数理解析研究所講究録
1163巻 2000年 24-27

Distribution of function groups in an extended Bers slice

東京大学大学院 数理科学研究科 糸 健太郎 (Kentaro Ito)

S を種数 g が2以上の閉曲面とする．既約なコンパクト3次元多様体 M が S に関する compression body であるとは，M が次のように構成されたときをいう：$S\times[0,1]$ の $S\times\{1\}$ に沿って幾つかの2－ハンドルを貼り，境界に S^2 ができたらそこに3－ハンドルを貼る．$S\times\{0\}$ に対応する ∂M の成分を exterior boundary と呼び $\partial_0 M$ と書く．S に関する compression body 全体を $CB(S)$ と書く．$M_1, M_2\in CB(S)$ とする．Embedding $f: M_1\hookrightarrow M_2$ は $f|\partial_0 M_1:\partial_0 M_1\to M_2$ が同相写像 $\partial_0 M_1\to\partial_0 M_2$ にホモトピックのとき admissible であるという．

Γ を上半平面 $\mathbf{H}$ に作用するフックス群で $S\cong\mathbf{H}/\Gamma$ となるものとする．Γ に関する $\mathbf{H}$ 上の正則2次微分の空間を $B_2(\mathbf{H},\Gamma)$ と書く．$\varphi\in B_2(\mathbf{H},\Gamma)$ に対して，その developing map と holonomy 表現をそれぞれ $f_\varphi:\mathbf{H}\to\hat{\mathbf{C}}$, $\rho_\varphi:\Gamma\to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ と書く．$B_2(\mathbf{H},\Gamma)$ の部分集合を次のように定義する：

$$
\begin{aligned}
C(\Gamma) &= \{\varphi \,|\, f_\varphi \text{ は covering map}\}\\
&\cup\\
C_0(\Gamma) &= \{\varphi\in C(\Gamma)\,|\,\rho_\varphi(\Gamma) \text{ は torsion free で } \mathbf{H}/\Gamma\cong f_\varphi(\mathbf{H})/\rho_\varphi(\Gamma)\}\\
&\cup\\
C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma) &= \{\varphi\in C_0(\Gamma)\,|\,\rho_\varphi(\Gamma) \text{ は geometrically finite}\}\\
&\cup\\
T(\Gamma) &= \{\varphi\,|\, f_\varphi \text{ は単射で } \hat{\mathbf{C}} \text{ 上の擬等角写像に拡張できる}\}.
\end{aligned}
$$

また

$$S_0(\Gamma)=\{\varphi\in C_0(\Gamma)\,|\,\rho_\varphi(\Gamma) \text{ は Schottky group}\}$$

と定める．$S_0(\Gamma)\subset C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ である．

$C(\Gamma), C_0(\Gamma)$ はコンパクトである．$\varphi\in C(\Gamma)$ に対して，$\rho_\varphi(\Gamma)$ は function group で $f_\varphi(\mathbf{H})$ がその不変成分となる．(Torsion free な) function group は topologically tame なので，$\varphi\in C_0(\Gamma)$ に対してあるコンパクト3次元多様体 M_φ が存在して $\mathrm{int}(M_\varphi)\cong\mathbf{H}^3/\rho_\varphi(\Gamma)$ となる．特に $M_\varphi\in CB(S)$ である．$\varphi\in T(\Gamma)$ に対して $M_\varphi\cong S\times[0,1]$ であり，$\varphi\in S_0(\Gamma)$ に対して $M_\varphi\cong H_g$ (H_g は種数 g の handle body) である．

$\varphi\in C(\Gamma)$ に対し $G=\rho_\varphi(\Gamma)$ とおく．G の不連続領域を $\Omega(G)$，その不変成分 $(=f_\varphi(\mathbf{H}))$ を $\Omega_0(G)$ と書く．このとき

$$QC(\varphi)=\{S(w_\mu\circ f_\varphi)\,|\,\mu\in\mathrm{Belt}(\Omega(G)-\Omega_0(G),G)_1\}$$

と定める．ここで $w_\mu : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ は μ をベルトラミ係数に持つ擬等角写像で，$S(w_\mu \circ f_\varphi)$ は $w_\mu \circ f_\varphi$ の Schwarz 微分を表す．$\varphi \in C(\Gamma)$ が minimally parabolic であるとは，$\rho_\varphi(\Gamma)$ が rank 1 parabolic subgroup を含まないときをいう．$\varphi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ に対して，$CC(\varphi)$ は minimally parabolic な元 φ_0 を含み，$CC(\varphi) = \overline{QC(\varphi_0)} \cap C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ となる (cf.[2])．この φ_0 を用いて $\partial CC(\varphi) = \overline{QC(\varphi_0)} - QC(\varphi_0)$ と定める．($CC(\varphi) = \{\varphi\}$ のときは $\partial CC(\varphi) = \{\varphi\}$ とする.)

$C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ の連結成分は、次のように代数的に特徴付けられる．

Proposition 1. $\varphi, \psi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ とする．φ と ψ が $C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ の同じ連結成分に含まれる必要十分条件は $\ker \rho_\varphi = \ker \rho_\psi$ が成り立つことである．

また，次は容易にわかる．

Lemma 2. $\ker \rho_\varphi \neq \ker \rho_\psi$ のとき，すなわち $CC(\varphi) \cap CC(\psi) = \emptyset$ のとき $\overline{CC(\varphi)} \cap \overline{CC(\psi)} = \emptyset$ が成り立つ．

上の補題より，ある連結成分 $CC(\varphi)$ に $CC(\varphi)$ の外から $C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ の点列が収束するならば，その点列は無限個の連結成分を経由しなくてはならないことがわかる．

次の主張は $\rho_\varphi(\Gamma)$ の quasiconformal stability より直ちに従う．

Proposition 3. 任意の $\varphi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ で $\rho_\varphi(\Gamma)$ が purely loxodromic なものに対して，φ のある近傍 U が存在して $C(\Gamma) \cap U = QC(\varphi) \cap U$ が成り立つ．

また $\varphi \in S_0(\Gamma)$ に対して $QC(\varphi) = \{\varphi\}$ なので次の系を得る．

Corollary 4. 任意の $\varphi \in S_0(\Gamma)$ は $C(\Gamma)$ の中で孤立点である．

一方で次が成り立つ．証明は rank 2 cusp において Dehn filling すればよい．

Proposition 5 (Matsuzaki [2]). 任意の $\varphi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ で $\rho_\varphi(\Gamma)$ が rank 2 parabolic subgroup を含むものに対して，任意の $\psi \in QC(\varphi)$ は $C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma) - QC(\varphi)$ の元の集積点となる．

$\mathrm{Mod}(S)$ を S の写像類群とする．$\mathrm{Mod}(S)$ は自然に左から $C_0(\Gamma)$ に作用する (cf. [1])．$\sigma \in \mathrm{Mod}(S)$ が $\varphi \in C_0(\Gamma)$ に作用したものを φ^σ と書く．$\sigma \in \mathrm{Mod}(S)$ に対して，$M_\varphi \cong M_{\varphi^\sigma}$ や $\ker \rho_{\varphi^\sigma} = \sigma_*(\ker \rho_\varphi)$ などが成り立つ．

Lemma 6. $\varphi, \psi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ とする．Admissible embedding $M_\varphi \hookrightarrow M_\psi$ が存在するための必要十分条件はある $\sigma \in \mathrm{Mod}(S)$ が存在して $\ker \rho_\varphi \subset \sigma_*(\ker \rho_\psi)$ が成り立つことである．

Proposition 7 (Jorgensen). $C_0(\Gamma)$ において $\varphi_n \to \varphi$ とする．このとき，十分大きな n に対して $\ker \rho_\varphi \subset \ker \rho_{\varphi_n}$ が成り立つ．(従って十分大きな n に対して admissible embedding $M_\varphi \hookrightarrow M_{\varphi_n}$ が存在する.)

$\varphi, \psi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ とする．ある列 $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{Mod}(S)$ が存在して $C_0(\Gamma)$ において $\psi^{\sigma_n} \to \varphi$ であるとする．このとき，$M_\psi \cong M_{\psi^{\sigma_n}}$ に注意すると，admissible embedding $M_\varphi \hookrightarrow M_\psi$ が存在することがわかる．逆に admissible embedding $M_\varphi \hookrightarrow M_\psi$ が存在するとき ψ の軌道と φ の関係を調べたのが次の定理（主定理）である．

Theorem 8. $\varphi, \psi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ に対し，admissible embedding $M_\varphi \hookrightarrow M_\psi$ が存在するとする．このとき軌道 $\{\psi^\sigma\}_{\sigma \in \mathrm{Mod}(S)}$ の閉包は $\partial CC(\varphi)$ を含む．

以上をまとめると次のようになる．

Theorem 9. $\varphi, \psi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ に対して次の条件は同値である．

(1) ある $\sigma \in \mathrm{Mod}(S)$ が存在して $\ker \rho_\varphi \subset \sigma_*(\ker \rho_\psi)$ が成り立つ，
(2) admissible embedding $M_\varphi \hookrightarrow M_\psi$ が存在する，
(3) 軌道 $\{\psi^\sigma\}_{\sigma \in \mathrm{Mod}(S)}$ の閉包は $\partial CC(\varphi)$ を含む，
(4) 軌道 $\{\psi^\sigma\}_{\sigma \in \mathrm{Mod}(S)}$ の閉包と $CC(\varphi)$ の閉包は共通部分をもつ．

任意の $\psi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ に対して，admissible embedding $S \times [0,1] \hookrightarrow M_\psi$ と $M_\psi \hookrightarrow H_g$ が存在するので，Theorem 8 より次の 2 つの系を得る．

Corollary 10. 任意の $\psi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ に対して，軌道 $\{\psi^\sigma\}_{\sigma \in \mathrm{Mod}(S)}$ の閉包は $\partial T(\Gamma)$ を含む．

Corollary 11. 任意の $\varphi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ と任意の $\psi \in S_0(\Gamma)$ に対して，軌道 $\{\psi^\sigma\}_{\sigma \in \mathrm{Mod}(S)}$ の閉包は $\partial CC(\varphi)$ を含む．

次の 2 つの定理は Theorem 8 の証明に用いる．

Theorem 12. $\varphi \in C_0(\Gamma)$ に対し $QC(\varphi) = \{\varphi\}$ が成り立つとする．このとき $\mathrm{Mod}(S)$ の作用は φ において連続である．すなわち，$C_0(\Gamma)$ において $\varphi_n \to \varphi$ ならば任意の $\sigma \in \mathrm{Mod}(S)$ に対して $(\varphi_n)^\sigma \to \varphi^\sigma$ が成り立つ．

$\varphi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ は $QC(\varphi) = \{\varphi\}$ のとき maximal cusp と呼ばれる．$\varphi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ に対して，$\partial CC(\varphi)$ において maximal cusp は稠密に存在する (McMullen)．

Theorem 13. $\varphi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ とする．任意の maximal cusp $\psi \in \partial QC(\varphi)$ に対して，軌道 $\{\psi^\sigma\}_{\sigma \in \mathrm{Mod}(S)}$ の閉包は $\partial CC(\varphi)$ を含む．

ここで Theorem 8 の証明のアウトラインを述べる．$\varphi, \psi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ に対し，admissible embedding $M_\varphi \hookrightarrow M_\psi$ が存在するとする．始めに，ある元 $\sigma \in \mathrm{Mod}(S)$ が存在して，$\{\psi_{\sigma^n}\}$ が maximal cusp $\psi_\infty \in \partial CC(\varphi)$ に収束することを具体的に示す．ここで Ohshika によって拡張された Thurston の収束定理を用いる．このとき，Theorem 12 の maximal cusp における連続性と Theorem 13 の軌道の稠密性から，任意の $\varphi' \in \partial CC(\varphi)$ に対してある列 $\{\sigma_n\} \subset \mathrm{Mod}(S)$ が存在して $\psi_{\sigma_n} \to \varphi'$ となることが対角線論法より示せる．

参考文献

[1] K. Ito, *Schottky groups and Bers boundary of Teichmüller space*, preprint.

[2] K. Matsuzaki, *Projective structures inducing covering maps*, Duke Math. J. **78** (1995), 413–425.