

Nonlinear Fefferman-Phong の不等式と Ginzburg-Landau System への 応用

堀畑和弘 (東北大学・大学院理学研究科)

1999 年 7 月 23 日

1 Ginzburg-Landau System

d を自然数とし、 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を境界が滑らかな有界領域とする。

$$\begin{aligned}
& u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \\
& \cup \\
& x \rightarrow (u_0^1(x), u_0^2(x), \dots, u_0^d(x)), \\
& |u_0| = 1 \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \\
& u_0, \nabla u_0 \in L^2
\end{aligned}$$

なる写像 u_0 を任意の一つ与える。また $\lambda > 0$ とする。

Definition 1 $u_\lambda = (u_\lambda^1, u_\lambda^2, \dots, u_\lambda^d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ が (λ をパラメーターとする) GL であるとは u_λ が 次の方程式系の解である事を言う。即ち、

$$-\Delta u + \lambda(|u|^2 - 1)u = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

$$u = u_0 \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{2}$$

但し、上の文章中で解とは、 u_λ が $W^{1,2}$ に属しかつ(1) を超関数の意味で (2) を広義の境界値の意味で、それぞれ満たすとする。

Remark 1 ([p. xvii, 1] or [4]) (1) は Ginzburg-Landau System と呼ばれる。また $d = 2$ の時、 $|u_\lambda|$ は第 II 種超伝導体中の磁束線の超伝導の度合を表わす。即ち

$$|u_\lambda| = \begin{cases} 0 & \text{正常 (非超伝導) 状態,} \\ 1 & \text{超伝導状態} \end{cases}$$

となる。従って超伝導状態の中の正常な状態 i.e. $|u_\lambda| = 0$ となる点がどの位あるのかは興味深い問題である。

Remark 2 (Bochner Inequality)

$$e_\lambda(u_\lambda) := \frac{1}{2} \left(|\nabla u_\lambda|^2 + \frac{\lambda}{2} (|u_\lambda|^2 - 1)^2 \right) \quad (3)$$

とおくと、 e_λ は以下の微分不等式を満たす事が分かる。

$$-\Delta e_\lambda \leq {}^3C e_\lambda^2. \quad (4)$$

以後 C は正の generic な定数とする。(3) で定義された e_λ は Ginzburg-Landau energy density と呼ばれる。

Remark 3 (変分問題との関連) (1) は以下の汎関数 I_λ の Euler-Lagrange 方程式である。即ち $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ に対し、 I_λ を

$$I_\lambda(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{2} (|u|^2 - 1)^2 \right) dx$$

で与える時、 u_λ は以下を満たす。任意の $\phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$ に対し、

$$\begin{aligned} & \left. \frac{dI_\lambda}{d\epsilon}(u_\lambda + \epsilon\phi) \right|_{\epsilon=0} \\ &= \sum_{i=1}^d \int_\Omega (-\Delta u^i + \lambda(|u|^2 - 1)u^i) \cdot \phi^i dx = 0. \end{aligned}$$

さて $A_{u_0} = \{u \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^d), ; u = u_0 \text{ on } \partial\Omega\}$ とおき、

$$I_\lambda(u_\lambda) = \inf_{A_{u_0}} I_\lambda(u)$$

となる写像 $u_\lambda \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ (しばしば minimizer と呼ばれる) を見付けると、この u_λ は広義の境界値の意味で境界上 $u_\lambda = u_0$ であり (1) を満たすことが分る。したがって minimizer u_λ は GL である。更に u_λ が以下を満たす事は容易に示される。

$$u_\lambda \in C^\infty(\Omega), \quad \text{ただし定数は } \lambda \text{ に依存する.} \quad (5)$$

$$|u_\lambda| \leq |u_0| = 1 \quad \text{in } \Omega, \quad (6)$$

$${}^vC_r(x_0) \subset {}^vC_R(x_0) \subset\subset \Omega \text{ に対して}$$

$$\frac{1}{r^{d-2}} \int_{C_r(x_0)} e_\lambda(u_\lambda) dx \leq \frac{1}{R^{d-2}} \int_{C_R(x_0)} e_\lambda(u_\lambda) dx. \quad (7)$$

但し $C_r(x_0)$ は中心が x_0 、一辺の長さが r の cube であるとする。

$$I_\lambda(u_\lambda) \leq I_\lambda(u_0) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u_0|^2 + \frac{\lambda}{2} (|u_0|^2 - 1)^2 \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx. \quad (8)$$

λ の適当な部分列 $\lambda(\nu)$ が存在して,

$$u_{\lambda(\nu)} \rightarrow \exists u_{\infty} \in W^{1,2}, \quad |u_{\lambda(\nu)}| \rightarrow 1 \quad \text{a.e.} \quad (9)$$

u_{∞} は $\Delta u_{\infty} + |\nabla u_{\infty}|^2 u_{\infty} = 0$ を超関数の意味で満たす。

2 Nonlinear Fefferman-Phong's Inequality(NFPI)

Theorem 1 (Fefferman-Phong の不等式) Q_0 を d -次元 ユークリッド空間の cube とする。 $f \in \dot{H}^{1,2}(Q_0)$, $g \in L^1(Q_0)$ であって 更に g は 以下を満たすとす:

$$\exists C_1 > 0 \quad \text{s.t.} \quad \int_Q |g| dx \leq C_1 (\text{diam } Q)^{d-2} \quad (\forall \text{cube } Q \subset\subset Q_0), \quad (10)$$

$$\exists C_2 > 0, \quad 0 < \exists \alpha \quad \text{s.t.} \quad \frac{1}{|E|^\alpha} \int_E |g| dx \leq \frac{C_2}{|Q|^\alpha} \int_Q |g| dx \quad (11)$$

for \forall measurable set $E \subset \forall \text{cube } Q \subset\subset Q_0$.

この条件のもとで 以下の不等式が成立する。

$$\exists C = C(C_1, C_2) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \int_{Q_0} |f|^2 g dx \leq C \int_{Q_0} |\nabla f|^2 dx. \quad (12)$$

Remark 4 g が Reverse Hölder inequality を満たす: $\exists \delta > 0 \quad \text{s.t.}$

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q g^{1+\delta} dx \right)^{1/(1+\delta)} \leq \frac{\exists C}{|Q|} \int_Q g dx \quad (13)$$

$\implies g$ は (11) を満たす。

Remark 5 “方程式の regularity の研究”において、(7) 及び (13) (正確には この不等式と少し違った形のものが用いられる。)は非常に重要な役割を果たして来た。と言うより誤解を恐れずに言えば、今までの regularity の研究は、これらの不等式が成り立つ様な超関数解に対する regularity を 主な研究対象として来たと言っても良いかも知れない。ここで方程式の regularity の研究とは、いわゆる弱解 (超関数解) が古典解になるかどうかについての 研究の事を言う。

筆者は、Ginzburg-Landau energy density e_λ に対し 以下の不等式が成立することに着目した。

Theorem 2 (Nonlinear Fefferman-Phong の不等式) e_λ を Ginzburg-Landau energy density とする。 $1 < p < 2$, $\kappa > 0$ を 任意に与え固定する。

$e_\lambda^{(\kappa)} := \max\{e_\lambda - \kappa, 0\}$ と置く。

全ての cube $C_R(x_0) \subset\subset \Omega$ に対して

$$\begin{aligned} & \int_{C_R(x_0)} \left((e_\lambda^{(\kappa)})^{p/2} \right)^{2+2/p} dx \\ & \leq \frac{C}{R^{d-2}} \int_{C_R(x_0)} e_\lambda dx \cdot \left(\int_{C_R(x_0)} |\nabla (e_\lambda^{(\kappa)})^{p/2}|^2 dx \right). \end{aligned} \quad (14)$$

但し、 C は正の generic な定数であるとする。また 簡単の為に $e_\lambda^{(\kappa)}|_{\partial C_R} = 0$ とする。
この事は 以後全ての計算において仮定される。

(14) の読み方.

$A \sim B$ は、 A と B が R に関し同じオーダーを持つことを表わす事にする。

$$\begin{aligned} & \int_{C_R(x_0)} \left((e_\lambda^{(\kappa)})^{p/2} \right)^2 \left((e_\lambda^{(\kappa)})^{p/2} \right)^{2/p} dx \\ & \quad \left(e_\lambda \sim \frac{1}{R^d} \int_{C_R(x_0)} e_\lambda dx \quad (R > 0 \text{ 十分小と思う}) \right) \\ & \sim \int_{C_R(x_0)} \left((e_\lambda^{(\kappa)})^{p/2} \right)^2 dx \cdot \frac{1}{R^d} \int_{C_R(x_0)} e_\lambda dx \\ & \leq C \int_{C_R(x_0)} |\nabla (e_\lambda^{(\kappa)})^{p/2}|^2 dx \cdot \frac{1}{R^{d-2}} \int_{C_R(x_0)} e_\lambda dx \quad (\because \text{Poincaré の不等式}). \end{aligned}$$

ここで

$$f := (e_\lambda^{(\kappa)})^{p/2}, \quad g := e_\lambda$$

と見ると Fefferman-Phong の不等式の形をしている。

Remark 6 Theorem 2 の証明は、energy density の単調性と呼ばれる不等式 (7) が成立することと、上の読み方の所で現れた f と g との level set がある意味で compatible になっている事が鍵である。ここで (7) は Theorem 1 の Fefferman-Phong の不等式が成立する為の g ($:= e_\lambda$) の条件 (10) 及び (11) と類似しているが、(7) はその式の左辺が cube でしか成立していない事に対し (11) の左辺は全ての可測集合上で成り立つ事を要求している事に注意されたい。この違いが実際どれほどのものであるのかは、筆者には今の所分からない。

3 Main Results

Theorem 3 (Uniform boundedness of e_λ w.r.t λ) ある正の数 ϵ_0 が存在して、全ての $C_R \subset\subset \Omega$ に対して

$$\frac{1}{R^{d-2}} \int_{C_R} e_\lambda dx < \epsilon_0 \quad \Longrightarrow \quad \text{ess} \cdot \sup_{C_R} e_\lambda \leq \frac{C}{R^2}.$$

Theorem 4

$$\mathbf{Reg} := \bigcup_{R>0} \bigcup_{\lambda_0=1}^\infty \bigcap_{\lambda=\lambda_0}^\infty \left\{ x_0 \in \Omega; \frac{1}{R^{d-2}} \int_{C_R} e_\lambda dx < \epsilon_0, \quad C_R(x_0) \subset\subset \Omega \right\}$$

\Longrightarrow \mathbf{Reg} は Ω の 相対閉集合であり、

$$\mathcal{H}^{d-2}(\Omega \setminus \mathbf{Reg}) < +\infty.$$

Corollary 1 $x_0 \in \mathbf{Reg}$ ならば、ある $R_0 = R_0(x_0) > 0$ と $\lambda_0 = \lambda_0(x_0) > 0$ が存在して、全ての $\lambda > \lambda_0$ に対して

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R^{d-2}} \int_{C_R} e_\lambda dx < \epsilon_0 \\ \Longrightarrow & \text{ess} \cdot \sup_{C_R} \left(\frac{1}{2} |\nabla u_\lambda|^2 + \frac{\lambda}{4} (|u_\lambda|^2 - 1)^2 \right) \leq \frac{C}{R^2} \\ \Longrightarrow & 1 - \sqrt{\frac{C}{\lambda R_0^2}} \leq |u_\lambda|^2 \quad \text{on } \forall x \in C_{R_0}(x_0). \end{aligned}$$

即ち、 λ を十分大きくすれば、 $|u_\lambda| \doteq 1$.

Theorem 3,4 及び Corollary 1 より次が言える。

Theorem 5 (Main) *Ginzburg-Landau energy density* e_λ は $(d-2)$ -ハウスドルフ次元を持つ相対閉集合を除いて、 λ に関し一様有界であり、 λ が十分大きければ $|u_\lambda|$ はゼロにはならない。 $d=2$ の時を考えれば非超電導状態でない。

Proof of theorem 3

e_λ が DeGiorgi class に属する事を示す。即ち 任意の $\kappa > 0$ に対して

$$\int_{A_R^{(\kappa)}(x_0)} |\nabla(e_\lambda^{(\kappa)})^{p/2}|^2 dx \leq C\kappa^{p+1}|A_R^{(\kappa)}(x_0)| \quad (15)$$

が成り立つ事を示せば良い。ここで $A_R^{(\kappa)}(x_0) := \{x \in C_R(x_0); e_\lambda > \kappa\}$ である。もし上の式 (15) が示されれば、Ladyzenskaya-Ural'ceva の定理に依って、 $e_\lambda \leq C/R^2$ が言える。以下、これを認めて e_λ が (15) を満たす事を示そう。

\therefore) まず、Bochner inequality を思い出そう。

$$-\Delta e_\lambda \leq C e_\lambda^2.$$

その両辺に $(e_\lambda^{(\kappa)})^{p-1}$ を掛け合わせ、それを C_R 上積分して以下が得られる。

$$-\int_{C_R} \Delta e_\lambda (e_\lambda^{(\kappa)})^{p-1} dx \leq C \int_{C_R} e_\lambda^2 (e_\lambda^{(\kappa)})^{p-1} dx.$$

上式の左辺を部分積分して、 $e_\lambda^{(\kappa)}$ の定義を思い出す事で

$$\begin{aligned} & \int_{C_R(=A_R^{(\kappa)})} |\nabla(e_\lambda^{(\kappa)})^{p/2}|^2 dx \\ & \leq C \int_{C_R} (e_\lambda^{(\kappa)})^{p+1} dx + C\kappa^2 \int_{C_R} (e_\lambda^{(\kappa)})^{p-1} dx \\ & \leq C\kappa^{p+1}|A_R^{(\kappa)}| + C \int_{C_R} (e_\lambda^{(\kappa)})^{p/2 \cdot 2/p(p+1)} dx \\ & \quad \parallel \\ & \quad C \int_{C_R} \left((e_\lambda^{(\kappa)})^{p/2} \right)^{2+2/p} dx \\ & \quad \perp \wedge \\ & \quad (\text{NFPI に依って}) \frac{C}{R^{d-2}} \int_{C_R} e_\lambda dx \cdot \int_{C_R} |\nabla(e_\lambda^{(\kappa)})^{p/2}|^2 dx. \end{aligned}$$

ここで定理の仮定より $\frac{C}{R^{d-2}} \int_{C_R} e_\lambda dx \leq C\epsilon_0$ でありこの $C\epsilon_0$ を $1/2$ より小になるように ϵ_0 を取れば求める式が得られる。

References

- [1] F.Bethuel, H.Brezis and F.Hélein, Ginzburg-Landau vortices, *Progr. Nonlin. Diff. Eq. Appl.*, **13** (1994), Birkhäuser.
- [2] J.García.Cuerva and J.L.Rubio De Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, (1985), North-Holland.
- [3] C.Fefferman and D.H.Phong, Lower bound for Schrödinger equations, *Conference on Partial Differential Equations (Saint Jean de Monts)*, (1982).
- [4] K.Horihata, The evolution of harmonic maps, *Tohoku Math. Publ.*, (1999).
- [5] O.A.Ladyzhenskaya and N.N.Ural'ceva, *Linear and quasi linear Elliptic Equations*, (1968), Academic Press.
- [6] 恒藤敏彦、超流動・超電導、岩波講座・現代の物理学 **17** (1993), 岩波書店.