数理解析研究所講究録
1162 巻 2000 年 43-52



# LAGUERRE 展開の調和解析—移植定理をめぐって—

金沢大学工学部　勘甚裕一 ( Yuichi Kanjin )

ラゲール多項式の作る直交関数系に関する調和解析，とくに移植定理とその応用としてのマルチプライヤー定理を述べる．まず，扱う対象をきっちり述べるために少し記号を用意する．指数 $\alpha > -1$ を持つ次数 $n$ のラゲール多項式 $L_n^\alpha(x)$ は

$$\begin{aligned} L_n^\alpha(x) &= \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x}x^{n+\alpha}) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k}\frac{(-x)^k}{k!} \end{aligned}$$

で与えられる．これは，次の直交関係式を満たす：

$$\int_0^\infty L_m^\alpha(x)L_n^\alpha(x)\,dx = \delta_{mn}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}.$$

これより，

$$\mathcal{L}_n^\alpha(x) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}}L_n^\alpha(x)e^{-x/2}x^{\alpha/2}$$

と置くと，関数系 $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}_{n=0}^\infty$ は $L^2((0,\infty),dx)$ で完備な正規直交系となる．完備性の証明には [Szegö, 5.7] を参照．この直交系に関して，区間 $(0,\infty)$ 上の関数 $f(x)$ を

$$(1) \qquad f(x) \sim \sum_{n=0}^\infty a_n^\alpha(f)\mathcal{L}_n^\alpha(x), \qquad a_n^\alpha(f) = \int_0^\infty f(x)\mathcal{L}_n^\alpha(x)\,dx$$

と展開する．

**注意**　Hölder の不等式から

$$|a_n^\alpha(f)| \le \|f\|_p\|\mathcal{L}_n^\alpha\|_{p'}, \quad 1/p+1/p'=1$$

であり，また

$$\|\mathcal{L}_n^\alpha\|_{p'} < \infty \quad \text{if} \quad \begin{cases} \alpha \ge 0,\ 1 \le p \le \infty, \\ \text{or} \\ -1 < \alpha < 0,\ (1+\alpha/2)^{-1} < p \le \infty, \end{cases}$$

なので，係数 $a_n^\alpha(f)$ は $\alpha \geq 0, 1 \leq p \leq \infty$ または $-1 < \alpha < 0, (1+\alpha/2)^{-1} < p \leq \infty$ であるとき有限値として確定する．ここで，$\|f\|_p$ は普通の $L^p$ ノルム:$\|f\|_p = (\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx)^{1/p}$.

上のラゲール展開に対して，フーリエ級数で行われている議論を指針にして，いくつかの定理を考えてみるのが本稿の目的である．

まず，ハイゼンベルグ群の解析から Długosz によって得られたマルチンキーヴィッツ型のマルチプライヤー定理から話を始めたい．有界な数列 $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ と $\alpha$ 次のラゲール展開(1) に対して，マルチプライヤー $\lambda$ を持つ，マルチプライヤー作用素 $M_\lambda^\alpha$ を

$$M_\lambda^\alpha f(x) \sim \sum_{n=0}^\infty \lambda_n a_n^\alpha(f)\mathcal{L}_n^\alpha(x)$$

で形式的に定義する．この作用素 $M_\lambda^\alpha$ が $L^p(0,\infty)$ 有界，即ち

$$\int_0^\infty |M_\lambda^\alpha f(x)|^p\,dx \leq C\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx$$

であるとき，$\lambda$ を指数 $\alpha$ のラゲール展開に対する $L^p$ マルチプライヤーであると呼ぶ．Długosz はつぎを得た：

**Długosz 1987** ．区間 $(0,\infty)$ 上の関数 $\lambda(x)$ が

$$\lambda(x) \in C^4(0,\infty), \qquad \sup_{x>0}|\lambda^{(j)}(x)x^j| < \infty,\ j = 0,1,2,3,4$$

を満たすとする．このとき，$\lambda = \{\lambda(n+1)\}_{n=0}^\infty$ は，指数 $\alpha = 0,1,2,\ldots$ に対してラゲール展開の $L^p$ マルチプライヤー，$1 < p < \infty$ である．

ついでながら，フーリエ級数に関するマルチンキーヴィッツのマルチプライヤー定理の元々のものを述べておく．この定理は実解析における最も深い理論のひとつであるリトルウッド・ペイリーの理論から導かれた：

**Marcinkiewicz 1939** ．数列 $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ が次を満たすとする．

$$|\lambda_n| \leq C, \qquad \sum_{2^n \leq j < 2^{n+1}} |\lambda_j - \lambda_{j+1}| \leq C,\ n = 0,1,2,\ldots.$$

このとき，

$$\int_0^{2\pi} |\sum_{n=0}^\infty \lambda_n A_n(x)|^p\,dx \leq C\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx,\ 1 < p < \infty.$$

ここで，

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \sum_{n=0}^\infty A_n(x)$$

と置いた．

ここで，また以下において，$C$は定数を表し，出てくるごとに値が違うことを許すものとする．

我々がまず考えたいのは，$\alpha=0,1,2,\ldots$ で成り立っている Długosz の定理を任意の$\alpha$とすることである．この$\alpha=0,1,2,\ldots$ の間を埋めるために使われるのが，ラゲール係数の移植（transplantation）という考えである．指数$\alpha$の考えるべき自然な範囲は$-1<\alpha$ であるが，前の注意により$-1<\alpha<0$の場合には，考える空間$L^p$に$(1+\alpha/2)^{-1}<p$なる条件が必要である．移植定理（transplantation theorem）を述べるために移植作用素（transplantation operator）$T_\alpha^\beta, \alpha, \beta>-1$を定義する：

$$T_\alpha^\beta f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n^\beta(f)\mathcal{L}_n^\alpha(x)$$

このとき，この移植作用素$T_\alpha^\beta$とマルチプライヤー作用素$M_\lambda^\alpha$に対して

$$\begin{aligned} a_n^\alpha(T_\alpha^\beta M_\lambda^\beta T_\beta^\alpha f) &= a_n^\beta(M_\lambda^\beta T_\beta^\alpha f) = \lambda_n a_n^\beta(T_\beta^\alpha f) \\ &= \lambda_n a_n^\alpha(f) = a_n^\alpha(M_\lambda^\alpha f) \end{aligned}$$

なので，

$$T_\alpha^\beta M_\lambda^\beta T_\beta^\alpha f = M_\lambda^\alpha f$$

が成り立つ．よって，$L^p(0,\infty)$ から $L^p(0,\infty)$ への作用素ノルムを$|\cdot|_p$と書くことにすると，

$$\|M_\lambda^\alpha\| \le |T_\alpha^\beta|_p\,|M_\lambda^\beta|_p\,|T_\beta^\alpha|_p\,\|f\|_p$$

が成り立つことになる．これは，もしも移植作用素$T_\alpha^\beta$の$L^p$有界性：$\|T_\alpha^\beta f\|_p \le C\|f\|_p$が言えるならば，

$$\text{ある}\beta\text{で } M_\lambda^\beta : L^p\text{有界} \Longrightarrow \text{任意の}\alpha\text{で } M_\lambda^\alpha : L^p\text{有界}$$

であることを示している．実際，移植作用素$T_\alpha^\beta$の$L^p$有界性を示すことが出来た：

**Theorem 1** ([Kanjin 1991]). 指数$\alpha,\beta>-1$に対して，$\gamma=\min\{\alpha,\beta\}$とする．このとき，

$$\|T_\alpha^\beta\|_p \le C\|f\|_p \quad \textit{if} \quad \begin{cases} \gamma \ge 0,\ 1<p<\infty, \\ or \\ -1<\gamma<0,\ (1+\gamma/2)^{-1}<p<-2/\gamma. \end{cases}$$

**注意**

- $T_\alpha^\beta T_\beta^\alpha f = f$ なので，定理は$\|f\|_p \sim \|T_\alpha^\beta f\|_p$を言っている．

- $\int_0^\infty T_\alpha^\beta f(x)g(x)\,dx = \int_0^\infty T_\beta^\alpha g(x)f(x)\,dx$ なので，$T_\alpha^\beta$ の $L^p$ 有界性があると $\|T_\beta^\alpha g\|_{p'} \le C\|g\|_{p'}, 1/p + 1/p' = 1$ が従う．$-1 < \gamma < 0$ の場合の $p < -2/\gamma$ の制限は，条件 $(1+\gamma/2)^{-1} < p'$ のことである．

上の定理は，Thangavelu 1992 によって $x^{p/4-1/2}dx$ なる重みに対しても示された．さらに，Stempak-Trebels 1994 によって重み $x^\delta dx$ に拡張された．ただし，$0 \le \gamma$, $-1 < \delta < p-1$ または $-1 < \gamma < 0$, $-1-\gamma p/2 < \delta < p-1+\gamma p/2$ である．

移植定理によってマルチプライヤー定理はつぎのようになる：

**Długosz 1987, Kanjin 1991, Thangavelu 1993, Stempak-Trebels 1994 .** 指数 $\alpha$ は $\alpha > -1$，関数 $\lambda(x)$ は

$$\lambda(x) \in C^2(0,\infty), \quad \sup_{x>0} |\lambda^{(j)}(x)x^j| < \infty, \quad j = 0,1,2$$

を満たすとする．このとき，$\lambda = \{\lambda(n+1)\}_{n=0}^\infty$ は指数 $\alpha$ のラゲール展開に対する $L^p$ マルチプライヤーである．ただし，$\alpha \ge 0, 1 < p < \infty$ または $-1 < \alpha < 0, (1+\alpha/2)^{-1} < p < -2/\alpha$ である．

前に述べた通り，Długosz によって微分が 4 回，$\alpha$ が $\alpha = 0,1,2,\ldots$ の場合が得られた．Kanjin 1991 によって任意の $\alpha$ に拡張され，Thangavelu 1993 で微分が 2 回に下がった．上の定理の記述はこの場合である．続いて，Stempak-Trebels 1994 で微分が 1 回かつ条件が $\sup_{x>0}|\lambda(x)|^2 + \sup_{N>0}\int_N^{2N} |\lambda'(x)|^2\,dx < \infty$ に弱められた．

移植定理のもうひとつの応用に触れたい．フーリエ級数やフーリエ変換で良く知られた，fractional integral に関する Hardy-Littlewood-Sobolev の定理をラゲール展開で考えてみたい．この定理の発端は，Hardy- Littlewood-Pólya 1926 による数列に関する次の不等式である：

**Hardy-Littlewood-Pólya 1926.**

$$\left(\sum_{l=-\infty}^\infty |\sum_{n\ne l}^\infty \frac{a_n}{|l-n|^{1-\sigma}}|^q\right)^{1/q} \le C\left(\sum_{n=-\infty}^\infty |a_n|^p\right)^{1/p},$$

$$0 < \sigma < 1,\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma,\ 1 < p < q < \infty$$

これを積分で記述したのが Hardy-Littlewood 1928 で，2 次元以上に拡張したのが Sobolev 1938 である：

**Hardy-Littlewood 1928, Sobolev 1938 .** 次で定義される *fractinal integral* $I_\sigma, 0 < \sigma < n$,

$$I_\sigma f(x) = \frac{1}{c(\sigma)}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\sigma}}\,dy, \qquad c(\sigma) = \pi^{n/2}2^\sigma\Gamma(\sigma/2)/\Gamma(n/2-\sigma/2)$$

$$\left( \widehat{I_\sigma f}(\xi) = (2\pi|\xi|)^{-\sigma}\hat{f}(\xi), \qquad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx \right)$$

に対して，

$$\|I_\sigma f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 0 < \sigma < n,\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\sigma}{n},\ 1 < p < q < \infty$$

が成り立つ．

フーリエ級数の形で述べると，

$$I_\sigma f(x) = \sum_{n\neq 0} |n|^{-\sigma}\hat{f}(n)e^{inx}, \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

に対して，

$$\|I_\sigma f\|_{L^q(0,2\pi)} \leq C\|f\|_{L^p(0,2\pi)}, \quad 0 < \sigma < 1,\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma,\ 1 < p < q < \infty$$

が成り立つ．$\sum_{n\neq 0}|n|^{-\sigma}e^{inx} \sim |x|^{\sigma-1}(x \to 0)$ なので，$1/q > 1/p - \sigma$ ならば Young の畳み込みについての不等式より，上の不等式はすぐに従う．実際には，$1/q = 1/p - \sigma$ まで不等式が成立する．これを言うのが fractional integral の定理である．

ラゲール展開に関して，fractional integral の定理を示すことが出来た；

**Theorem 2** ([Kanjin-Sato 1995]). 指数 $\alpha$ は $\alpha > -1$，そして $0 < \sigma < 1$ とする．区間 $(0,\infty)$ 上の関数 $f(x)$ に対して，

$$I_\sigma^{(\alpha)} f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} a_n^\alpha(f)\mathcal{L}_n^\alpha(x)$$

とする．このとき，

$$\|I_\sigma^{(\alpha)} f\|_{L^q(0,\infty)} \leq C\|f\|_{L^p(0,\infty)} \quad \mathit{if} \quad \begin{cases} \alpha \geq 0,\ 1 < p < q < \infty,\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma, \\ or \\ -1 < \alpha < 0,\ (1+\frac{\alpha}{2})^{-1} < p < q < -\frac{2}{\alpha}, \\ \qquad\qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma, \end{cases}$$

この結果は，我々とは独立に，Gasper-Stempak-Trebels 1995 によっても得られている．彼らの証明はラゲール展開に関する畳み込み構造を使ったものである．我々の証明は，以下に概略述べるが，移植定理を使ったものである．またごく最近，Gasper-Trebels ( peprint ) は

$$I_+^\sigma h(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^t (t-s)^{\sigma-1}h(s)\,ds \text{ ( Riemann-Liouville fractional integral )}$$

$$I_-^\sigma h(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_t^\infty (s-t)^{\sigma-1}h(s)\,ds \text{ ( Weyl fractinal integral )}$$

の評価を使った別証明を与えている．

定理の証明に触れてみたい．我々は，フーリエ級数の fractinal integral の定理をラゲール展開のそれへ移すという考えを採る．

有界数列 $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ に対して，フーリエ級数のマルチプライヤー作用素 $\mathcal{M}_\Lambda$ を次で定義する：

$$\mathcal{M}_\Lambda g(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \hat{g}(n) e^{inx}$$

ただし，$g(x)$ は区間 $(0, 2\pi)$ 上の関数で，$\hat{g}(n)$ はそのフーリエ係数である．数列 $\Lambda$ に対して，$\lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ と置く．次の命題が言える：

**Proposition ．** 作用素 $\mathcal{M}_\Lambda$ が $L^p(0, 2\pi)$ から $L^q(0, 2\pi)$ への有界作用素，即ち $\Lambda$ がフーリエ級数の $(p, q)$ マルチプライヤーであるとする．このとき，$M_\lambda^\alpha$ は $L^p(0, \infty)$ から $L^q(0, \infty)$ への有界作用素になる．即ち，$\lambda$ は指数 $\alpha$ のラゲール展開に関する $(p, q)$ マルチプライヤーである．

ただし，$\alpha \geq 0, 1 < p \leq 2 \leq q < \infty$ または，$-1 < \alpha < 0, (1 + \alpha/2)^{-1} < p \leq 2 \leq q < -2/\alpha$ である．

指数が $\alpha \geq 0$ のときに，この命題から定理が従うことを見てみよう．作用素 $I_\sigma^{(\alpha)}$ のパラメター $\sigma$ を複素化

$$I_z^{(\alpha)} f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} a_n^\alpha(f) \mathcal{L}_n^\alpha(x), \quad z = \sigma + i\theta$$

して，Stein の複素補間定理を使う．点 $(1/p, 1/q)$ と $\sigma$ を，$0 < \sigma < 1, 1 < p < q < \infty, 1/q = 1/p - \sigma$ であるように与える．2点 $(1/p_0, 1/q_0), (1/p_1, 1/p_1)$,$1 < p_1 \leq 2 \leq q_1 < \infty, 1 < p_0 < \infty$ を，それらを結ぶ線分の内点が点 $(1/p, 1/q)$ を含むように取る．言うべきは，点 $(1/p_1, 1/p_1)$ での $I_{i\theta}^{(\alpha)}$ の $(L^{p_1}, L^{p_1})$ 有界性と，点 $(1/p_0, 1/q_0)$ での $I_{\sigma_0 + i\theta}^{(\alpha)}$ の $(L^{p_0}, L^{q_0})$ 有界性である．ただし，ここで $\sigma_0 = 1/p_0 - 1/q_0$ である．点 $(1/p_1, 1/p_1)$ での有界性は，前述のマルチプライヤー定理より $\{n^{-i\theta}\}_{n=1}^{\infty}$ が指数 $\alpha$ のラゲール展開の $L^p, 1 < p < \infty$ マルチプライヤーであることより従う．点 $(1/p_0, 1/q_0)$ でのそれは，$I_{\sigma_0 + i\theta}^{(\alpha)} = I_{\sigma_0}^{(\alpha)} I_{i\theta}^{(\alpha)}$ なので，$I_{i\theta}^{(\alpha)}$ については今述べたのと同じ理由で有界である．そして，$I_{\sigma_0}^{(\alpha)}$ については，命題からフーリエ級数の場合の有界性がこちらに移ってきている．以上で，

$$\|I_{i\theta}^{(\alpha)} f\|_{p_1} \leq C_\theta \|f\|_{p_1}, \qquad \|I_{\sigma_0 + i\theta}^{(\alpha)} f\|_{q_0} \leq C_\theta \|f\|_{p_0}$$

が成り立つことになる．定数 $C_\theta$ に求められる，$\theta$ に関し admissible growth であるという条件も確かめられるので，複素補間定理より，$I_\sigma^{(\alpha)}$ の有界性が言える．

命題の証明は，移植定理があるので，

$$\|M_\lambda^0 f\| \leq C \|f\|_p \qquad (\alpha = 0 \text{ の場合})$$

を示せば十分である．次のような補題を考える：

**Lemma．** (1) 区間 $(0,2\pi)$ 上の関数 $g(t)$ に対し，区間 $(0,\infty)$ 上の関数 $Ug(x)$ を

$$Ug(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \hat{g}(n)\mathcal{L}_n^0(x)$$

で定義する．このとき，

$$\|Ug\|_{L^q(0,\infty)} \leq C\|g\|_{L^q(0,2\pi)}, \quad 2 \leq q < \infty$$

が成り立つ．

(2) 区間 $(0,\infty)$ 上の関数 $f(x)$ に対し，区間 $(0,2\pi)$ 上の関数 $Vf(t)$ を

$$Vf(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n^0(f)e^{int}$$

で定義する．このとき，

$$\|Vf\|_{L^p(0,2\pi)} \leq C\|f\|_{L^p(0,\infty)}, 1 < p \leq 2$$

が成り立つ．

この補題より，命題が出ることは次のようにしてわかる．$U,V$ の定義より $M_\lambda^0 = U\mathcal{M}_\Lambda V$ であることと，補題（1）より，

$$\|M_\lambda^0 f\|_q = \|U\mathcal{M}_\Lambda Vf\|_q \leq C\|\mathcal{M}_\Lambda Vf\|_q$$

である．命題の仮定から $\|\mathcal{M}_\Lambda Vf\|_q \leq C\|Vf\|_p$ であり，補題（2）から $\|Vf\|_p \leq C\|f\|_p$ である．以上から，求める不等式 $\|M_\lambda^0 f\|_q \leq C\|f\|_p$ を得る．補題を示そう．ここでは,（2）を見ておく．指数 $\alpha$ が $\alpha = 0$ なので，$Vf(t)$ が直接計算できて，

$$Vf(t) = \frac{ie^{-it/2}}{2\sin t/2}\int_0^\infty f(x)e^{-i(x/2)\cot t/2}\,dx$$

である．そして，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |Vf(t)|^p\,dt &= 2^{2-p}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^\infty f(x)e^{-ixu}\,dx\right|^p(1+4u^2)^{p/2-1}\,du \\ &\leq C\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(u)|^p|u|^{p-2}\,du\end{aligned}$$

となる．最後の項は，一般化されたプランシュレルの定理より，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(u)|^p|u|^{p-2}\,du \leq C\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx$$

と評価されて補題（2）の不等式を得る．

以下いくつかの注意をのべて本稿を終わりたい．

- 関数 $f(x) \in L^p((0,\infty), e^{-x}x^\alpha dx)$ に対して，展開

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n^\alpha(f) L_n^\alpha(x), \quad c_n^\alpha(f) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^\infty f(x) L_n^\alpha(x) e^{-x} x^\alpha \, dx$$

を扱うのが自然に見える．しかし，

$$\mathcal{S}_N f(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n^\alpha(f) L_n^\alpha(x)$$

として，$\mathcal{S}_N f$ の $L^p((0,\infty), e^{-x}x^\alpha dx)$ での収束を考えると，$p=2$ でしか収束しない．文献 Pllard 1948 参照．更に，総和法を考えても，$p=2$ でしか収束しない．これは，文献 Askey-Hirshman, Jr. 1963 による．

- ラゲール展開に関する，最も基本的な結果は Askey-Wainger 1965 による部分和の収束に関する次の結果である：

$$S_N f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n^\alpha(f) \mathcal{L}_n^\alpha(x)$$

とおくとき，

$$\|S_N f - f\|_p \to 0 \ (N \to \infty), \quad 4/3 < p < 4$$

である．

- ここで扱ったラゲール展開は，the standard Laguerre expansion と呼ばれるものである．ラゲール展開に対しては，さらに下に述べる二つの型の展開が議論されている．

The Laguerre expansion of convolution type:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (f, \psi_n^\alpha) \psi_n^\alpha(x), \quad f \in L^2((0,\infty), x^{2\alpha+1}dx),$$

$$\psi_n^\alpha(x) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}} L_n^\alpha(x^2) e^{-x^2/2}, \ \alpha > -1.$$

The Laguerre expansion of Hermite type:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (f, \varphi_n^\alpha) \varphi_n^\alpha(x), \quad f \in L^2((0,\infty), dx),$$

$$\varphi_n^\alpha(x) = \sqrt{\frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}} L_n^\alpha(x^2) e^{-x^2/2} x^{\alpha+1/2}, \ \alpha > -1.$$

ここで，$(f, \psi_n^\alpha), (f, \varphi_n^\alpha)$ はそれぞれの空間における内積である．

- 移植定理の最初のものと言われているのは，ハンケル変換に関するもので，Gay 1960 によってハンケル変換に関するマルチンキーヴィッツのマルチプライヤー定理を得るために考えられた．その後 Askey-Wainger 1966(Coeff), 1966(Series), Askey 1967, 1969 によるヤコビ多項式展開に関するものが続いた．他に，Schindler 1973, Gilbert 1969 などがある．エルミート展開とラゲール展開の調和解析に関する成書としては Thangavelu 1993(Math Notes) がある．

## References


[Szegö] G. Szegö, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 1975.

[Długosz1987] J. Dlgosz, $L^p$ multipliers for Laguerre expansions, Colloq. Math. **54** (1987), 287–293.

[Marcinkiewicz 1939] J. Marcinkiewicz, Sur les multiplicateurs des séries de Fourier, Studia Math. **8** (1939), 78–91.

[Kanjin 1991] Y. Kanjin, A transplantation theorem for Laguerre series, Tôhoku Math. J. **43** (1991), 537–555.

[Thangavelu 1992] S. Thangavelu, Transplantation, summability and multipliers for multiple Laguerre expansions, Tôhoku Math. J. **44** (1992), 279-298.

[Stempak-Trebels 1994] K. Stempak and W. Trebels, On weighted transplantation and multipliers for Laguerre expansions, Math. Ann. **300** (1994), 203–219.

[Thangavelu 1993] S. Thangavelu, A note on a transplantation theorem of Kanjin and multiple Laguerre expansions, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 1135–1143.

[Hardy-Littlewood-Polya 1926] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, The maximum of a certain bilinear form, Proc. London Math. Soc. (2) **25** (1926), 265–282.

[Hardy-Littlewood 1928] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some properties of fractional integrals. I., Math. Z. **27** (1928), 565–606.

[Sovolev 1938] S. L. Sobolev, On a theorem in functional analysis (Russian), Mat. Sb. **4** (1938), 471–497.

[Kanjin-Sato 1995] Y. Kanjin and E. Sato, The Hardy-Littlewood theorem on fractional integration for Laguerre series, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 2165–2171.

[Gasper-Stempak-Trebels 1995] G. Gasper, K. Stempak and W. Trebels, Fractional integration for Laguerre expansions, Methods Appl. Anal. **2** (1995), 67–75.

[Gasper-Trebels(preprint)] G. Gasper and W. Trebels, Norm inequalities for fractional integrals of Laguerre and Hermite expamsins, preprint.

[Pollard 1948] H. Pollard, The mean convergence of orthogonal series II, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 355–367.

[Askey-Hirshman, Jr. 1963] R. Askey and I. I. Hirshman, Jr. , Mean summability for ultraspherical polynomials, Math. Scand. **12** (1963), 167–177.

[Askey-Wainger 1965] R. Askey and S. Wainger, Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series, Amer. J. Math. **87** (1965), 695–708.

[Guy 1960] D. L. Guy, Hankel multiplier transforms and weighted $p$-norms, Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 137–189.

[Askey-Wainger 1966(Coeff)] R. Askey and S. Wainger, A transplantation theorem for ultraspherical coefficients, Pacific J. Math. **16** (1966), 393–405.

[Askey-Wainger 1966(Series)] R. Askey and S. Wainger, A transplantation theorem between ultraspherical series, Illinois J. Math. **10** (1966), 322–344.

[Askey 1967] R. Askey, A transplantation theorem for Jacobi coefficients, Pacific J. Math. **21** (1967), 393–404.

[Askey 1969] R. Askey, A transplantation theorem for Jacobi series, Illinois J. Math. **13** (1969), 583–590.

[Schindler 1973] S. Schindler, Explicit integral transform proofs of some transplantation theorems for the Hankel transform, SIAM J. Math. Anal. **4** (1973), 367–384.

[Gilbert 1969] J. E. Gilbert, Maximal theorems for some orthogonal series I, Trans. Amer. Math. Soc. **145** (1969), 495–515.

[Thangavelu 1993(Math Notes)] S. Thangavelu, Lectures on Hermite and Laguerre expansions, Math. Notes No. 42, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey 1993.