数理解析研究所講究録
1172巻 2000年 1-7

二重化結び目の colored Jones 多項式の計算方法について

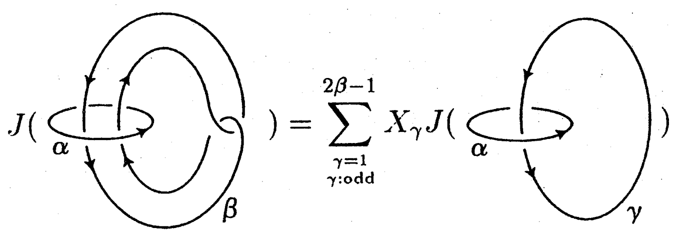
聖心女子大学　岡本美雪 (Miyuki Okamoto)

一般の結び目の二重化結び目に関する colored Jones 多項式を, Whitehead 絡み目の colored Jones 多項式を用いて計算する方法を紹介する. 二重化結び目に関して Volume Conjecture が成り立つかどうか明らかにすることを目標にしており, したがって colored Jones 多項式も漸近挙動を調べることができるよう, explicit な形で求めたいのだが, 今のところ得られていない. この記事では, 計算方法を紹介するとともに, 問題となっている箇所について言及する.

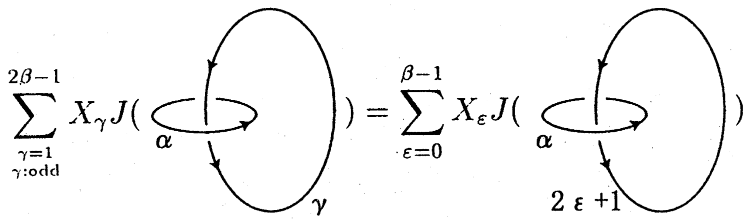
1. 二重化結び目の colored Jones 多項式

まず, Whitehead 絡み目の各成分に $\mathcal{U}_q(sl_2)$ の α 次元, β 次元既約表現を対応させた場合の colored Jones 多項式 J について考える. (図中では, n 次元表現を対応させる成分の傍に n と書くことにする.)

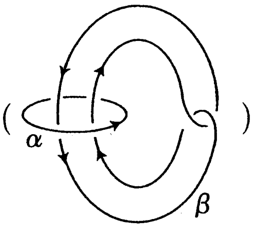
よく知られた等式 ([2, pp.152–156] の Figure 14.8, 14.12, 14.15) を用いると,



と書くことができる. さらに $\gamma = 2\varepsilon + 1$ とおくと



となることから,

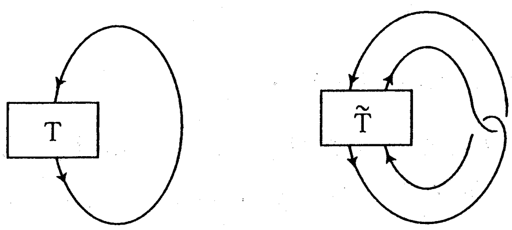
$J($  $) = \sum_{\varepsilon=0}^{\beta-1} X_\varepsilon[\alpha \times (2\varepsilon + 1)].$ (1)

ここで

$$[n] = \frac{q^{n/2} - q^{-n/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}$$

である.

一般の結び目 K に対して, その二重化結び目を $\tilde{K}$ とおく.



K $\qquad$ $\tilde{K}$

但し, T はタングルを, $\tilde{T}$ は T の 2-parallel を表す.

このとき, $\tilde{K}$ の colored Jones 多項式は, Whitehead 絡み目の場合と同様にして, つぎのような線形和で表せることが分かる.

$$J\left(\tilde{K}\right) = \sum_{\varepsilon=0}^{\beta-1} X_\varepsilon J(K) \tag{2}$$

等式の右辺に現れた X_ε は, 等式 (1) のものと同じであることに注意する.

等式 (2) より, X_ε を explicit な形で求めることは, 一般の結び目の二重化結び目に関する colored Jones 多項式の漸近挙動を調べる上で, 非常に有用であることが分かる.

そこでつぎに, X_ε を具体的に書き下す方法について考える.

colored Jones 多項式を書き換える際に用いた等式から, X_ε は量子 $6j$ 記号等を用いて書き表すことのできることが分かる. しかし, 量子 $6j$ 記号を書き下したものが非常に煩雑であるため ([3] を参照.), 後に漸近挙動を調べることを考えるとあまり都合のよい形とは言えない.

よって, ここで再び等式 (1) を思い出し, 別の方法で X_ε を求めてみる.
等式 (1) より

$$W(\beta) = H(\beta)\,X(\beta) \tag{3}$$

が成り立つことが分かる. 但し, 等式 (1) の右辺を W_α^β と書くことにし, さらに

$$
\begin{aligned}
{}^tW(\beta) &= \begin{pmatrix} W_1^\beta & W_3^\beta & W_5^\beta & \cdots & W_{2\beta-1}^\beta \end{pmatrix},\\
{}^tX(\beta) &= \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & \cdots & X_{\beta-1} \end{pmatrix},\\
H(\beta) &= \begin{pmatrix}
[1\times 1] & [1\times 3] & [1\times 5] & \cdots & [1\times(2\beta-1)]\\
[3\times 1] & [3\times 3] & [3\times 5] & \cdots & [3\times(2\beta-1)]\\
[5\times 1] & [5\times 3] & [5\times 5] & \cdots & [5\times(2\beta-1)]\\
 & \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & \\
 & \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & \\
[(2\beta-1)\times 1] & \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & [(2\beta-1)\times(2\beta-1)]
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

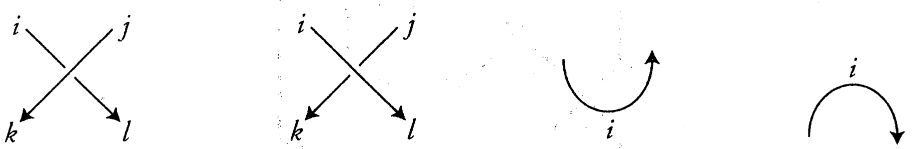
とする.

したがって, $W(\beta)$ — すなわち, Whitehead 絡み目の colored Jones 多項式 — と $H(\beta)$ の逆行列を求めることができれば, $X(\beta)$ が分かる.

2. Whitehead 絡み目の colored Jones 多項式と $H(\beta)$ の逆行列

絡み目を 1 箇所で切断して (1,1)-タングル表示し, [1] の R 行列を用いて colored Jones 多項式を計算することができる.

具体的には, 交差点および極小点・極大点につぎのものを対応させ, 積をとることで多項式が得られる. 辺の傍の i, j, k, ℓ はラベルと呼ばれるものであり, ラベル i の付いている辺が λ 次元既約表現に対応する成分に属しているなら, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, \lambda-1\}$ である.



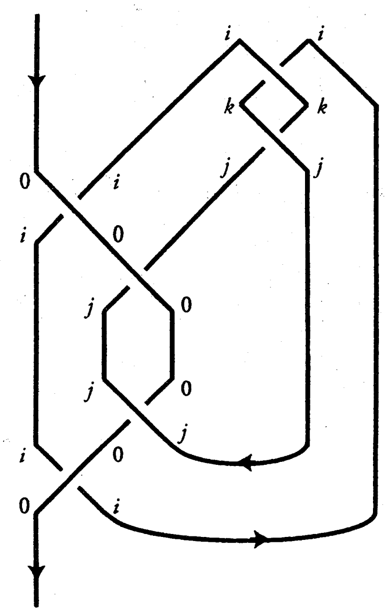
$\overset{\alpha\beta}{(R)}{}^{ij}_{k\ell}$ $\quad$ $\overset{\alpha\beta}{(R^{-1})}{}^{ij}_{k\ell}$ $\quad$ $\overset{\alpha}{(\mu)}{}_i$ $\quad$ $\overset{\alpha}{(\mu^{-1})}{}_i$

ここで, i, ℓ の付いている辺と j, k の付いている辺はそれぞれ, α 次元表現, β 次元表現に対応する成分に属しているとし,

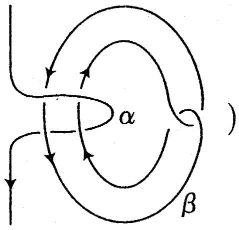
$$
\begin{aligned}
\overset{\alpha\beta}{(R)}{}^{ij}_{k\ell} &= \sum_{n=0}^{\min(\alpha-1-i,j)} \delta_{\ell,i+n}\delta_{k,j-n}\frac{(q)_{i+n}(q)_{\beta-1+n-j}}{(q)_n(q)_i(q)_{\beta-1-j}}(-1)^n \\
&\qquad \times q^{-\frac{n^2}{2}-(\frac{\alpha+\beta}{4}+i-j)n+\frac{\alpha\beta}{4}-\frac{2j+1}{4}\alpha-\frac{2i+1}{4}\beta+\frac{2i+2j+4ij+1}{4}}, \\
\overset{\alpha\beta}{(R^{-1})}{}^{ij}_{k\ell} &= \sum_{n=0}^{\min(\beta-1-j,i)} \delta_{\ell,i-n}\delta_{k,j+n}\frac{(q)_{j+n}(q)_{\alpha-1+n-i}}{(q)_n(q)_j(q)_{\alpha-1-i}} \\
&\qquad \times q^{\frac{-3\alpha+\beta+2}{4}n+\frac{2j+1}{4}\alpha+\frac{2i+1}{4}\beta-\frac{2i+2j+4ij+1}{4}}, \\
\overset{\alpha}{(\mu)}_i &= q^{i-\alpha+1}, \\
\overset{\alpha}{(\mu^{-1})}_i &= q^{-i+\alpha-1}, \\
(q)_n &= (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)
\end{aligned}
$$

とする. $\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタである. また q は generic であることに注意する.

Whitehead 絡み目のつぎのような図式にラベルをつけ,

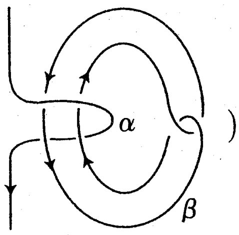


その colored Jones 多項式を計算すると, つぎのようになる.

$J($  $)$

$$= \sum_{0\le i,j\le k\le \beta-1} \frac{\{(q)_k\}^2 (q)_{\beta-1-i}(q)_{\beta-1-j}}{(q)_i(q)_j(q)_{k-i}(q)_{k-j}\{(q)_{\beta-1-k}\}^2}(-1)^{i+j}$$
$$\times\, q^{\frac{\beta^2}{2}+\alpha(i-j)-\frac{\beta(4k+3)}{2}+\frac{i(i+1)}{2}+\frac{j(j+1)}{2}+(k+1)^2}.$$

したがって, α 次元表現に対応している成分を閉じた Whitehead 絡み目の colored Jones 多項式 W_α^β は

$W_\alpha^\beta = [\alpha]\times J($  $)$

$$= [\alpha]\times \sum_{0\le i,j\le k\le \beta-1} \frac{\{(q)_k\}^2 (q)_{\beta-1-i}(q)_{\beta-1-j}}{(q)_i(q)_j(q)_{k-i}(q)_{k-j}\{(q)_{\beta-1-k}\}^2}(-1)^{i+j}$$
$$\times\, q^{\frac{\beta^2}{2}+\alpha(i-j)-\frac{\beta(4k+3)}{2}+\frac{i(i+1)}{2}+\frac{j(j+1)}{2}+(k+1)^2} \tag{4}$$

となる.

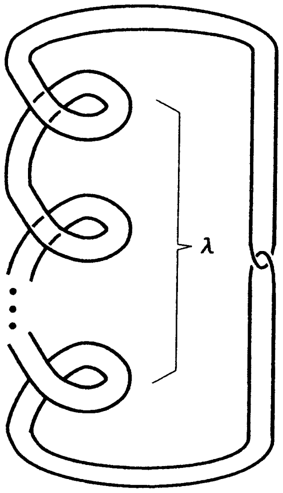
つぎに, $H(\beta)$ の逆行列について考える.

β が小さい場合について, $H(\beta)$ 行列式や逆行列を計算してみたが, その計算からは β が一般の場合を上手く類推できていない. [計算機を使ってこの計算を行なうに当たり, D. De Wit 氏にお世話になりました. 感謝致します.]

この点が解決すると, 二重化結び目の coloerd Jones 多項式が等式 (2) の形で書き表すことができ, 二重化結び目に関する Volume Conjecture の研究も進むものと思われる.

3. 具体例

最後に, つぎのような二重化結び目 $\tilde{K}$ の colored Jones 多項式を, β が小さい場合を計算したので, その結果を記しておく.



$\tilde{K_\lambda}$

$\tilde{K_\lambda}$ に対し, $J_\beta(\tilde{K_\lambda})$ で β 次元表現に対応する colored Jones 多項式を表すことにする. このとき, 等式 (1) はつぎのようになる.

$$J_\beta(\tilde{K_\lambda}) = \sum_{\varepsilon}^{\beta-1} X_\varepsilon q^{\varepsilon(\varepsilon+1)\lambda}[2\varepsilon+1]. \tag{5}$$

$\beta = 2$ の場合: $H(2)$, $W(2)$ を計算すると

$$H(2) = \begin{pmatrix} [1] & [3] \\ [3] & [9] \end{pmatrix},$$
$$W(2) = \begin{pmatrix} [1] \times q(q+1) \\ [3] \times q(q^7 - q^6 + 2q^4 - q^3 + q^2 + q - 1) \end{pmatrix}$$

となる. したがって

$$X(2) = \begin{pmatrix} q + q^{-1} \\ q - 1 \end{pmatrix}$$

となり, colored Jones 多項式は

$$J_2(\tilde{K_\lambda}) = q + q^{-1} + q^{-2\lambda+2} - q^{-2\lambda-1} \tag{6}$$

である.

2 次元表現に対応する colored Jones 多項式は, いわゆる Jones 多項式のことである. 二重化結び目 $\tilde{K_\lambda}$ の Jones 多項式は, 既に [2] で公式が与えられており, 等式 (6) はそれと一致している.

$\beta = 3$ の場合: $\beta = 2$ の場合と同様にして計算を行なうと

$$X(3) = \begin{pmatrix} q^3 + 1 + q^{-3} \\ q^3 - q + 1 - q^{-2} \\ q^3 - q^2 - q + 1 \end{pmatrix}$$

となる. よって, colored Jones 多項式は

$$\begin{aligned} J_3(\tilde{K_\lambda}) = {} & q^3 + 1 + q^{-3} \\ & + q^{-2\lambda}(q^4 + q^3 - q^{-2} - q^{-3}) - q^{-6\lambda}(q^5 - q^3 - 1 + q^{-2}) \end{aligned}$$

となる.

$\beta = 4$ の場合: $J_4(\tilde{K_\lambda})$ は省略して, $X(4)$ のみ記しておく.

$$X(4) = \begin{pmatrix} q^6 + q^2 + q^{-2} + q^{-6} \\ q^6 - q^3 + q^2 + q - 1 - q^{-1} + q^{-2} - q^{-5} \\ q^6 - q^4 - q^3 + q^2 + q - 1 - q^{-1} - q^{-3} \\ q^6 - q^5 - q^4 + q^2 + q - 1 \end{pmatrix}.$$

参 考 文 献

[1] R. Kirby and P. Melvin, *The 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for* $sl(2, \mathrm{C})$, Invent. Math., **105** (1991), 473-545.

[2] R.A. Landvoy, *The Jones polynomial of pretzel knots and links*, Topology Appl., **83** (1998), 135-147.

[3] W.B.R. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Springer-Verlag, 1997.

[4] G. Masbaum and P. Vogel, *3-varent graphs and the Kauffman bracket*, Pacific J. Math., **164** (1994), 361-381.