数理解析研究所講究録
1158巻 2000年 61-65

ONDES ÉLASTIQUES DANS LA ZONE D'OMBRE

par
TATSUSHI MORIOKA (森岡達史)

Lorsque on donne la force à certaine matière, elle se déforme et lorsque on ne lui donne plus la force, elle reprend la forme primitive. Cette nature est appelée élasticité. La matière élastique est celle qui possède l'élasticité.

Nous étudions une matière élastique isotrope. Les ondes élastiques qu'y se propagent ont en général la superposition des ondes P et celles S. L'onde P est celle longitudinale et l'onde S est celle transversale. L'onde longitudinale est celle dont la direction de la propagation est parallèle à la direction du déplacement. L'onde transversale est celle dont la direction de la propagation est perpondiculaire à la direction du déplacement.

Considérons la libérté du déplacement par rapport à la direction de la propagation, concernant des ondes P et S. Quant à l'onde P, elle n'a pas de libérté, car sa direction du déplacement est parallèle à la direction de la propagation. En revanche, l'onde S a la libérté à 2 dimension, car sa direction du déplacement est perpondiculaire à la direction de la propagation. On s'intéresse à la polarisation des ondes S. La polarisation des ondes signifie la concentration du déplacement à certaine direction.

La réflection des ondes a lieu lorsque elles atteignent l'obstacle. Quant à l'onde élastique, 2 sortes des ondes (celles P et S) apparaissent au moment de la réflection, même s'il n'y a qu'une sorte des ondes qui arrivent à l'obstacle. Ce phénomène, celui auquel la sorte des ondes change, est appelé la conversion des modes. Supposons que la matière élastique isotrope contient un obstacle à son intérieur, que l'obstacle est strictement convexe et que son bord est lisse. Lorsque l'onde S arrive à l'obstacle à partir de la direction particulière, la diffraction de l'onde P a lieu par la conversion des modes. En raison de l'onde P qui se propage au bord de l'obstacle, la conversion des modes a lieu et les ondes S qui se propagent du bord de l'obstacle à l'intérieur de la matière élastique apparaissent. On considère ce phénomène. Les ondes à la surface de l'obstacle, qui apparaissent en raison de la diffraction de l'onde P, est la supperposion de l'onde P et celle S. Supposons que l'onde S arrivant à l'obstacle est polarisée. Alors, la première conclusion concernant ce phénomène est que les ondes qui se propagent à la surface de l'obstacle est polarisèes. La deuxième conclusion est que la direction de la polarisation de l'onde à la surface dépend de celle de la polarisation de l'onde S qui arrive à l'obstacle.

Formulons le phénomène que l'on considère par l'équation aux dérivées partielles. Le comportement des ondes élastiques est formulé par l'équation élastique $Lu = 0$, qui est système hyperbolique à 3×3, où

$$
\begin{aligned}
& L = \partial_t^2 - A(\partial_x) \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^3 , \\
& A(\partial_x) = \mu \triangle + (\lambda + \mu) \text{grad div} \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}_x^3 , \\
& \lambda , \quad \mu \quad \text{sont positives constantes.}
\end{aligned}
$$

Définissons 2 opérateurs scalaires $\square_n \quad n = 1, 2$ dans $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^3$ par $\square_n = \partial_t^2 - c_n^2 \triangle$, où $c_1 = (\lambda + 2\mu)^{1/2}$, $c_2 = \mu^{1/2}$. Des ondes P et S sont respectivememt formulées par des fonctions vérifiant $Lu_P = \square_1 u_P = 0$ et $Lu_S = \square_2 u_S = 0$. Ces équations montrent que la vitesse de la propagation des ondes P et celles S est respectivememt c_1 et c_2.

L'équation que l'on étudie est celle suivante.

$$
(1) \qquad \begin{cases} Lu = 0 & \text{dans } \mathbf{R} \times \Omega \\ u \,|_{\mathbf{R} \times \partial\Omega} = g & \end{cases}
$$

$$
\Omega \subset \mathbf{R}_x^3 \quad : \quad \text{domaine extérieur}
$$

Ici, Ω représente la matière élastique. On suppose les conditions suivantes.

(H.1) $\partial\Omega$ est analytique.

(H.2) $\mathbf{R}^3 \backslash \Omega$ est strictement convexe.

On définit des notations pour décrire le théorème.

Notations.

$N = \mathbf{R} \times \partial\Omega$, $\triangle_{\partial\Omega}$: laplacien sur $\partial\Omega$.

$\sigma(\triangle_{\partial\Omega})$: symbole principal de $\triangle_{\partial\Omega}$.

$q_n \in C^\infty(T^*N\,, \mathbf{R})$: fonctions définies par $q_n(\tau, \beta) = -\tau^2 - c_n^2\sigma(\triangle_{\partial\Omega})(\beta)$,

$n = 1\,, 2\,,\quad \tau \in \mathbf{R}\,,\ \beta \in T^*(\partial\Omega)$.

π : projection de T^*N à N

$\rho \in T^*N\backslash 0$: point fixé vérifiant $q_1(\rho) = 0$, $\pi(\rho) = (0, z)$, $z \in \partial\Omega$

γ : courbe dans T^*N définie par $\gamma(s) = \exp\, sH_{q_1}(\rho)$

$\partial/\partial n$: dérivée au long de vecteur normal de $\partial\Omega$

$m \in \mathbf{R}$: nombre fixé vérifiant $1 \leqq m < 3$

$WF_A(*)$: front d'onde analytique

$WF_G^k(*)$: front d'onde Gevrey k

Théorème 1. *On suppose que (H.1) et (H.2) sont vérifiées. Soit* $0 < s_0 < s_1$, s_1 *suffisamment petit,* $\omega \subset T^*N\backslash 0$, $\rho \in \omega$, ω *suffisamment petit,* $\omega \cap \gamma([s_0\,, s_1]) = \phi$, $WF_A(g) \subset \omega$, u *la solution sortant de (1). Alors, on a (i) et (ii) suivants.*

(i) $\gamma([s_0\,, s_1]) \cap WF_G^3((\partial u/\partial n)\,|_N) = \phi$.

(ii) $\gamma([s_0\,, s_1]) \cap WF_G^m((\partial u/\partial n)\,|_N) = \phi$ *où* $\gamma([s_0\,, s_1]) \subset WF_G^m((\partial u/\partial n)\,|_N)$.

On ésquisse la formulation pour la propagation de l'onde à la surface. En fonction de signe de q_n, $T^*N\backslash 0$ est divisé comme ci-dessous.

Définition. *Dans* $T^*N\backslash 0$, *les ensembles définis par* $\{q_1 < 0\}$, $\{q_1 = 0\}$, $\{q_1 > 0\}$ *sont respectivement appelés la région P-hyperbolique, P-Glancing, P-elliptique. Les ensembles définis par* $\{q_2 < 0\}$, $\{q_2 = 0\}$, $\{q_2 > 0\}$ *sont respectivement appelés la région S-hyperbolique, S-Glancing, S-elliptique.*

Selon la définition, $T^*N\backslash 0 = \{P - hyperbolique\} \cup \{P - Glancing\} \cup \{P - elliptique\} = \{S - hyperbolique\} \cup \{S - Glancing\} \cup \{S - elliptique\}$, où chaque union est disjoint. Théorème 1 - (ii) exprime la propagation de l'onde à la surface comme la propagation de la singularité Gevrey de la solution sortant de (1) dans la région P-Glancing. Théorème 1 - (i) montre que la solution sortant de (1) possède la régularité Gevrey 3 dans la région P-Glancing. Cela résulte du fait que la plupart de l'énergie des ondes arrivant à l'obstacle ne reste pas à son bord. Le fait important est que l'on a $\{P - Glancing\} \subset \{S - hyperbolique\}$. Cela nous permet de savoir que l'orbite classique des ondes S peut entrer dans la région P-Glancing et que l'orbite classique des ondes S apparaît de la région P-Glancing. Ce fait correspond au phénomène auquel la diffraction de l'onde P a lieu lorsque l'onde S arrive à l'obstacle à partir de la certaine direction et la conversion des modes a lieu en raison de la diffraction de l'onde P. En effet, on a besoin de 2 fonction de phase correspondant à l'onde P et celle S, lorsque on construit la solution asymptotique de (1) dans la région P-Glancing. (Cf. Kawashita [9], Stefanov - Vodev [24], Morioka [19].) Lorsque l'équation est celle des ondes, Théorème 1 a été prouvé par Lebeau [16]. On peut prouver Théorème 1 par la combinaison de Lebeau [16] et Stefanov - Vodev [24]. Voir Morioka [19].

Quant à la polarisation des ondes, Dencker [3] l'a formulée en utilisant des opérateurs pseudo-différentiels. Concernant des ondes à la surface qui apparaissent par la diffraction de l'onde P, on peut formuler leur polarisation en remplaçant des opérateurs pseudo-différentiels par des opérateurs unilatéraux (Lebeau [16. §4]).

References

1. C. Bardos - G. Lebeau - J. Rauch, *Scattering frequence and Gevrey 3 singularities*, Invent. Math. **90** (1987), 77–114.
2. C. Bardos - T. Masrour - F. Tatout, *Observation and control of elastic waves*, (J. Rauch - M. Taylor eds.) Singularities and Oscillation, IMA volumes in Math. and its Appl. **91** (1997), 1–16.
3. N. Dencker, *On the propagation of polarization sets for systems of real principal type*, J. Funct. Anal. **46** (1982), 351–372.
4. G. Eskin, *General initial boundary problems for second order hyperbolic equations*, D. Reidel. Co. Dordrecht, London (1981), 19–54.
5. F.G. Friedlander - R. B. Melrose, *The wave front set of the solution of a simple initial-boundary value problem with glancing rays.* II, Math. Proc. Cam. Phil. Soc. **81** (1977), 97–120.

6. C. Gérard, *Réflexion du front d'onde polarisé des solutions de système d'équations aux dérivées partielles*, C. R. Acad. Sci. Paris **297** (1983), 409–412.
7. L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators* I-IV, Springer.
8. M. Iwashita - Y. Shibata, *On the analyticity of spectral functions for some exterior boundary value problems*, Glasnik Mate. **23** (1988), 291-313.
9. M. Kawashita, Master thesis (1988).
10. O. Lafitte, *The kernel of the Neumann operator for a strictly diffractive analytic problem*, Comm. P.D.E. **20** (1995), 419–483.
11. O. Lafitte, *Second term of the asymptotic expansion of the diffracted wave in the shadow*, Asymptotic Analysis **13** (1996), 329–359.
12. O. Lafitte, *Diffraction for a Neumann boundary condition*, Comm. P.D.E. **22** (1997), 319–359.
13. B. Lascar - R. Lascar, *Propagation des singularités Gevrey pour la diffraction*, Comm. P.D.E. **16** (1991), 547–584.
14. G. Lebeau, *Deuxième microlocalisation à croissance*, Séminaire Goulaouic - Meyer - Schwartz (1982–1983).
15. G. Lebeau, *Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **35** (1985), 145–216.
16. G. Lebeau, *Régularité Gevrey 3 pour la diffraction*, Comm. P.D.E. **9** (1984), 1437–1494.
17. G. Lebeau, *Propagation de singularité Gevrey pour le problème de Dirichlet*, Advanced in microlocal analysis, NATO A.S.I. published by Reidel (Garnir ed.) (1986), 203–223.
18. R.B. Melrose, *Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems*, Duke. Math. J. **42** (1975), 605–635.
19. T. Morioka, *Régularité des ondes élastiques dans la région Glancing des ondes P*, Publ. RIMS. Kyoto Univ. **35, No.4** (1999), 599–619.
20. Y. Okada, *Second microlocal singularities of tempered and Gevrey classes*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. Math. **39** (1992), 475–505.
21. M. Sato - K. Kashiwara - T. Kawai, *Hyperfunctions and pseudo differential equations*, Lect. Notes Math. 287, Springer (1973).
22. J. Sjöstrand, *Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems*, Comm. P.D.E. **5** (1980), 41–94.
23. J. Sjöstrand, *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque **95** (1982).
24. P. Stefanov - G. Vodev, *Distribution of the resonances for the Neumann problem in linear elasticity outside a strictly convex body*, Duke Math. J. **78** (1995), 677–714.
25. M.E. Taylor, *Grazing rays and reflection of singulaities of solution to wave equation*, Comm. Pure. Appl. Math. **29** (1976), 1–38.
26. K. Yamamoto, *Singularities of solutions to the boundary value problems for elastic and Maxwell's equations*, Japan J. Math. **14** (1988), 119–163.