\varepsilon\Gamma_\xi(RP_+, \vartheta)\,;\xi \in \mathbf{R}^n,\ \varepsilon = \pm 1\}$$

の複素射影空間 $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ への像とし，Φ, Φ_{X^*} をそれぞれ

$$W^* \setminus \mathscr{R}^*_{\mathrm{real}}, \quad (W^* \cap X^*) \setminus \mathscr{R}^*_{\mathrm{real}}$$

の m 重被覆面とする．また，$(RP_+)^\dagger$ によって $\{\zeta \in W\,; R(\zeta')P_+(\zeta) = 0\}$ の Φ における像をあらわす．

定義 3.2 $\alpha_{x,v}$ の Φ への像 $\alpha^\dagger_{x,v}$ は，v の選び方に依存せず，ホモロジー群

$$H_{n-1}(\Phi \setminus (RP_+)^\dagger, \Phi_{X^*} \setminus (RP_+)^\dagger; \mathbf{C})$$

の元を定めるので $[\alpha^\dagger_x]$ と書く．

□

4 Herglotz-Petrovskiĭ-Lerayの公式

関数 $\chi_s(z)$ $(z, s \in \mathbf{C},\ 0 < \arg z < \pi)$ を

$$\chi_s(z) = \begin{cases} \Gamma(-s)e^{-\pi i s}z^s, & s \neq 0, 1, \ldots, \\ z^s(\log z^{-1} + c_s + \pi i)/s!, & s = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

で定義する．ここで，$c_s = \Gamma'(1) + \sum_{k=1}^{s} k^{-1}$, $c_0 = \Gamma'(1)$ である．$\chi_s(z)$ は s を固定するごとに $\mathrm{Im}\, z > 0$ で正則ゆえ，実軸への境界値として超関数を定める．それを $\chi_s(x + i0)$ と書く．$\chi_s(x + i0)$ は s の整関数である．また，$\sigma_q \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ を

$$\sigma_q(x) = (2\pi i)^{-1}\{\chi_q(x + i0) - (-1)^q \chi_q(-x + i0)\}, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4}$$

で定義すれば，$q = N = 0, 1, \ldots$ のときは，$\chi_N(x)$ の log 項が消えて，

$$\sigma_q(x) = 2^{-1}(\mathrm{sgn}\, x)x^q/q!, \quad q = 0, 1, \ldots. \tag{5}$$

$q = -N = -1, -2, \ldots$ のときは，$\sigma'_q = \sigma_{q-1}$, $\sigma_0(x) = 2^{-1}(\mathrm{sgn}\, x)$ より，

$$\sigma_q(x) = \delta^{(-q-1)}(x), \quad q = -1, -2, \ldots. \tag{6}$$

補題 4.1 $v \in V(RP_+, X, \vartheta)$ とし，$F_{k^0}(x)$ は (3) で与えたものとする．

(i). $x \notin W(RP_+, \vartheta)$ のとき，

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^{\mu} \int_{|\xi|=1} i^{r_{k^0}-n-2\mu-1} \chi_{r_{k^0}-n-2\mu}(x\zeta) R_{jk^0}(\zeta') \zeta_n^{j-1} (R(\zeta')P_+(\zeta))^{-1} \omega(\zeta) \quad (7)$$

と書ける．ただし，$\zeta = \xi - i(v(\xi) - \varepsilon|\xi|\vartheta)$ ($\varepsilon > 0$ は十分小) である．

(ii). (7) は $\varepsilon \to +0$ としても，超関数の意味での積分として成り立つ．

□

(証明) $x \notin W(RP_+, \vartheta)$ のとき，Stokes の公式を用いれば，

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{-n} i^{-1} \sum_{j=1}^{\mu} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\zeta} R_{jk^0}(\zeta') \zeta_n^{j-1} (R(\zeta')P_+(\zeta))^{-1}\, d\zeta \quad (8)$$

と書ける．ただし，$\zeta = \xi - i(v(\xi) - \varepsilon|\xi|\vartheta)$ である．(8) に極座標変換 $\xi = \rho\eta$, $|\eta| = 1$ をほどこして動径方向に積分すれば，(7) が得られる．(ii) は明らか．

■

$t_x : H_{n-2}(\Phi_{X^*} \setminus (RP_+)^\dagger) \to H_{n-1}(\Phi \setminus (\Phi_{X^*} \cup (RP_+)^\dagger))$ を Leray の tube operation とすれば，次の Herglotz-Petrovskiĭ-Leray の公式が得られる．

定理 4.2 (Herglotz-Petrovskiĭ-Leray) $F_{k^0}(x)$ は (3) で与えたものとする．すると，$F_{k^0}(x)$ は $x \notin W(RP_+, \vartheta) \cup (-K(RP_+, \vartheta))$ のとき，x に関して実解析的で

$q = r_{k^0} - n - 2\mu - |\nu| \geq 0$ のとき，

$$D^\nu F_{k^0}(x) = (2\pi)^{1-n} \sum_{j=1}^{\mu} \int_{[\alpha_x^\dagger]} \chi_q^0(ix\xi) \xi^\nu R_{jk^0}(\xi') \xi_n^{j-1} (R(\xi')P_+(\xi))^{-1} \omega(\xi), \quad (9)$$

$q = r_{k^0} - n - 2\mu - |\nu| < 0$ のとき,

$$D^\nu F_{k^0}(x) = (2\pi)^{-n} i^{-1} \sum_{j=1}^{\mu} \int_{t_x \partial[\alpha_x^\dagger]} \chi_q^0(ix\xi) \xi^\nu R_{jk^0}(\xi') \xi_n^{j-1} (R(\xi') P_+(\xi))^{-1} \omega(\xi). \quad (10)$$

ここで,

$$\chi_q^0(z) = \begin{cases} z^q/q!, & q \geq 0, \\ (-1)^{q+1}(-q-1)! z^q, & q < 0 \end{cases}$$

である.

□

(証明) $\nu = 0$ の場合を示す. $F_{k^0}(x)$ は前進基本解で, $x \notin -K(RP_+, \vartheta)$ より $F_{k^0}(-x) = 0$. ゆえに補題4.1より,

$$\begin{aligned} F_{k^0}(x) &= F_{k^0}(x) - (-1)^{r_{k^0} - n + 1} F_{k^0}(-x) \\ &= (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^{\mu} i^{r_{k^0} - n - 2\mu - 1} \\ &\quad \Big\{ \int_{|\xi|=1} \chi_{r_{k^0} - n - 2\mu}(x\zeta) R_{jk^0}(\zeta') \zeta_n^{j-1} (R(\zeta') P_+(\zeta))^{-1} \omega(\zeta) \\ &\quad - \int_{|\xi|=1} \chi_{r_{k^0} - n - 2\mu}(x\tilde{\zeta}) R_{jk^0}(\tilde{\zeta}') \tilde{\zeta}_n^{j-1} (R(\tilde{\zeta}') P_+(\tilde{\zeta}))^{-1} \omega(\tilde{\zeta}) \Big\}, \\ &\qquad \zeta = \xi - i(v(\xi) - \varepsilon|\xi|\vartheta),\ \tilde{\zeta} = \xi - i(v(\xi) + \varepsilon|\xi|\vartheta). \end{aligned}$$

$\varepsilon \to +0$ として, (4) を使えば

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{1-n} \sum_{j=1}^{\mu} i^{r_{k^0} - n - 2\mu} \int_{|\xi|=1} \sigma_{r_{k^0} - n - 2\mu}(x\xi) R_{jk^0}(\zeta') \zeta_n^{j-1} (R(\zeta') P_+(\zeta))^{-1} \omega(\zeta).$$

ただし, $\zeta = \xi - iv(\xi)$ である. $q = r_{k^0} - n - 2\mu \geq 0$ のとき, (5) より

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{1-n} \sum_{j=1}^{\mu} i^q \int_{|\xi|=1} 2^{-1} (\operatorname{sgn} x\xi) x^q / q! R_{jk^0}(\zeta') \zeta_n^{j-1} (R(\zeta') P_+(\zeta))^{-1} \omega(\zeta).$$

$2^{-1}(\mathrm{sgn}\, x\xi)$ を積分範囲の $|\xi|=1$ に入れて考えれば，積分範囲は $\mathcal{S}_X^{n-1}$ となる．ゆえに (9) が成り立つ．(10) は (6) と Cauchy の積分表示を使って示される．

■

系 4.3 $x \in \mathscr{O} = \{\mathbf{R}^n \backslash (W(RP_+, \vartheta) \cup (-K(RP_+, \vartheta)))$ の一つの連結成分$\}$ とする．

(i). $r_{k^0} \geq n + 2\mu$ かつ $[\alpha_x^\dagger] = 0$ ならば，$\mathscr{O}$ は $F_{k^0}(x)$ の strong regular lacuna である．

(ii). $r_{k^0} < n + 2\mu$ かつ $\partial[\alpha_x^\dagger] = 0$ ならば，$\mathscr{O}$ は $F_{k^0}(x)$ の strong regular lacuna である．

(iii). $\partial[\alpha_x^\dagger] = 0$ ならば，$\mathscr{O}$ は $F_{k^0}(x)$ の lacuna である．

□

参考文献

[1] M. F. Atiyah, R. Bott and L. Gårding. Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients I, II. *Acta Math.*, Vol. 124, pp. 109-189, 1970; Vol. 131, pp. 145-206, 1973.

[2] S. Wakabayashi. Analytic wave front sets of the Riemann functions of hyperbolic mixed problems in a quarter-space. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, Vol. 11, pp. 785-807, 1976.