数理解析研究所講究録
1173 巻 2000 年 61-71

Special Values of Triple Product L-Functions and Nearly Holomorphic Eisenstein Series

東工大・理　水本信一郎

(Shin-ichiro Mizumoto)

1. 動機

$\Gamma_1 := SL_2(\mathbf{Z})$ に関する重さ $k \in \mathbf{Z}_{>0}$ の正則 cusp form の空間を $S_k(\Gamma_1)$ とかく。

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n,f) e^{2\pi i n z} \in S_k(\Gamma_1)$$

を normalized Hecke eigenform とするとき、各素数 p に対して

$$\alpha_p + \beta_p = a(p,f) \quad \text{and} \quad \alpha_p \beta_p = p^{k-1}$$

となる $\alpha_p, \beta_p \in \mathbf{C}$ をとり、

$$M_p(f) := \begin{pmatrix} \alpha_p & 0 \\ 0 & \beta_p \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbf{C})$$

とおく。

Normalized Hecke eigenforms $f \in S_k(\Gamma_1)$, $g \in S_l(\Gamma_1)$, $h \in S_m(\Gamma_1)$ に対して triple product L-function が

$$L(s, f \otimes g \otimes h) := \prod_{p \,\mathrm{prime}} \det \left(1_8 - p^{-s} M_p(f) \otimes M_p(g) \otimes M_p(h)\right)^{-1} \tag{1.1}$$

で定義される。(1.1) の右辺は任意の $\delta > 0$ に対して $\mathrm{Re}(s) \geq (k+l+m-1)/2+\delta$ で一様に絶対収束する。また (1.1) は全 s-平面に解析接続され [Ga2, Sa, Or]、整関数となる [Ik]。いま $k \geq l \geq m$ かつ $k < l+m$ と仮定する。このとき $L(s, f \otimes g \otimes h)$ の特殊値については次が知られている：

$$\frac{k+l+m}{2} - 1 \leq n \leq l+m-2 \quad をみたす \quad n \in \mathbf{Z} \tag{1.2}$$

に対して

$$\frac{L(n, f \otimes g \otimes h)}{\pi^{4n+3-k-l-m}(f,f)(g,g)(h,h)} \in \mathbf{Q}(f,g,h). \tag{1.3}$$

ここで (,) は Petersson 内積、また $\mathbf{Q}(f,g,h)$ は f, g, h における Hecke 作用素の固有値により $\mathbf{Q}$ 上生成される代数体である。(1.2) は [De] の意味の critical points の（関数等式に関する）中心と右半分であることに注意しておく。

上の結果 (1.3) の（これまでに知られている）証明は次の積分表示 [Ga2][Or] に基づく：

$$\left(\left(\left(E_k^{(3)}\left(\begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & z_2 & \\ 0 & & z_3 \end{pmatrix}, s\right), f(z_1)\right), (\delta_l^{(\frac{k-l}{2})} g)(z_2)\right), (\delta_m^{(\frac{k-m}{2})} h)(z_3)\right)$$

$$= \rho(s) L(s+k+\frac{m+l}{2}-2, f\otimes g\otimes h). \tag{1.4}$$

ただし

$$\begin{aligned}\rho(s) := &(-1)^{\frac{k}{2}} 2^{8-4s-5k}\pi^{3-s-2k}\zeta(2s+k)^{-1}\zeta(4s+2k-2)^{-1}\\ &\cdot\Gamma(s)^{-1}\Gamma(s+k)^{-1}\Gamma(2s+2k-2)^{-1}\\ &\cdot\Gamma(s+k-1)\Gamma(s+k-\frac{l+m}{2})\Gamma(s+k-\frac{l-m}{2}-1)\\ &\cdot\Gamma(s+k+\frac{l-m}{2}-1)\Gamma(s+k+\frac{l+m}{2}-2).\end{aligned}$$

([Ga2, Theorem (1.3)] 及び [Or, Theorem 1] の等式はどちらも、右辺を 4 倍すべきである。) ここで $E_k^{(3)}(Z,s)$ は $Sp_6(\mathbf{Z})$ に関する Eisenstein series（定義は下の (3.2)), $\delta_m^{(r)}$ は保型形式の重さを $2r$ だけ上げる Maass operator である:

$$\delta_m := (2\pi i)^{-1}\mathrm{Im}(z)^{-m}\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Im}(z)^m;$$

$$\delta_m^{(r)} := \begin{cases} \delta_{m+2r-2}\cdots\delta_{m+2}\delta_m & (r\in\mathbf{Z}_{>0} \quad \text{のとき}),\\ \mathrm{id} & (r=0 \quad \text{のとき}).\end{cases}$$

しかし、特殊値 (1.3) を実際に求めるためには (1.4) はふさわしい式とはいえない。その理由は主に二つある：

(1) $\nu\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$E_k^{(3)}\left(\begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & z_2 & \\ 0 & & z_3 \end{pmatrix}, -\nu\right) \tag{1.5}$$

の Fourier 係数をひとつ計算するには、まず $E_{k-2\nu}^{(3)}(Z,0)$ の Fourier 係数をたくさん求めなければならない。$E_k^{(3)}(Z,0)$ の Fourier 係数の明示公式は知られている [Bö3, Ki1, Kat1, Kat2] けれども、これを実行するのはかなり大変である。

(2) (1.5) の Fourier 係数を $\nu>0$ のとき求めるにはさらに、ある 3ν 次の微分作用素 $\mathbf{D}^{(\nu)}$ によって

$$e^{-2\pi i\mathrm{tr}(Z)}\mathbf{D}^{(\nu)}e^{2\pi i\mathrm{tr}(Z)}$$

で定義される $\mathrm{Im}(Z)$ の成分に関する多項式を求めなければならない。その計算は ν が大きくなるとき急速に困難になる。(上の $\mathbf{D}^{(\nu)}$ が出てくる理由は $E_{k-2\nu}^{(3)}(Z,s)$

に Maass operator を作用させて $E_k^{(3)}(Z,s-\nu)$ を出すためである。この点については講演の際、伊吹山氏より以下のご指摘を頂いた: Maass operator の代わりに氏の holomorphic differential operator [Ib1][Ib2] を用いた (1.4) と類似の積分表示を使うと、上のように現れる多項式は完全に明示的に書き下せるので、この (2) の困難はあらわれない。)

今回の話では、値 (1.3) を求めるための別の方法を与える。そこでは f の次数 2 への nearly holomorphic Eisenstein lift [Mi3] を用いる。

2. 方法

$f \in S_k(\Gamma_1)$ を normalized Hecke eigenform とする。2 次 Siegel 上半空間 H_2 上の変数 Z に対して、$[f]_1^2(Z,s)$ を f に付随した $Sp_4(\mathbf{Z})$ に関する Klingen 型 Eisenstein 級数とする (定義は下の (3.1))。[Bö4, Ga1](= 下の (4.1). cf. [Sa]) により (1.4) は次のようにかける:

$$\left(\left([f]_1^2\left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}, s\right), (\delta_l^{(\frac{k-l}{2})}g)(z)\right), (\delta_m^{(\frac{k-m}{2})}h)(w)\right)$$

$$= \gamma(s)\frac{L(s+k+\frac{l+m}{2}-2, f\otimes g\otimes h)}{L_2(2s+2k-2,f)}. \tag{2.1}$$

ここで

$$\begin{aligned}\gamma(s) :=& 2^{5-4k-2s}\pi^{2-2k-s}\Gamma(s)^{-1}\Gamma(2s+2k-2)^{-1}\\ &\cdot\Gamma(s+k-\frac{l+m}{2})\Gamma(s+k-\frac{l-m}{2}-1)\\ &\cdot\Gamma(s+k+\frac{l-m}{2}-1)\Gamma(s+k+\frac{l+m}{2}-2).\end{aligned}$$

また

$$L_2(s,f) := \prod_{p\,\mathrm{prime}} \det\left(1_3 - p^{-s}\mathrm{sym}^2(M_p(f))\right)^{-1} \tag{2.2}$$

は f の symmetric square L-function であり、その特殊値は比較的簡単に計算できる [Za]。志村 [Sh2] により $[f]_1^2(Z,-\nu)$ $(\nu\in\mathbf{Z}; 0\le\nu\le\frac{k}{2}-2)$ の Fourier 係数は $\mathrm{Im}(Z)^{-1}$ の成分の多項式である (cf. [Mi3])。次節ではこの多項式の定数項の明示公式を与える。(実際、結果は任意次数で与えられる。) それを使うと

$$[f]_1^2\left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}, -\nu\right)$$

を、z, w 各変数に関する ([Sh1] の意味での) 概正則保型形式として、わかりやすい基底で書き下すことができる。すると (2.1) から triple product L-function の特殊値が求まる。以上のプロセスを標語的にいうと:

「次数 3 の等式 (1.4) を Klingen Eisenstein series を使って次数 2 の等式 (2.1) に落とし (この部分はよく知られている)、そこに Fourier 係数の明示公式を使って次数 1 の計算に帰着させる」

ということになる。計算の実例は第 5 節で与える。

3. 明示公式

$n\in \mathbf{Z}_{>0}$ に対し $\Gamma_n := Sp_{2n}(\mathbf{Z})$ とし、 H_n を次数 n の Siegel 上半空間とする。また $n,k\in \mathbf{Z}_{>0}$ に対し Γ_n に関する重さ k の cusp form の空間を $S_k(\Gamma_n)$ とする。$S_k(\Gamma_0) := \mathbf{C}$ と約束する。

$n \in \mathbf{Z}_{>0}$ と $n \geq r$ なる $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\Delta_{n,r} := \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0^{(n-r,n+r)} & * \end{pmatrix} \in \Gamma_n \right\}$$

とおく (Γ_n の部分群)。k を偶数とするとき $f \in S_k(\Gamma_r)$ に付随する Langlands [La]–Klingen [Kl] の非正則 Eisenstein 級数を

$$[f]^n_r(Z,s) := \sum_{M:\Delta_{n,r}\backslash\Gamma_n} \left(\frac{\det(\mathrm{Im}(M\langle Z\rangle))}{\det(\mathrm{Im}(M\langle Z\rangle^*))}\right)^s f(M\langle Z\rangle^*)\det(CZ+D)^{-k} \quad (3.1)$$

で定義する。ここで $s \in \mathbf{C}$ 、Z は H_n 上の変数、$M = \begin{pmatrix} A^{(n)} & B^{(n)} \\ C^{(n)} & D^{(n)} \end{pmatrix}$ は $\Delta_{n,r}\backslash\Gamma_n$ の一組の完全代表系をわたる。

$$M\langle Z\rangle := (AZ+D)(CZ+D)^{-1}$$

であり $M\langle Z\rangle^*$ は $M\langle Z\rangle$ の左上の $r \times r$ block である。(3.1) の右辺は任意の $\delta > 0$ に対し

$$\left\{(Z,s) \;\middle|\; \sigma(\mathrm{Re}(Z)) \leq \delta^{-1},\ \mathrm{Im}(Z) \geq \delta 1_n,\ \mathrm{Re}(s) \geq \frac{n+r+1-k}{2} + \delta\right\}$$

で一様に絶対収束する。$r=0$ のときは

$$\begin{aligned} E^{(n)}_k(Z,s) &:= [1]^n_0(Z,s) \\ &= \det(\mathrm{Im}(Z))^s \sum_{\{C,D\}} \det(CZ+D)^{-k}|\det(CZ+D)|^{-2s} \end{aligned} \quad (3.2)$$

とかく。(3.1), (3.2) は s の関数として、全 s-平面に有理型に解析接続される [Bö4, Di, Kal, La, Mi2]。

以下 $r>0$ とする。また $\mathbf{e}(x) := e^{2\pi i x}$ とし、σ を行列の trace とする。

Proposition. [Sh2](cf. [Mi3]) $k - 2\nu \geq \frac{n+r}{2} + 2$ をみたす $\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して $[f]^n_r(Z,s)$ は s の関数として $s = -\nu$ で正則であり、Fourier 展開

$$[f]^n_r(Z,-\nu) = \sum_{T\geq 0} a(T,Y,[f]^n_r(*,-\nu))\mathbf{e}(\sigma(TZ))$$

(T は size n の対称半正値半整数 (semi-integral) 行列全体をうごく）において各 $a(T, Y, [f]_r^n(*, -\nu))$ は Y^{-1} の成分の多項式になる。

ここで Y^{-1} の成分の多項式としての $a(T, Y, [f]_r^n(*, -\nu))$ の定数項を

$$c(T, [f]_r^n(*, -\nu))$$

とおく。以下ではこの $c(T, [f]_r^n(*, -\nu))$ の明示公式を与える。そのため記号の準備をする。A_n で size n の対称半正値半整数行列全体をあらわし、$A_n^+ := \{T \in A_n | T > 0\}$ とする。$Z \in H_r$ と $T \in A_n^+$ に対し

$$\vartheta_T^{(r)}(Z) := \sum_{G \in \mathbf{Z}^{(n,r)}} \mathbf{e}\left(\sigma(T[G]Z)\right)$$

を theta 関数とする。但し $T[G] := {}^tGTG$ である。これは Γ_r のある合同部分群に関する重さ $n/2$ の保型形式である。Γ_r のある合同部分群に関する保型形式 φ と ψ に対して

$$\varphi(Z) = \sum_{T \in A_r} a(T, \varphi)\mathbf{e}(\sigma(TZ))$$

などとかくとき

$$\tilde{D}(s, \varphi, \psi) := \sum_{T \in A_r^+/GL_r(\mathbf{Z})} \frac{a(T, \varphi)\overline{a(T, \psi)}}{\varepsilon(T)} \det(T)^{-s} \tag{3.3}$$

とおく。ここで $GL_n(\mathbf{Z})$ は A_n^+ に右から $T \mapsto T[U]$ で作用しているものと考えており、また T の固定群の位数を $\varepsilon(T)$ とかいている。

$E_{k-2\nu}^{(n)}(Z) := E_{k-2\nu}^{(n)}(Z, 0)$ の Fourier 展開を

$$E_{k-2\nu}^{(n)}(Z) = \sum_{T \in A_n} a_{k-2\nu}^{(n)}(T)\mathbf{e}(\sigma(TZ))$$

とかく。

Hecke eigenform $f(Z) \in S_k(\Gamma_r)$ に対しその standard L 関数を

$$L(s, f, \mathrm{St}) := \prod_{p\,\mathrm{prime}} \left\{ (1 - p^{-s}) \prod_{j=1}^{r} (1 - \alpha_j(p)p^{-s})(1 - \alpha_j(p)^{-1}p^{-s}) \right\}^{-1}$$

とする。ここで $(\alpha_1(p), \cdots, \alpha_r(p)) \in (\mathbf{C}^\times)^r$ は f の Satake p-parameters である。[Sh3] により、この Euler 積は任意の $\delta > 0$ に対し $\mathrm{Re}(s) \geq \frac{r}{2} + 1 + \delta$ で一様に絶対収束する。

写像 $\alpha\colon A_n^+ \longrightarrow \mathbf{C}$ が

$$\alpha(T[U]) = \alpha(T) \quad (\forall\, T \in A_n^+,\ \forall\, U \in GL_n(\mathbf{Z})) \tag{3.4}$$

をみたすとき、

$$\alpha(T) = \sum_{\substack{G \in GL_n(\mathbf{Z})\backslash \mathbf{Z}_*^{(n)} \\ T[G^{-1}] \in A_n^+}} \alpha^*(T[G^{-1}])$$

をみたす $\alpha^*\colon A_n^+ \longrightarrow \mathbf{C}$ が一意的に決まる（ここで $\mathbf{Z}_*^{(n)}$ は $\mathbf{Z}$ に成分をもつ n 次正則行列全体の集合)。α^* も (3.4) と同様の不変性をみたす [Bö-Ra]。

Theorem. $n \in \mathbf{Z}_{>0}$, $k \in 2\mathbf{Z}_{>0}$, $r \in \mathbf{Z}$, $0 < r < n$ とし、$f \in S_k(\Gamma_r)$ を Hecke eigenform とする。

$$k - 2\nu \geq \max\left(\frac{n+r}{2}, \frac{3}{2}r\right) + 2$$

をみたす任意の $\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ と任意の $T \in A_n^+$ に対し、次が成り立つ：

$$\left(\frac{c(T, [f]_r^n(*, -\nu))}{\det(T)^\nu}\right)^* = C_r^n(k, \nu)\zeta(k-2\nu)\prod_{j=1}^{r}\zeta(2k-4\nu-2j) \cdot a_{k-2\nu}^{(n)}(T)^* \cdot \frac{\tilde{D}(k-\nu-\frac{r+1}{2}, f, \vartheta_T^{(r)})}{L(k-r-2\nu, f, \mathrm{St})}. \tag{3.5}$$

但し

$$\Gamma_m(s) := \pi^{\frac{m(m-1)}{4}} \prod_{j=1}^{m} \Gamma(s - \frac{j-1}{2})$$

とおくとき

$$C_r^n(k, \nu) := (-1)^{\frac{rk}{2} + n\nu} 2^{\frac{r(r-1)}{2} - rk + 2n\nu} \pi^{(n+r)\nu - rk + \frac{r^2}{2} - \frac{rn}{2}} \frac{\Gamma_n(k-2\nu)}{\Gamma_{n-r}(k-\nu-\frac{r}{2})}.$$

Remark.
(1) $\nu = 0$ のとき、(3.5) は正則な場合の既知の結果 [Bö1, Bö-Ra, Ki2] と一致する。
(2) (3.5) の右辺の $a_{k-2\nu}^{(n)}(T)^*$ については明示公式が知られている [Kat2, Bö3, Ki1]。
(3) f の Fourier 係数がすべて代数的ならば、(3.5) の右辺を $\pi^{-\nu(n-r)}$ 倍したものも代数的数である [Mi3]。
(4) Y^{-1} の多項式 $a(T, Y, [f]_r^n(*, -\nu))$ のすべての係数を上と同じくらい明示的に求めることは難しそうである。しかし triple product L-function の特殊値の計算には、上の定理で十分なように思われる（第 5 節参照)。

4. 明示公式の証明の概略

[Ga1][Bö4] により

$$
\begin{aligned}
&\left(f, E_k^{(n+r)}\left(\begin{pmatrix} -\bar{Z}^{(n)} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}, \bar{s}\right)\right) \\
=&\gamma_{r,k}(s)\frac{L(2s+k-r,f,\mathrm{St})}{\zeta(2s+k)\prod_{j=1}^{r}\zeta(4s+2k-2j)}[f]_r^n(Z,s)
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

である（$\gamma_{r,k}(s)$ はある Gamma factor)。左辺の Fourier 展開を

$$\sum_T c(T,Y,s)\mathbf{e}(\sigma(TX))$$

（T は size n の対称半整数行列全体をうごく）とかく。以下 $T>0$ とする。(4.1) により、$c(T,Y,-\nu)e^{2\pi\sigma(TY)}$（は Y^{-1} の多項式であるが、それ）の定数項を求めることに問題は帰着する。[Bö-SP] により $c(T,Y,s)$ は confluent hypergeometric function の積分を含む複雑な級数として表されるが、特に $Y=\lambda T^{-1}$ ($\lambda>0$) のときには簡単になって

$$c(T,\lambda T^{-1},s)e^{2\pi n\lambda}=h(s,\lambda)\mathcal{A}(T,s) \tag{4.2}$$

の形になる。([Bö-SP] では $\lambda=1$ のとき、このことが注意されている。）ここで $h(s,\lambda)$ は confluent hypergeometric function を含む積分で表される関数、$\mathcal{A}(T,s)$ はある Dirichlet 級数で、$\mathcal{A}(T,s)^*$ の $s=-\nu$ での値は大体

$$\mathcal{A}(T,-\nu)^* \doteqdot a_{k-2\nu}^{(n)}(T)^*\cdot\tilde{D}(k-\nu-\frac{r+1}{2},f,\vartheta_T^{(r)})$$

となる。また [Mi3] により

$$c(T,Y,-\nu)e^{2\pi\sigma(TY)}=\det(Y)^{-\nu}p(Y) \tag{4.3}$$

とおくと $p(Y)$ は Y の成分の多項式で、さらに $\det(Y)^{-\nu}p(Y)$ は Y^{-1} の多項式となる。このことから (4.2) で $s=-\nu$ としたものは λ^{-1} の多項式でその定数項は (4.3) の（Y^{-1} の成分の多項式としての）定数項に等しいことが証明される。一方、confluent hypergeometric function に関する考察から、$h(-\nu,\lambda)$ の（λ^{-1} の多項式としての）定数項は簡単な定数として求まる。以上をあわせて、(4.3) の定数項の $\mathcal{A}(T,-\nu)$ による表示が求まり、(4.1) とあわせて求める公式が得られる。

5. Triple product の特殊値

ここでは第 3 節の定理を次数 2 の場合に使って、triple product L-function の特殊値を計算する。$\Delta_{12}\in S_{12}(\Gamma_1)$ を normalized cusp form とするとき $L(22-\nu,\Delta_{12}^{\otimes 3})$ について以下考える。$\nu=4$ の場合に説明する。[Mi3] により、概正則保型形式のある空間 $N_{12,4}(\Gamma_1)$ があって

$$[\Delta_{12}]_1^2\left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix},-4\right)\in N_{12,4}(\Gamma_1)\otimes_{\mathbf{C}}N_{12,4}(\Gamma_1)$$

となる。定義は省くが $N_{12,4}(\Gamma_1)$ は 6 次元で

$$\Delta_{12},\ E_{12},\ \delta_{10}E_{10},\ \delta_8^{(2)}E_8,\ \delta_6^{(3)}E_6,\ \delta_4^{(4)}E_4$$

によって張られる。[Mi3] のように Siegel operator Φ_t をつかうと

$$[\Delta_{12}]_1^2(*,-4)|\Phi_t = t^{-4}\Delta_{12} \quad (\forall t>0)$$

となることから、ある定数 $\xi \in \mathbf{C}$ があって

$$\begin{aligned}&[\Delta_{12}]_1^2\left(\begin{pmatrix} z & 0\\ 0 & w\end{pmatrix}, -4\right)\\ &= \xi\Delta_{12}(z)\Delta_{12}(w) + \frac{32\pi^4}{105}\left(\Delta_{12}(z)\delta_4^{(4)}E_4(w) + \Delta_{12}(w)\delta_4^{(4)}E_4(z)\right)\end{aligned} \tag{5.1}$$

となることが導かれる。両辺の Fourier 展開における $\mathbf{e}(z)\mathbf{e}(w)$ の係数 (は $\mathrm{Im}(z)^{-1}$ と $\mathrm{Im}(w)^{-1}$ に関する多項式だが、その定数項) をくらべて

$$\begin{aligned}\xi &= c\left(\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, [\Delta_{12}]_1^2(*,-4)\right)\\ &\quad + 2c\left(\begin{pmatrix} 1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}, [\Delta_{12}]_1^2(*,-4)\right)\\ &\quad - \frac{1024}{7}\pi^4\end{aligned} \tag{5.2}$$

が得られる。

$f \in S_k(\Gamma_1)$ を normalized Hecke eigenform とし、$-\det(2T)$ が fundamental discriminant であるような $T \in A_2^+$ をとる。この場合の明示公式 (3.5) は次の形になる：

$$\begin{aligned}&c(T,[f]_1^2(*,-\nu))\\ &= (-1)^{\nu+1}2^{2k-2\nu-3}\pi^{2k-3\nu-2}\frac{\Gamma(k-\nu)}{\Gamma(2k-2\nu-1)\Gamma(k-2\nu-1)}\\ &\quad \cdot \det(2T)^{\nu}\cdot L\left(2\nu+2-k, \left(\frac{-\det(2T)}{*}\right)\right)\\ &\quad \cdot \frac{D(k-\nu-1, f, \vartheta_T^{(1)})}{L_2(2k-2-2\nu, f)}\end{aligned} \tag{5.3}$$

$(\nu \in \mathbf{Z}\ , 0 \le \nu \le \frac{k}{2}-2.)$ ただし (3.3) のかわりに

$$D(s,\varphi,\psi) := \sum_{m=1}^{\infty} a(m,\varphi)\overline{a(m,\psi)}m^{-s}$$

とかいている。

$$\tilde{D}(s,\varphi,\psi)=\frac{1}{2}D(s,\varphi,\psi)$$

である。[Za, p. 147, Proposition 6] の方法 (そこの式の右辺は $(-1)^{\nu}$ 倍すべきである) により

$$\frac{D(7,\Delta_{12},\vartheta_N^{(1)})}{\pi^{11}(\Delta_{12},\Delta_{12})}=\begin{cases}\dfrac{2^{14}}{3^2\cdot 5^2\cdot 7} & \left(N=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\text{ のとき}\right),\\[2ex] \dfrac{2^{18}}{3^4\cdot 5^2\cdot 7} & \left(N=\begin{pmatrix}1&1/2\\1/2&1\end{pmatrix}\text{ のとき}\right),\end{cases}$$

また [Za, p. 116] により

$$\frac{L_2(14,\Delta_{12})}{\pi^{17}(\Delta_{12},\Delta_{12})}=\frac{2^{17}}{3^5\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13}.$$

さらに

$$L\left(-2,\left(\frac{-3}{*}\right)\right)=-\frac{2}{3^2},\quad L\left(-2,\left(\frac{-4}{*}\right)\right)=-\frac{1}{2}.$$

よって (5.3) より

$$c\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},[\Delta_{12}]_1^2(*,-4)\right)=\frac{2^9\pi^4}{5},$$

$$c\left(\begin{pmatrix}1&1/2\\1/2&1\end{pmatrix},[\Delta_{12}]_1^2(*,-4)\right)=\frac{2^7\pi^4}{5}.$$

従って (5.2) から

$$\xi=\frac{2^8\pi^4}{5\cdot 7}.$$

(5.1) より

$$\xi=\frac{\left(\left([\Delta_{12}]_1^2\left(\begin{pmatrix}z&0\\0&w\end{pmatrix},-\nu\right),\Delta_{12}(z)\right),\Delta_{12}(w)\right)}{(\Delta_{12},\Delta_{12})^2}$$

だから、(2.1) により $L(17,\Delta_{12}^{\otimes 3})$ が求まる。

以上のような計算が $\nu=0,1,2,3$ についても同様にできて、次が得られる：

Proposition. $17\leq m\leq 22$ なる整数 m に対して

$$A(m):=\frac{L(m,\Delta_{12}^{\otimes 3})}{\pi^{4m-33}(\Delta_{12},\Delta_{12})^3}$$

は以下の値をとる：

m	$A(m)$
17	0
18	$\dfrac{2^{47}}{3^{10}\cdot 5^6\cdot 7^4\cdot 11\cdot 13\cdot 17}$
19	$\dfrac{2^{46}}{3^{13}\cdot 5^5\cdot 7^5\cdot 11\cdot 13\cdot 17}$
20	$\dfrac{2^{48}}{3^{16}\cdot 5^6\cdot 7^4\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19}$
21	$\dfrac{2^{54}}{3^{16}\cdot 5^9\cdot 7^6\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19}$
22	$\dfrac{2^{57}}{3^{12}\cdot 5^7\cdot 7^5\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 691^2}$

従って [Za, p, 120] で予想されていた symmetric third L-function $L_{3,\Delta}(m)$ の値は全て正しい。

Remark. 上の表を得るためには、電卓でできる位の計算で足りる。

Mixed weight case の例として次の値を挙げる。 ここで $\Delta_{16}\in S_{16}(\Gamma_1)$ は normalized cusp form である。

$$\frac{L(26,\Delta_{12}\otimes\Delta_{16}\otimes\Delta_{16})}{\pi^{63}(\Delta_{12},\Delta_{12})(\Delta_{16},\Delta_{16})^2}=\frac{2^{63}}{3^{18}\cdot 5^{10}\cdot 7^5\cdot 11^3\cdot 13^3\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 691}.$$

上にあらわれた、特殊値の有理数部分の分母については [Mi1] で以前考察した。

References

[Bö1] Böcherer, S., *Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen*, Math. Z. **183** (1983), 21–46.

[Bö2] Böcherer, S., *Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen II*, Math. Z. **189** (1985), 81-110.

[Bö3] Böcherer, S., *Über die Fourierkoeffizienten der Siegelschen Eisensteinreihen*, Manuscr. math. **45** (1984), 273–288.

[Bö4] Böcherer, S., *Über die Funktionalgleichung automorpher L-Funktionen zur Siegelschen Modulgruppe*, J. Reine Angew. Math. **362** (1985), 146–168.

[Bö-Ra] Böcherer, S., Raghavan, S., *On Fourier coefficients of Siegel modular forms*, J. reine angew. Math. **384** (1988), 80–101.

[Bö-SP] Böcherer, S., Schulze-Pillot, R., *On a theorem of Waldspurger and on Eisenstein series of Klingen type*, Math. Ann. **288** (1990), 361–388.

[De] Deligne, P., *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, Proc. Symp. Pure Math., vol. 33, Part 2, 1979, pp. 313–346.

[Di] Diehl, B., *Die analytische Fortsetzung der Eisensteinreihe zur Siegelschen Modulgruppe*, J. Reine Angew. Math. **317** (1980), 40–73.

[Ga1] Garrett, P. B., *Pullbacks of Eisenstein series; applications*, Prog. Math., vol. 46, Birk-häuser, 1984, pp. 114–137.

[Ga2] Garrett, P. B., *Decomposition of Eisenstein series: Rankin triple products*, Ann. Math. **125** (1987), 209–235.

[Ib1] Ibukiyama, T., *Invariant harmonic polynomials on polyspheres and some related differential equations*, Unpublished note (1991).

[Ib2] Ibukiyama, T., *On differential operators on automorphic forms and invariant pluri-harmonic polynomials*, Unpublished note (1991).

[Ik] Ikeda, T., *On the location of poles of the triple L-functions*, Compositio Math. **83** (1992), 187–237.

[Kal] Kalinin, V. L., *Eisenstein series on the symplectic group*, Math. USSR Sbornik **32** (1977), 449–476.

[Kat1] Katsurada, H., *An explicit formula for the Fourier coefficients of Siegel-Eisenstein series of degree 3*, Nagoya Math. J. **146** (1997), 199–223.

[Kat2] Katsurada, H., *An explicit formula for Siegel series*, Amer. J. Math. **121** (1999), 415–452.

[Ki1] Kitaoka, Y., *Dirichlet series in the theory of Siegel modular forms*, Nagoya Math. J. **95** (1984), 73–84.

[Ki2] Kitaoka, Y., *A note on Klingen's Eisenstein series*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **60** (1990), 95–114.

[Kl] Klingen, H., *Zum Darstellungssatz für Siegelsche Modulformen*, Math. Z. **102** (1967), 30–43.

[La] Langlands, R. P., *On the Functional Equations Satisfied by Eisenstein Series*, Lect. Notes in Math. vol. 544, Springer, 1976.

[Mi1] Mizumoto, S., *Integrality of critical values of triple product L-functions*, Lect. Notes in Math., vol. 1434, Springer, 1990, pp. 188–195.

[Mi2] Mizumoto, S., *Eisenstein series for Siegel modular groups*, Math. Ann. **297** (1993), 581–625; *Corrections*, Ibid. **307** (1997), 169–171.

[Mi3] Mizumoto, S., *Nearly holomorphic Eisenstein liftings*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **67** (1997), 173–194.

[Or] Orloff, T., *Special values and mixed weight weight triple products (with an appendix by Don Blasius)*, Inv. Math. **90** (1987), 169–180.

[Sa] Satoh, T., *Some remarks on triple L-functions*, Math. Ann. **276** (1987), 687–698.

[Sh1] Shimura, G., *Nearly holomorphic functions on hermitian symmetric spaces*, Math. Ann. **278** (1987), 1–28.

[Sh2] Shimura, G., *Eisenstein series and zeta functions on symplectic groups*, Inv. Math. **119** (1995), 539–584.

[Sh3] Shimura, G., *Convergence of zeta functions on symplectic and metaplectic groups*, Duke Math. J. **82** (1996), 327–347.

[Za] Zagier, D., *Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields*, Lect. Notes in Math., vol. 627, Springer, 1977, pp. 105–169.