数理解析研究所講究録
1161 巻 2000 年 1-11

Non-Bayesian and Bayesian prediction intervals for an unobservable chi random variable

筑波大・数学　飛田 英祐 (Eisuke Hida)

1. はじめに

統計的予測論では，観測データに基づいて未観測の確率変数を予測する方法について論じられている ([Gu70], [Take75], [A90], [Ge93], [Taka96]). 最近，Howlader and Hossain[HH98] は気体分子の速度が従うとして知られている (母数 θ をもつ)Maxwell 分布 (自由度 3 のカイ分布) の場合に，Bayesian の観点から予測問題を考えた.

本論では，もっと一般に，尺度母数 $\sqrt{\theta}$ をもつ自由度 k のカイ分布 ($\chi_k(\theta)$ 分布)，すなわち，その確率密度関数 (p.d.f.)

$$f(x,\theta)=\frac{2}{\Gamma(k/2)}\theta^{-k/2}e^{-x^2/\theta}x^{k-1} \qquad (0<x<\infty;\ \ 0<\theta<\infty) \tag{1.1}$$

をもつ分布の場合に non-Bayesian, Bayesian それぞれの観点から予測問題を考察する．また，それらの予測区間を被覆確率を用いて比較する ([Hi00]).

2. Non-Bayesian の場合

$X_1,\ldots,X_n$ を $\chi_k(\theta)$ 分布からの観測可能な無作為標本とし，Y を $\mathbf{X}:=(X_1,\ldots,X_n)$ とは独立に $\chi_k(\theta)$ 分布に従う未観測な確率変数とする．ここで，母数 θ は未知の正数とする．このとき，$\mathbf{X}$ に基づいて Y を予測する方式について考える．ただし，$k>2$ とする．

(i) ベータ分布を用いる方法

標本 $\mathbf{X}:=(X_1,\ldots,X_n)$ の同時密度関数 (joint(j.)p.d.f.) は

$$f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x};\theta)=\frac{2^n}{\left\{\Gamma(\frac{k}{2})\right\}^n}\theta^{-\frac{nk}{2}}\left\{\exp\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\right\}\prod_{i=1}^n x_i^{k-1}$$

であり，$\chi_k(\theta)$ 分布は指数型分布族に属するので，$S:=\sum_{i=1}^n X_i^2$ は未知母数 θ に対する完備十分統計量になる．また，各 X_i は $\chi_k(\theta)$ 分布からの無作為標本であるので，X_i^2 は尺度母数 θ をもつ自由度 k のカイ 2 乗分布 ($\chi_k^2(\theta)$ 分布) に従う．そこで，カイ 2 乗分布の再生性から，S は $\chi_{nk}^2(\theta)$ 分布に従い，その p.d.f. は

$$f_S(s;\theta)=\frac{1}{\Gamma(\frac{nk}{2})}\theta^{-\frac{nk}{2}}e^{-\frac{s}{\theta}}s^{\frac{nk}{2}-1}$$

である．また，S と Y は独立なので，(S,Y) の j.p.d.f. は

$$f_{S,Y}(s,y;\theta)=\frac{2}{\Gamma(\frac{k}{2})\Gamma(\frac{nk}{2})}\theta^{-(\frac{k}{2}+\frac{nk}{2})}e^{-\frac{1}{\theta}(s+y^2)}s^{\frac{nk}{2}-1}y^{k-1}$$

となることから，統計量 $T:=S+Y^2$ も未知母数 θ に対する完備十分統計量であり，T は $\chi^2_{(n+1)k}(\theta)$ 分布に従う．このとき，T を与えたときの Y の条件付密度関数は

$$\begin{aligned} f_{Y|T}(y|t) &:= \frac{f_{T,Y}(t,y;\theta)}{f_T(t;\theta)} \\ &= \frac{2}{B(\frac{k}{2},\frac{nk}{2})}\left(\frac{y^2}{t}\right)^{(k-1)/2}\left(1-\frac{y^2}{t}\right)^{(nk/2)-1}t^{-1/2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

になり，これは θ に無関係である．このことは，十分統計量 T に基づく Y の予測区間が未知の母数 θ に無関係に構成することができることを意味している．さらに，(2.1) において $Z:=Y^2/T$ とおくと Z は T と独立に，θ に無関係なベータ分布 $Be(k/2,nk/2)$ に従う．このとき，Z の p.d.f. は

$$g_Z(z)=\frac{1}{B(\frac{k}{2},\frac{nk}{2})}z^{(k/2)-1}(1-z)^{(nk/2)-1} \qquad (0\le z\le 1)$$

である．従って，任意の α $(0<\alpha<1)$ について

$$P\{z_1\le Z\le z_2\}=1-\alpha.$$

を満たす z_1，z_2 $(0\le z_1<z_2<1)$ を求めることで，Y の信頼係数 $1-\alpha$ の予測区間が得られる．

いま，$k(>2)$ に対して $g_Z(z)$ は単峰形であるので，次の条件

$$\int_{z_1}^{z_2} g_Z(z)dz=1-\alpha, \tag{2.2}$$

$$g_Z(z_1)=g_Z(z_2) \tag{2.3}$$

を同時に満たす (z_1,z_2) をとることができる．この場合，(2.2) は

$$I_{z_2}\left(\frac{k}{2},\frac{nk}{2}\right)-I_{z_1}\left(\frac{k}{2},\frac{nk}{2}\right)=1-\alpha, \tag{2.4}$$

と表せる．ただし，$I_p(a,b)$ は不完全ベータ関数比，すなわち

$$I_p(a,b)=\frac{1}{B(a,b)}\int_0^p z^{a-1}(1-z)^{b-1}dz \qquad (0\le p\le 1;\ a>0,\ b>0) \tag{2.5}$$

とする．また，(2.3) は

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{(k/2)-1}=\left(\frac{1-z_2}{1-z_1}\right)^{(nk/2)-1} \tag{2.6}$$

と表すことができる．そこで，連立方程式 (2.4)，(2.6) の解を (z_1, z_2) とすると，$Z = Y^2/T$，$T = S + Y^2$ の関係より，任意の θ について

$$P_\theta\left\{\sqrt{\frac{z_1 S}{1-z_1}} \leq Y \leq \sqrt{\frac{z_2 S}{1-z_2}}\right\} = 1-\alpha$$

が成り立つ．従って区間

$$\left[\sqrt{z_1 S/(1-z_1)},\quad \sqrt{z_2 S/(1-z_2)}\right]$$

は完備十分統計量 S に基づく Y の信頼係数 $1-\alpha$ の予測区間となる．

(ii) F 分布を用いる方法

完備十分統計量に基づく Y の予測区間を構成する別の方法について考察する．先ほどと同様に S，Y^2 は独立にそれぞれカイ 2 乗分布 $\chi^2_{nk}(\theta)$，$\chi^2_k(\theta)$ に従っている．よって，統計量

$$F := \frac{Y^2/k}{S/(kn)} = \frac{nY^2}{S} \tag{2.7}$$

は自由度 k, nk をもつ F 分布 $F_{k,nk}$ に従う．ここで，この F 分布 $F_{k,nk}$ の上側 $100(\alpha/2)\%$ 点を $F_{\alpha/2}(k, nk)$ とすると，任意の θ について

$$P_\theta\{F_{1-\alpha/2}(k,nk) \leq F \leq F_{\alpha/2}(k,nk)\} = 1-\alpha$$

が成り立つ．従って，(2.7) から，任意の θ について

$$P_\theta\left\{\sqrt{F_{1-\alpha/2}(k,nk)S/n} \leq Y \leq \sqrt{F_{\alpha/2}(k,nk)S/n}\right\} = 1-\alpha$$

が成り立つから

$$\left[\sqrt{F_{1-\alpha/2}(k,nk)S/n},\quad \sqrt{F_{\alpha/2}(k,nk)S/n}\right]$$

は完備十分統計量 S に基づく Y の信頼係数 $1-\alpha$ の予測区間となる．

3. Bayesian の場合

Maxwell 分布，すなわち自由度 3 のカイ分布 $\chi_3(\theta)$ について，Howlader and Hossain[HH98] は Bayesian の観点で予測区間を構成した．この節では [HH98] と同様の方法で，一般的な自由度 $k(>2)$ をもつカイ分布 $\chi_k(\theta)$ に対する highest posterior density (略して HPD) 予測区間を構成する． まず，(1.1) より，観測されたデータ $\mathbf{X} = \boldsymbol{x}$ の尤度関数は

$$L(\boldsymbol{x};\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \propto \theta^{-nk/2} e^{-S/\theta}$$

である．ただし，$S := \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ とする．いま，未知母数 θ の事前密度は [HH98] と同様に，Hartigan の漸近的に局所不変事前密度，すなわち $l_i := (d^i/d\theta^i)\log f(x;\theta), (i=1,2)$ としたとき，$E[l_1]=0$, $E[l_1^2]+E[l_2]=0$ ならば，$(d/d\theta)\log p_H(\theta) = -E[l_1 l_2]/E[l_2]$ を満たす $p_H(\theta)$ をとる．この場合 $p_H(\theta) \propto \theta^{-2}$ となる ([Ha64])．従って，θ の事後密度は尤度関数と事前密度より

$$\begin{aligned} h_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta|\boldsymbol{x}) &:= \frac{L(\boldsymbol{x};\theta)p_H(\theta)}{\int_\Theta L(\boldsymbol{x};\theta)p_H(\theta)d\theta} \\ &= K\theta^{-(m+1)}e^{-S/\theta} \qquad (\theta > 0) \end{aligned}$$

となる．ただし，$m := (nk+2)/2$ とし，$K := S^m/\Gamma(m)$ は規準化定数とする．このとき，$\mathbf{X} = \boldsymbol{x}$ を与えたときの未観測の確率変数 Y と母数 θ の条件付同時密度関数は，Y と $\mathbf{X}$ はたがいに独立であるから

$$\begin{aligned} f_{Y,\Theta|\mathbf{X}}(y,\theta|\boldsymbol{x}) &= f_{Y|\Theta,\mathbf{X}}(y|\theta,\boldsymbol{x})h_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta|\boldsymbol{x}) \\ &= f_{Y|\Theta}(y|\theta)h_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta|\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

となる．従って，Y の予測密度は

$$\begin{aligned} f_{Y|\mathbf{X}}(y|\boldsymbol{x}) &= \int_0^\infty f_{Y,\Theta|\mathbf{X}}(y,\theta|\boldsymbol{x})d\theta \\ &= \frac{2S^m}{B(k/2,m)}\frac{y^{k-1}}{(y^2+S)^{m+(k/2)}} \qquad (y > 0) \end{aligned}$$

となり θ に無関係となる．この Y の予測密度 $f_{Y|\mathbf{X}}(\cdot|\boldsymbol{x})$ は単峰形であるので，任意の α $(0<\alpha<1)$ について

$$P\{h_1 \le Y \le h_2\} = 1-\alpha, \tag{3.1}$$

$$f_{Y|\mathbf{X}}(h_1|\boldsymbol{x}) = f_{Y|\mathbf{X}}(h_2|\boldsymbol{x}) \tag{3.2}$$

を同時に満たす h_1，h_2 $(0 \le h_1 < h_2 < \infty)$ をとることができる．この (h_1,h_2) が Y の信頼係数 $1-\alpha$ の HPD 予測区間となる．いま，(3.1) は

$$I_{p_1}(m,k/2) - I_{p_2}(m,k/2) = 1-\alpha \tag{3.3}$$

と表すことができる．ただし，$p_i := S/(h_i^2+S)$ $i=1,2$ とし，$I_p(a,b)$ は (2.5) の不完全ベータ関数比とする．また，(3.2) は

$$\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{k-1} = \left(\frac{h_1^2+S}{h_2^2+S}\right)^{m+(k/2)} \tag{3.4}$$

となり，Y の信頼係数 $1-\alpha$ の HPD 予測区間は (3.3) と (3.4) を同時に満たす h_1，h_2 から

$$[h_1,\ h_2]$$

となる．

次に，事前密度のとり方として，Hartiganの事前密度の他に，Jeffreysの広義の事前密度，すなわち$p_J(\theta) \propto \theta^{-1}$あるいは広義の一様事前密度$p_U(\theta) = c$とした場合についても同様に予測区間を構成することができる．ただし，cは$0 < c < \infty$の定数とする．これらの広義の事前密度を用いた信頼係数$1-\alpha$のHPD予測区間は(3.3)と(3.4)において，mをそれぞれ$m = nk/2$あるいは$m = (nk-2)/2$として得られる区間$[h_1,\ h_2]$となる．

4. 数値的評価

前節までに構成した

(N_b) ベータ分布を用いたnon-Bayesian予測区間

(N_F) F統計量を用いたnon-Bayesian予測区間

(B_H) Hartiganの事前密度を用いたBayesian予測区間

(B_J) Jeffreysの事前密度を用いたBayesian予測区間

(B_U) 一様分布を事前分布としたBayesian予測区間

について，$k = 3, 4, \ldots, 10$；$n = 10(5)30, 50, 100$；$\alpha = 0.05, 0.10$；$\theta = 2, 0.5, 1, 3$の場合に，10000回繰り返しシミュレーションを行い，それぞれの予測区間の被覆確率を得た(表1～6参照)．この表より，non-Bayesianの予測区間(N_b)と(N_F)はBayesian予測区間(B_H)，(B_J)，(B_U)よりも比較的良く，特に$k = 3, 6, 9$の場合にはかなりに良くなっていることが分かる．

参考文献

[A90] Akahira, M. (1990). *Theory of Statistical Prediction.* Lecture Note at the Middle East Technical University, Ankara.

[Ge93] Geisser, S. (1993). *Predictive Inference: An Introduction.* Chapman & Hall, New York.

[Gu70] Guttman, I. (1970). *Statistical Tolerance Regions: Classical and Bayesian.* Griffin, London.

[Ha64] Hartigan, J. (1964). Invariant prior distributions. *Ann. Math. Statist.* **35**, 836–845.

[Hi00] Hida, E. (2000). Prediction intervals for a chi distribution with a scale parameter. *Mathematical Research Note* **No. 2000–003**, Inst. Math., Univ. Tsukuba.

[HH98] Howlader, H. A., Hossain, A. (1998). Bayesian prediction intervals for Maxwell parameters. *Metron* **56**, 97-106.

[Taka96] Takada, Y. (1996). Statistical properties of prediction intervals. *Sugaku Expositions* **9**, 153–168.

[Take75] 竹内 啓 (1975). 統計的予測論. 培風館.

表 1: $\alpha = 0.05$; $\theta = 2$ の場合のシミュレーション (反復 10000 回) による予測区間 (N_b), (N_F), (B_H), (B_J), (B_U) の被覆確率

$n\backslash k$		3	4	5	6	7	9	10
10	(N_b)	0.9505	0.9511	0.9484	0.9512	0.9502	0.9493	0.9497
	(N_F)	0.9511	0.9514	0.9487	0.9509	0.9493	0.9504	0.9495
	(B_H)	0.9408	0.9454	0.9508	0.9464	0.9476	0.9598	0.9536
	(B_J)	0.9502	0.9518	0.9544	0.9456	0.9510	0.9603	0.9544
	(B_U)	0.9530	0.9583	0.9578	0.9432	0.9535	0.9599	0.9564
15	(N_b)	0.9498	0.9503	0.9502	0.9496	0.9497	0.9518	0.9502
	(N_F)	0.9503	0.9504	0.9474	0.9508	0.9515	0.9515	0.9485
	(B_H)	0.9431	0.9456	0.9481	0.9467	0.9489	0.9554	0.9510
	(B_J)	0.9497	0.9501	0.9501	0.9486	0.9512	0.9559	0.9504
	(B_U)	0.9555	0.9535	0.9527	0.9481	0.9515	0.9564	0.9518
20	(N_b)	0.9498	0.9498	0.9500	0.9496	0.9488	0.9497	0.9485
	(N_F)	0.9485	0.9509	0.9497	0.9480	0.9495	0.9494	0.9505
	(B_H)	0.9441	0.9472	0.9486	0.9449	0.9479	0.9515	0.9486
	(B_J)	0.9489	0.9502	0.9501	0.9457	0.9492	0.9521	0.9497
	(B_U)	0.9531	0.9538	0.9524	0.9469	0.9494	0.9531	0.9508
25	(N_b)	0.9504	0.9513	0.9477	0.9490	0.9487	0.9496	0.9495
	(N_F)	0.9501	0.9508	0.9461	0.9489	0.9499	0.9501	0.9485
	(B_H)	0.9470	0.9471	0.9457	0.9472	0.9486	0.9498	0.9484
	(B_J)	0.9504	0.9501	0.9467	0.9485	0.9492	0.9507	0.9492
	(B_U)	0.9530	0.9528	0.9485	0.9489	0.9499	0.9514	0.9501
30	(N_b)	0.9505	0.9495	0.9506	0.9500	0.9507	0.9508	0.9501
	(N_F)	0.9503	0.9504	0.9499	0.9512	0.9501	0.9504	0.9504
	(B_H)	0.9489	0.9474	0.9492	0.9498	0.9494	0.9517	0.9491
	(B_J)	0.9517	0.9497	0.9518	0.9513	0.9510	0.9524	0.9498
	(B_U)	0.9542	0.9519	0.9537	0.9521	0.9515	0.9526	0.9505
50	(N_b)	0.9507	0.9495	0.9498	0.9496	0.9497	0.9498	0.9510
	(N_F)	0.9487	0.9490	0.9500	0.9489	0.9497	0.9480	0.9512
	(B_H)	0.9484	0.9472	0.9478	0.9485	0.9482	0.9476	0.9511
	(B_J)	0.9503	0.9487	0.9488	0.9492	0.9491	0.9485	0.9512
	(B_U)	0.9524	0.9496	0.9500	0.9498	0.9495	0.9491	0.9512
100	(N_b)	0.9503	0.9506	0.9499	0.9505	0.9490	0.9499	0.9496
	(N_F)	0.9484	0.9499	0.9507	0.9490	0.9505	0.9502	0.9501
	(B_H)	0.9481	0.9502	0.9511	0.9495	0.9499	0.9497	0.9506
	(B_J)	0.9489	0.9511	0.9515	0.9498	0.9503	0.9500	0.9511
	(B_U)	0.9495	0.9515	0.9520	0.9502	0.9506	0.9502	0.9511

表 2: $\alpha = 0.10$; $\theta = 2$ の場合のシミュレーション (反復 10000 回) による予測区間 (N_b)，(N_F)，(B_H)，(B_J)，(B_U) の被覆確率

$n\backslash k$		3	4	5	6	7	9	10
10	(N_b)	0.8984	0.9008	0.8996	0.8986	0.8999	0.9005	0.8995
	(N_F)	0.8991	0.9021	0.9003	0.8983	0.9003	0.9012	0.9004
	(B_H)	0.8828	0.8966	0.9018	0.8975	0.9012	0.8920	0.9055
	(B_J)	0.8976	0.9044	0.9072	0.9020	0.9017	0.8968	0.9064
	(B_U)	0.9108	0.9122	0.9118	0.9063	0.9030	0.9009	0.9082
15	(N_b)	0.8989	0.9007	0.9026	0.9008	0.8977	0.9009	0.9006
	(N_F)	0.9012	0.9007	0.9023	0.9009	0.8983	0.9012	0.9010
	(B_H)	0.8904	0.8955	0.8978	0.8984	0.8983	0.8988	0.9032
	(B_J)	0.8997	0.9017	0.9019	0.9016	0.8989	0.9009	0.9045
	(B_U)	0.9086	0.9064	0.9062	0.9055	0.9006	0.9037	0.9062
20	(N_b)	0.9009	0.9001	0.9001	0.8997	0.9013	0.9006	0.9016
	(N_F)	0.9033	0.9000	0.8990	0.8972	0.8998	0.8989	0.9006
	(B_H)	0.8933	0.8957	0.8963	0.8948	0.9005	0.8935	0.9020
	(B_J)	0.8997	0.8998	0.8996	0.8984	0.9013	0.8961	0.9038
	(B_U)	0.9058	0.9043	0.9035	0.9013	0.9027	0.8979	0.9062
25	(N_b)	0.9016	0.9009	0.9005	0.8997	0.9000	0.8999	0.9006
	(N_F)	0.9023	0.9001	0.9007	0.8988	0.9003	0.9017	0.8988
	(B_H)	0.8973	0.8970	0.8975	0.8972	0.8977	0.8948	0.8980
	(B_J)	0.9022	0.9010	0.9013	0.9000	0.8991	0.8955	0.8994
	(B_U)	0.9073	0.9050	0.9042	0.9025	0.8920	0.8981	0.8999
30	(N_b)	0.9047	0.8993	0.8987	0.8989	0.8999	0.9012	0.8999
	(N_F)	0.9011	0.8996	0.8994	0.8998	0.9002	0.9024	0.9005
	(B_H)	0.8999	0.8970	0.8979	0.8989	0.8980	0.8935	0.9005
	(B_J)	0.9044	0.8997	0.9010	0.9011	0.8990	0.8948	0.9014
	(B_U)	0.9082	0.9029	0.9031	0.9032	0.9005	0.8946	0.9021
50	(N_b)	0.9019	0.9012	0.9008	0.8975	0.8983	0.8998	0.8995
	(N_F)	0.8998	0.8989	0.9000	0.9002	0.8978	0.9003	0.9012
	(B_H)	0.8982	0.8979	0.8981	0.8975	0.8969	0.8899	0.8998
	(B_J)	0.9008	0.8996	0.8997	0.8984	0.8982	0.8892	0.9000
	(B_U)	0.9032	0.9013	0.9015	0.8993	0.8993	0.8886	0.9011
100	(N_b)	0.8992	0.9009	0.8997	0.8998	0.9000	0.8999	0.9005
	(N_F)	0.8986	0.9018	0.8967	0.9000	0.9002	0.9018	0.9010
	(B_H)	0.8976	0.8999	0.8960	0.8993	0.9006	0.8882	0.8995
	(B_J)	0.8994	0.9009	0.8968	0.8998	0.9013	0.8875	0.8999
	(B_U)	0.9000	0.9014	0.8979	0.9001	0.9014	0.8852	0.9006

表 3: $\alpha = 0.05$; $\theta = 0.5$ の場合のシミュレーション (反復 10000 回) による予測区間 (N_b), (N_F), (B_H), (B_J), (B_U) の被覆確率

$n\backslash k$		3	4	5	6	7	9	10
10	(N_b)	0.9505	0.9506	0.9483	0.9492	0.9509	0.9492	0.9500
	(N_F)	0.9492	0.9507	0.9495	0.9501	0.9509	0.9493	0.9507
	(B_H)	0.9453	0.9432	0.9532	0.9529	0.9487	0.9491	0.9525
	(B_J)	0.9519	0.9502	0.9548	0.9538	0.9520	0.9506	0.9534
	(B_U)	0.9589	0.9555	0.9588	0.9542	0.9548	0.9523	0.9551
15	(N_b)	0.9501	0.9501	0.9487	0.9506	0.9498	0.9496	0.9499
	(N_F)	0.9476	0.9488	0.9501	0.9514	0.9487	0.9487	0.9503
	(B_H)	0.9429	0.9438	0.9496	0.9518	0.9481	0.9466	0.9499
	(B_J)	0.9480	0.9498	0.9524	0.9530	0.9508	0.9485	0.9505
	(B_U)	0.9539	0.9535	0.9550	0.9541	0.9523	0.9495	0.9516
20	(N_b)	0.9496	0.9491	0.9500	0.9497	0.9500	0.9511	0.9510
	(N_F)	0.9486	0.9484	0.9507	0.9486	0.9495	0.9482	0.9489
	(B_H)	0.9435	0.9448	0.9484	0.9485	0.9465	0.9469	0.9497
	(B_J)	0.9491	0.9477	0.9511	0.9492	0.9476	0.9480	0.9500
	(B_U)	0.9533	0.9508	0.9525	0.9512	0.9498	0.9488	0.9511
25	(N_b)	0.9504	0.9492	0.9498	0.9492	0.9495	0.9495	0.9503
	(N_F)	0.9506	0.9492	0.9501	0.9500	0.9496	0.9498	0.9501
	(B_H)	0.9449	0.9463	0.9488	0.9484	0.9466	0.9463	0.9502
	(B_J)	0.9490	0.9493	0.9498	0.9501	0.9475	0.9467	0.9505
	(B_U)	0.9532	0.9516	0.9519	0.9514	0.9496	0.9474	0.9512
30	(N_b)	0.9497	0.9495	0.9500	0.9497	0.9490	0.9495	0.9515
	(N_F)	0.9485	0.9491	0.9500	0.9499	0.9506	0.9491	0.9510
	(B_H)	0.9452	0.9451	0.9486	0.9489	0.9480	0.9463	0.9503
	(B_J)	0.9489	0.9472	0.9504	0.9499	0.9487	0.9477	0.9518
	(B_U)	0.9518	0.9494	0.9523	0.9517	0.9506	0.9478	0.9523
50	(N_b)	0.9512	0.9495	0.9501	0.9495	0.9494	0.9487	0.9487
	(N_F)	0.9504	0.9499	0.9503	0.9502	0.9492	0.9476	0.9488
	(B_H)	0.9488	0.9472	0.9503	0.9491	0.9496	0.9463	0.9478
	(B_J)	0.9502	0.9488	0.9510	0.9503	0.9502	0.9468	0.9485
	(B_U)	0.9520	0.9507	0.9523	0.9511	0.9505	0.9469	0.9490
100	(N_b)	0.9502	0.9508	0.9507	0.9502	0.9497	0.9502	0.9492
	(N_F)	0.9494	0.9511	0.9490	0.9507	0.9504	0.9491	0.9492
	(B_H)	0.9467	0.9512	0.9485	0.9504	0.9495	0.9484	0.9487
	(B_J)	0.9476	0.9518	0.9488	0.9509	0.9499	0.9484	0.9490
	(B_U)	0.9489	0.9523	0.9494	0.9513	0.9504	0.9485	0.9491

表 4: $\alpha = 0.10$; $\theta = 0.5$ の場合のシミュレーション (反復 10000 回) による予測区間 (N_b), (N_F), (B_H), (B_J), (B_U) の被覆確率

$n\backslash k$		3	4	5	6	7	9	10
10	(N_b)	0.8997	0.8971	0.8986	0.9011	0.8999	0.9019	0.8974
	(N_F)	0.8993	0.8984	0.8983	0.9015	0.8994	0.8998	0.8990
	(B_H)	0.8648	0.8869	0.8985	0.9010	0.9005	0.9179	0.8860
	(B_J)	0.8878	0.8972	0.8957	0.9044	0.9033	0.9082	0.8916
	(B_U)	0.9053	0.9071	0.9107	0.9153	0.9056	0.9085	0.9012
15	(N_b)	0.9024	0.9016	0.8992	0.9021	0.9014	0.8979	0.8988
	(N_F)	0.9021	0.9012	0.8992	0.8997	0.9025	0.8977	0.8999
	(B_H)	0.8816	0.8953	0.8955	0.8976	0.8988	0.9098	0.8864
	(B_J)	0.8952	0.9019	0.8999	0.9016	0.9021	0.9014	0.8916
	(B_U)	0.9065	0.9079	0.9047	0.9088	0.9055	0.9023	0.9038
20	(N_b)	0.8988	0.9014	0.8990	0.9009	0.8993	0.8994	0.8997
	(N_F)	0.8997	0.9015	0.8986	0.9012	0.8992	0.9004	0.8997
	(B_H)	0.8883	0.8959	0.8934	0.9009	0.8958	0.9070	0.8893
	(B_J)	0.8967	0.9007	0.8964	0.9029	0.8983	0.8999	0.8897
	(B_U)	0.9039	0.9053	0.9006	0.9082	0.9021	0.9014	0.9058
25	(N_b)	0.9002	0.9027	0.8958	0.9021	0.9025	0.9039	0.9001
	(N_F)	0.9004	0.9024	0.8950	0.8995	0.8994	0.9025	0.8981
	(B_H)	0.8913	0.8985	0.8921	0.8986	0.8962	0.9073	0.8896
	(B_J)	0.8978	0.9017	0.8952	0.9008	0.8973	0.9026	0.8893
	(B_U)	0.9035	0.9055	0.8988	0.9046	0.9016	0.9034	0.9046
30	(N_b)	0.8979	0.8997	0.9001	0.8985	0.8963	0.9018	0.9010
	(N_F)	0.8986	0.9024	0.9009	0.8982	0.8955	0.9010	0.9006
	(B_H)	0.8915	0.8978	0.8978	0.8967	0.8925	0.9043	0.8928
	(B_J)	0.8968	0.9012	0.8996	0.8990	0.8940	0.9019	0.8919
	(B_U)	0.9011	0.9038	0.9015	0.9023	0.8980	0.9031	0.9083
50	(N_b)	0.9001	0.8981	0.8992	0.8998	0.8967	0.9017	0.9021
	(N_F)	0.9014	0.9000	0.8996	0.8991	0.8971	0.9005	0.9006
	(B_H)	0.8966	0.8971	0.8983	0.8983	0.8955	0.9019	0.8931
	(B_J)	0.8995	0.8986	0.8999	0.8995	0.8966	0.9007	0.8936
	(B_U)	0.9020	0.9003	0.9009	0.9011	0.8984	0.9019	0.9092
100	(N_b)	0.8999	0.9003	0.8972	0.8997	0.8986	0.8975	0.9016
	(N_F)	0.8989	0.8994	0.8982	0.8990	0.8992	0.8963	0.9011
	(B_H)	0.8987	0.8980	0.8957	0.8976	0.8989	0.8953	0.8965
	(B_J)	0.8998	0.8990	0.8967	0.8983	0.8996	0.8958	0.8977
	(B_U)	0.9009	0.8999	0.8975	0.8990	0.9004	0.8963	0.9038

表 5: $\alpha = 0.05$; $\theta = 1$ の場合のシミュレーション (反復 10000 回) による予測区間 (N_b), (N_F), (B_H), (B_J), (B_U) の被覆確率

$n \backslash k$		3	4	5	6	7	9	10
10	(N_b)	0.9505	0.9509	0.9496	0.9501	0.9506	0.9493	0.9487
	(N_F)	0.9515	0.9503	0.9501	0.9483	0.9491	0.9483	0.9485
	(B_H)	0.9398	0.9443	0.9450	0.9414	0.9494	0.9497	0.9504
	(B_J)	0.9504	0.9511	0.9505	0.9470	0.9473	0.9513	0.9522
	(B_U)	0.9583	0.9564	0.9552	0.9511	0.9508	0.9531	0.9535
15	(N_b)	0.9498	0.9500	0.9512	0.9499	0.9501	0.9505	0.9499
	(N_F)	0.9496	0.9495	0.9496	0.9498	0.9511	0.9495	0.9484
	(B_H)	0.9427	0.9439	0.9458	0.9424	0.9479	0.9489	0.9476
	(B_J)	0.9497	0.9497	0.9499	0.9462	0.9467	0.9504	0.9483
	(B_U)	0.9557	0.9543	0.9512	0.9499	0.9487	0.9517	0.9496
20	(N_b)	0.9501	0.9505	0.9494	0.9498	0.9502	0.9474	0.9483
	(N_F)	0.9497	0.9500	0.9506	0.9489	0.9500	0.9492	0.9498
	(B_H)	0.9449	0.9469	0.9471	0.9443	0.9484	0.9458	0.9482
	(B_J)	0.9498	0.9499	0.9501	0.9465	0.9473	0.9474	0.9493
	(B_U)	0.9536	0.9528	0.9528	0.9478	0.9479	0.9478	0.9485
25	(N_b)	0.9500	0.9510	0.9487	0.9497	0.9514	0.9502	0.9487
	(N_F)	0.9493	0.9503	0.9489	0.9495	0.9510	0.9496	0.9488
	(B_H)	0.9455	0.9477	0.9470	0.9436	0.9513	0.9477	0.9470
	(B_J)	0.9493	0.9503	0.9492	0.9466	0.9476	0.9484	0.9481
	(B_U)	0.9527	0.9528	0.9516	0.9487	0.9482	0.9496	0.9488
30	(N_b)	0.9506	0.9496	0.9501	0.9512	0.9504	0.9480	0.9513
	(N_F)	0.9476	0.9496	0.9499	0.9510	0.9511	0.9486	0.9507
	(B_H)	0.9450	0.9473	0.9488	0.9469	0.9489	0.9457	0.9487
	(B_J)	0.9478	0.9495	0.9503	0.9488	0.9466	0.9465	0.9508
	(B_U)	0.9504	0.9519	0.9517	0.9505	0.9475	0.9468	0.9491
50	(N_b)	0.9489	0.9499	0.9505	0.9494	0.9502	0.9500	0.9501
	(N_F)	0.9494	0.9505	0.9494	0.9498	0.9505	0.9497	0.9510
	(B_H)	0.9473	0.9501	0.9483	0.9487	0.9493	0.9481	0.9492
	(B_J)	0.9491	0.9512	0.9492	0.9496	0.9462	0.9488	0.9501
	(B_U)	0.9510	0.9526	0.9503	0.9507	0.9461	0.9494	0.9506
100	(N_b)	0.9496	0.9508	0.9504	0.9514	0.9496	0.9508	0.9503
	(N_F)	0.9499	0.9485	0.9489	0.9509	0.9497	0.9491	0.9505
	(B_H)	0.9494	0.9491	0.9489	0.9515	0.9492	0.9500	0.9508
	(B_J)	0.9503	0.9499	0.9493	0.9520	0.9487	0.9504	0.9511
	(B_U)	0.9508	0.9505	0.9499	0.9525	0.9484	0.9505	0.9512

表 6: $\alpha = 0.05$; $\theta = 3$ の場合のシミュレーション (反復 10000 回) による予測区間 (N_b), (N_F), (B_H), (B_J), (B_U) の被覆確率

$n\backslash k$		3	4	5	6	7	9	10
10	(N_b)	0.9518	0.9500	0.9505	0.9502	0.9495	0.9494	0.9494
	(N_F)	0.9504	0.9505	0.9492	0.9512	0.9498	0.9499	0.9491
	(B_H)	0.9433	0.9439	0.9522	0.9417	0.9501	0.9450	0.920
	(B_J)	0.9525	0.9518	0.9547	0.9418	0.9541	0.9474	0.9453
	(B_U)	0.9608	0.9581	0.9585	0.9429	0.9555	0.9501	0.9483
15	(N_b)	0.9508	0.9488	0.9492	0.9498	0.9507	0.9492	0.9506
	(N_F)	0.9489	0.9486	0.9506	0.9499	0.9488	0.9495	0.9487
	(B_H)	0.9444	0.9436	0.9483	0.9429	0.9489	0.9472	0.9440
	(B_J)	0.9503	0.9479	0.9505	0.9433	0.9519	0.9485	0.9457
	(B_U)	0.9557	0.9516	0.9542	0.9422	0.9529	0.9496	0.9479
20	(N_b)	0.9513	0.9493	0.9484	0.9503	0.9487	0.9500	0.9490
	(N_F)	0.9507	0.9502	0.9485	0.9487	0.9494	0.9487	0.9478
	(B_H)	0.9463	0.9471	0.9468	0.9440	0.9479	0.9429	0.9432
	(B_J)	0.9512	0.9505	0.9485	0.9447	0.9496	0.9444	0.9441
	(B_U)	0.9559	0.9537	0.9510	0.9448	0.9512	0.9467	0.9469
25	(N_b)	0.9504	0.9485	0.9509	0.9499	0.9491	0.9507	0.9505
	(N_F)	0.9507	0.9485	0.9490	0.9510	0.9509	0.9504	0.9499
	(B_H)	0.9476	0.9464	0.9477	0.9462	0.9470	0.9424	0.9453
	(B_J)	0.9514	0.9491	0.9499	0.9469	0.9515	0.9442	0.9472
	(B_U)	0.9542	0.9512	0.9514	0.9484	0.9532	0.9459	0.9479
30	(N_b)	0.9500	0.9502	0.9496	0.9505	0.9505	0.9493	0.9494
	(N_F)	0.9495	0.9482	0.9500	0.9507	0.9500	0.9507	0.9507
	(B_H)	0.9472	0.9471	0.9482	0.9485	0.9494	0.9405	0.9451
	(B_J)	0.9501	0.9494	0.9501	0.9492	0.9507	0.9420	0.9470
	(B_U)	0.9534	0.9515	0.9514	0.9496	0.9514	0.9437	0.9487
50	(N_b)	0.9503	0.9509	0.9515	0.9501	0.9501	0.9508	0.9497
	(N_F)	0.9496	0.9507	0.9508	0.9514	0.9492	0.9478	0.9488
	(B_H)	0.9476	0.9497	0.9515	0.9502	0.9489	0.9445	0.9485
	(B_J)	0.9493	0.9507	0.9530	0.9508	0.9497	0.9430	0.9486
	(B_U)	0.9510	0.9521	0.9536	0.9515	0.9501	0.9459	0.9493
100	(N_b)	0.9504	0.9504	0.9498	0.9485	0.9496	0.9499	0.9501
	(N_F)	0.9512	0.9505	0.9493	0.9503	0.9496	0.9491	0.9504
	(B_H)	0.9493	0.9488	0.9478	0.9493	0.9492	0.9442	0.9504
	(B_J)	0.9499	0.9495	0.9484	0.9499	0.9496	0.9447	0.9505
	(B_U)	0.9509	0.9503	0.9488	0.9502	0.9505	0.9450	0.9509