数理解析研究所講究録
1158 巻 2000 年 58-60

リーノルムに関するいくつかの予想

国際基督教大学
森本光生

1999年8月16日から21日に福岡で開催された第2回ISAAC会議において、筆者は藤田景子と共同で、双対リー球上の正則関数の2重級数展開について発表した([2])。その結果を見ると、リーノルムと双対リーノルムを繋ぐノルムの連続な系列が存在すると予想できる。

1 リーノルムと双対リーノルム

$\|x\|$ で $\mathbb{R}^n$ 上のユークリッドノルムを表す。$\mathbb{R}^n$ の複素化 $\mathbb{C}^n$ 上に定義される $\|x\|$ の交差ノルムを $L(z)$ で表すことにする。

$$L(z)=\inf\left\{\sum_{j=1}^{M}|\lambda_j|\|x_j\|; z=\sum_{j=1}^{M}\lambda_j x_j, \lambda_j\in\mathbb{C}, x_j\in\mathbb{R}^n\right\}$$

$L(z)$ はリーノルムといい、次のようにも表示できる。

$$L(z)=\sqrt{\|z\|^2+\sqrt{\|z\|^4-|z^2|^2}} \tag{1}$$

ここで、$z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ としたとき、

$$\|z\|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2, \quad z^2=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$$

である。

一方、双対リーノルム $L^*(z)$ は次式で定義される。

$$L^*(z)=\sup\{|z\cdot\zeta|; L(\zeta)\le 1\}$$

ここで、$z=(z_1,z_2,\cdots,z_3)$ と $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$ に対して、

$$z\cdot\zeta=z_1\zeta_1+z_2\zeta_2+\cdots+z_n\zeta_n$$

である。 $L^*(z)$ は次のようにも表示できる。

$$L^*(z)=\sqrt{(\|z\|^2+|z^2|)/2}=\frac{1}{2}\left(L(z)+\frac{|z^2|}{L(z)}\right)$$

さて、

$$\frac{|z^2|}{L(z)}=\sqrt{\|z\|^2-\sqrt{\|z\|^4-|z^2|^2}}$$

に注意すれば、

$$L^*(z)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\|z\|^2+\sqrt{\|z\|^4-|z^2|^2}}+\sqrt{\|z\|^2-\sqrt{\|z\|^4-|z^2|^2}}\right) \quad (2)$$

とも表示できる。(以上については、[1] および [4] を参照。)

また、$\mathbb{C}^n$ 上のユークリッドノルム $\|z\|$ は次のように表示できる。

$$\|z\|=\left\{\frac{1}{2}\left((\|z\|^2+\sqrt{\|z\|^4-|z^2|^2})+(\|z\|^2-\sqrt{\|z\|^4-|z^2|^2})\right)\right\}^{1/2} \quad (3)$$

2 予想

$p\geq 1$ に対して、$\mathbb{C}^n$ 上の関数 $N_p(z)$ を次のように定義する。

$$N_p(z)=\left\{\frac{1}{2}\left((\|z\|^2+\sqrt{\|z\|^4-|z^2|^2})^{p/2}+(\|z\|^2-\sqrt{\|z\|^4-|z^2|^2})^{p/2}\right)\right\}^{1/p}$$

(2) より $N_1(z)=L^*(z)$ であり、(3) より $N_2(z)=\|z\|$ である。また、(1) より $N_\infty(z)=L(z)$ と自然に解釈できる。そこで次のように予想を立てる。

予想 (A) $p\geq 1$ に対して、$N_p(z)$ は $\mathbb{C}^n$ 上のノルムである。

予想 (B) $1/p+1/q=1$ とすると、$N_q(z)$ の双対ノルムは $N_p(z)$ である。すなわち、

$$N_p(z)=\sup\{|z\cdot\zeta|; N_q(\zeta)\leq 1\}$$

注意 1　上述のように、$p = 1, 2, \infty$ のときには、予想 (A) (B) 共に正しい。

注意 2　$n = 2$ のときは、$z = (z_1, z_2)$ に対し、

$$N_p(z) = \left\{ \frac{1}{2} \left(|z_1 + iz_2|^p + |z_1 - iz_2|^p \right) \right\}^{1/p}$$

$$z \cdot \zeta = z_1\zeta_1 + z_2\zeta_2 = \frac{1}{2} \left((z_1 + iz_2)(\zeta_1 - i\zeta_2) + (z_1 - iz_2)(\zeta_1 + i\zeta_2) \right)$$

が成り立つので、予想 (A)(B) 共に正しい。

注意 3　予想 (A) は上智大学の木邨拓哉によって、2000 年 2 月に肯定的に解決された ([3])。しかし、予想 (B) は 2000 年 5 月現在未だ解決されていない。

参考文献

[1] L.Drużkowski: Effective formula for the cross norm in the complexified unitary space, Zeszyty Nauk Uniw. Jagiellon. Prace Mat., **15**(1974), 47 – 53.

[2] K. Fujita and M. Morimoto: Holomorphic functions on the dual Lie ball, to appear in the Proceedings of the second ISAAC congress, Fukuoka, 1999

[3] T. Kimura: Norms related to the Lie norm, (preprint) (この論文は、2000 年 2 月に上智大学に提出された修士論文の一部である。)

[4] M. Morimoto: Analytic Functionals on the Sphere, Translations of Mathematical Monograph, Vol.178, Americal Mathematical Society, 1998, Providence, Rhode Island.