数理解析研究所講究録
1174 巻 2000 年 96-108

可能性情報の下での 2 段階計画問題とその一解法

大阪大学大学院工学研究科　乾口 雅弘 (Masahiro Inuiguchi)
大阪大学大学院工学研究科　谷野 哲三 (Tetsuzo Tanino)

概要

本研究では，確率計画問題に対して提案されている 2 段計画問題 (リコース問題) によるアプローチを非確率的な不明確さを伴う線形計画問題に適用する．ここでは，線形計画問題の係数が不明確で，その取りうる範囲が凸多面体として与えられる場合を扱う．この問題が第 1 段の決定変数に関する凸計画問題となることが示される．また，凸多面体の端点集合が与えられた場合に，この問題が双対角形構造をした線形計画問題に帰着できることが示される．緩和法に基づいた解法が提案される．この方法では，一般に，部分問題として max-min 問題あるいは双線形計画問題を解く必要がある．そこで，いくつかの特別な場合の部分問題の解法が考察される．

Key Words:　2 段計画法，リコース問題，min-max 決定，線形計画法，緩和法
分枝限定法

1　はじめに

不確実性のもとでの計画法として，確率計画法 [1][2][3] や可能性計画法 [4][5] が考えられている．確率計画法は，機会制約条件計画法，2 段計画法，分布問題に分類でき [1]，古くから研究されている [1][2][3]．一方，可能性計画法は確率計画法に比べれば歴史は浅く，機会制約条件計画法，分布問題に対応するものは提案されているものの，2 段計画法に対応するものは未だあまり研究されていない [6]．可能性計画問題に対する 2 段計画法は，著者らの知る限り，Itoh と Ishii [7] によるもののみである．文献 [7] では，右辺値が不明確でファジィ数として与えれる単純リコース行列をもつ線形計画問題が，可能性測度に基づき取り扱われている．

本研究では，制約条件の行列の係数，右辺値，目的関数の係数が不明確でその取りうる範囲が凸多面体で与えられる完全リコース行列をもつ線形計画問題を取り扱う．この問題を必然性測度を用いる場合に相当する min-max 決定基準に基づき定式化する．定式化された問題が，第 1 段階の決定変数に関する凸計画問題になることを示す．また，不明確なパラメータの取りうる範囲を示す凸多面体の頂点集合が得られている場合には，大規模な線形計画問題に帰着できることを示す．次に，緩和法に基づく解法を示し，部分問題として，min-max 問題 [8] を解かなければならないことを述べる．いくつかの特別な場合を取り上げ，問題の解法について議論する．

2 不明確な係数をもつ線形計画問題とその取り扱い

本研究では，次の不明確な係数をもつ線形計画問題を取り扱う．

$$
\begin{array}{ll}
\underset{\boldsymbol{x}}{\text{minimize}} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0 \\
& A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1 \ ; \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & 0 \\ A_1 & \boldsymbol{b}_1 \\ A_2 & \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} \in \Theta \\
& A_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2 \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
\tag{1}
$$

ただし，A_0, A_1, A_2 は，それぞれ，$m_0 \times n, m_1 \times n, m_2 \times n$ 行列である．また，$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ は，n, m_0, m_1, m_2 次元のベクトルである．$\boldsymbol{x}$ は n-次元決定変数ベクトルである．A_0 と $\boldsymbol{b}_0$ は明確にわかっているのに対し，$A_1, A_2, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ は明確にわかっておらず，これらをまとめた行列の取りうる範囲が Θ として与えられている．ここでは，特に，Θ が凸多面体，すなわち，

$$
\Theta = \{Q \mid FQ\boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{g}\} \tag{2}
$$

と与えられる場合を取り扱う．ここで，Q は右上隅の成分を 0 とする $(m_1+m_2+1)\times(n+1)$ 行列，F は $q \times (m_1+m_2+1)$ 行列，$\boldsymbol{k}$ は $(n+1)$ 次元ベクトルである．

$\boldsymbol{x}$ を決定する前に，$A_1, A_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}$ の真の値を知ることができないため，問題 (1) の目的関数値や制約条件の両辺の値は正確に予測できない．したがって，$A_1, A_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ が Θ 内でどのような値を取ろうとも必ず実行可能となる解の存在は保証できない．本研究では，制約を満たしていない場合には保証金を支払ったり，コストの伴う 2 次的処置により何らかの対処が可能であるとすると，問題 (1) は次の問題に定式化できる．

$$
\begin{array}{l}
\underset{\boldsymbol{x}}{\text{minimize}} \ \underset{A_1,A_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{c}}{\text{maximize}} \ \underset{\boldsymbol{y}}{\text{minimize}} \ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\
\qquad \text{subject to} \quad A_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0 \\
\qquad\qquad\qquad\quad A_1\boldsymbol{x} + W_1\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}_1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad A_2\boldsymbol{x} + W_2\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{b}_2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \\
\qquad\qquad\qquad\quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & 0 \\ A_1 & \boldsymbol{b}_1 \\ A_2 & \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} \in \Theta.
\end{array}
\tag{3}
$$

ここで，$\boldsymbol{q} > \boldsymbol{0}$ は 2 次的処置の単当たりのコストを示し，W_1, W_2 は変数 y_i に対応する 2 次的処置 1 単位当たりの処理量を示す行列である．本研究では，第 1 段階での任意の決定 $\boldsymbol{x}$ および Θ 内の任意の実現値に対して，制約条件を満たす $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ が存在するように行列 W_1, W_2 が与えられていると仮定する．このような行列 W_1, W_2 は完全リコース行列と呼ばれる [3].

3 性質

問題 (3) に対して，次の定理が成立する．

定理 1 問題 *(3)* は，$\boldsymbol{x}$ に関する凸計画問題となる．

定理 1 より，凸計画問題に対して提案されている最適化手法を用いて問題 (3) を解くことも考えられる．しかし，問題 (3) を凸計画問題としてみる場合の目的関数は最適値関数であり，微分不可能な関数となるので，容易に解けるとは限らない [9].

また，$V(\Theta)$ を Θ の頂点集合とするとき，次の定理を得る．

定理 2 問題 *(3)* は，次の計画問題と等価である．

$$
\begin{array}{ll}
\underset{\boldsymbol{x}}{\text{minimize}} \quad \underset{A_1,A_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{c}}{\text{maximize}} \quad \underset{\boldsymbol{y}}{\text{minimize}} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{subject to} & A_0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_0 \\
& A_1\boldsymbol{x}+W_1\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}_1 \\
& A_2\boldsymbol{x}+W_2\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{b}_2 \\
& \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0} \\
& \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & 0 \\ A_1 & \boldsymbol{b}_1 \\ A_2 & \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} \in V(\Theta)
\end{array}
\tag{4}
$$

$V(\Theta)$ は有限集合であるので，

$$
V(\Theta)=\left\{\left.\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}^{j\mathrm{T}} & 0 \\ A_1^j & \boldsymbol{b}_1^j \\ A_2^j & \boldsymbol{b}_2^j \end{pmatrix}\ \right|\ j=1,2,\ldots,v\right\}
\tag{5}
$$

とすると，問題 (4) は次の大規模な線形計画問題になる．

$$
\begin{array}{ll}
\underset{\boldsymbol{x},z,\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_v}{\text{minimize}} & z \\
\text{subject to} & A_1^j\boldsymbol{x}+W_1\boldsymbol{y}_j=\boldsymbol{b}_1^j,\ j=1,2,\ldots,v \\
& A_2^j\boldsymbol{x}+W_2\boldsymbol{y}_j\leq\boldsymbol{b}_2^j,\ j=1,2,\ldots,v \\
& \boldsymbol{c}^{j\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_j\leq z,\ j=1,2,\ldots,v \\
& \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{y}_j\geq\boldsymbol{0},\ j=1,2,\ldots,v
\end{array}
\tag{6}
$$

問題 (6) は，双対角形構造をしているので，線形計画法の分解手法により解くことができる [10]．しかし，これを適用するには，$V(\Theta)$ のすべての要素がわかっている必要がある．

4 緩和法による解法

前節の議論により，問題 (3) は $\boldsymbol{x}$ に関する凸計画問題になることがわかった．したがって，この性質を利用して解くことができるが，その目的関数は微分不可能となるので，微分可能な場合ほど容易ではない．一方，$V(\Theta)$ のすべての要素がわかっている場合には，双対角形構造をした線形計画問題になることがわかったが，これを適用するには，予め $V(\Theta)$ の要素をすべて列挙しておく必要がある．$V(\Theta)$ の要素を列挙することは多くの計算コストがかかると考えられる．ここでは，問題 (**??**) が min-max 問題 [8] であることから，緩和法に基づく解法を考察する．

緩和法を適用すれば，次のアルゴリズムが得られる．

[緩和法に基づくアルゴリズム]

Step 1. $k=1$ とする．任意に (頂点が望ましい)，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}(0)^{\mathrm{T}} & 0 \\ A_1(0) & \boldsymbol{b}_1(0) \\ A_2(0) & \boldsymbol{b}_2(0) \end{pmatrix} \in \Theta.$$

を選び，次の線形計画問題を解き，得られた最適解を $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$，最適値を z^0 とする．

$$\begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}{\text{minimize}} & \boldsymbol{c}(0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0 \\ & A_1(0)\boldsymbol{x} + W_1\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}_1(0) \\ & A_2(0)\boldsymbol{x} + W_2\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{b}_2(0) \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{7}$$

Step 2. max-min 問題，

$$\begin{array}{lll} \underset{A_1,A_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{c}}{\text{maximize}} & \underset{\boldsymbol{y}}{\text{minimize}} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{k-1} + \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ & \text{subject to} & A_1\boldsymbol{x}^{k-1} + W_1\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}_1 \\ & & A_2\boldsymbol{x}^{k-1} + W_2\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{b}_2 \\ & & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \\ & & \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & 0 \\ A_1 & \boldsymbol{b}_1 \\ A_2 & \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} \in \Theta \end{array} \tag{8}$$

を解き，得られた最適解を $(A_1(k), A_2(k), \boldsymbol{b}_1(k), \boldsymbol{b}_2(k), \boldsymbol{c}(k), \boldsymbol{y}')$，最適値を z' とする．

Step 3. $z' \leq z^{k-1}$ ならば，アルゴリズムを終了する．この場合，最適解 $\boldsymbol{x}^{k-1}$，最適値 z^{k-1} が得られる．

Step 4 線形計画問題，

$$\begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{x},z,\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_k}{\text{minimize}} & z \\ \text{subject to} & A_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0 \\ & A_1(j)\boldsymbol{x} + W_1\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{b}_1(j),\ j = 0,1,\ldots,k \\ & A_2(j)\boldsymbol{x} + W_2\boldsymbol{y}_j \leq \boldsymbol{b}_2(j),\ j = 0,1,\ldots,k \\ & \boldsymbol{c}(j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_j \leq z,\ j = 0,1,\ldots,k \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \ \boldsymbol{y}_j \geq \boldsymbol{0},\ j = 0,1,\ldots,k \end{array} \tag{9}$$

を解き，得られた最適解を $(\boldsymbol{x}^k, \hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{\boldsymbol{y}}_2, \ldots, \hat{\boldsymbol{y}}_k)$，最適値を z^k とする．$k = k+1$ として，Step 2 へ戻る．

このアルゴリズムで最も困難な点は，max-min 問題 (8) を解かなければならない点にある．この問題は，双線形計画問題になるので，一般に，外部近似法や内部近似法，切除平面法など [11] により解くことができる．

注意 1 上のアルゴリズムの *Step 2, 3* では，目的関数値 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{k-1}+\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ が z^{k-1} より大きくなる問題 *(8)* の実行可能解 $(A_1(k),A_2(k),\boldsymbol{b}_1(k),\boldsymbol{b}_2(k),\boldsymbol{c}(k),\boldsymbol{y}')$ の存否を調べることを目的としているので，必ずしも問題 *(8)* の最適解を求める必要はない．上述のような実行可能解 $(A_1(k),A_2(k),\boldsymbol{b}_1(k),\boldsymbol{b}_2(k),\boldsymbol{c}(k),\boldsymbol{y}')$ が見つかれば，直ちに *Step 4* に進んでもよい．

以下では，特別な場合を取り上げ，問題 (8) あるいは問題 (3) の解法を考察する．

5 特別な場合

5.1 特別な Θ とその性質

特別な場合について，max-min 問題 (8)，あるいは，問題 (3) の解法について考察する．$V(\Theta)$ の要素が列挙されている場合には，複数の線形計画問題を解くことにより，問題 (8) を解くことができる．ここでは，主として，

$$\Theta=\left\{\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\\ A_2 & \boldsymbol{b}_2\end{pmatrix}\ \middle|\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{L}}\le D^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}\le\boldsymbol{c}^{\mathrm{R}},\ A_i^{\mathrm{L}}\le A_iD\le A_i^{\mathrm{R}},\ \boldsymbol{b}_i^{\mathrm{L}}\le\boldsymbol{b}_i\le\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{R}},\ i=1,2\right\} \tag{10}$$

と与えられる場合を考える．この場合次の定理が成立する．

定理 3 式 *(10)* が成立するとき，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ の範囲は次の閉区間となる．

$$\left[\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{C}^{\mathrm{T}}}D^{-1}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}^{\mathrm{W}^{\mathrm{T}}}|D^{-1}\boldsymbol{x}|,\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{C}^{\mathrm{T}}}D^{-1}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}^{\mathrm{W}^{\mathrm{T}}}|D^{-1}\boldsymbol{x}|\ \right] \tag{11}$$

ただし，$|(r_1,r_2,\ldots,r_n)^{\mathrm{T}}|=(|r_1|,|r_2|,\ldots,|r_n|)^{\mathrm{T}}$ であり，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{C}}$，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{W}}$ は次式で定められる．

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{C}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}^{\mathrm{L}}+\boldsymbol{c}^{\mathrm{R}}),\qquad \boldsymbol{c}^{\mathrm{W}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}^{\mathrm{R}}-\boldsymbol{c}^{\mathrm{L}}) \tag{12}$$

同様に，$A_i\boldsymbol{x}$ *(*$i=1,2$*)* の範囲は次のようになる．

$$\left\{\boldsymbol{d}\mid A_i^{\mathrm{C}}D^{-1}\boldsymbol{x}-A_i^{\mathrm{W}}|D^{-1}\boldsymbol{x}|\le\boldsymbol{d}\le A_i^{\mathrm{C}}D^{-1}\boldsymbol{x}+A_i^{\mathrm{W}}|D^{-1}\boldsymbol{x}|\right\} \tag{13}$$

ただし，A_i^{C}，A_i^{W} $(i=1,2)$ は次式で定められる．

$$A_i^{\mathrm{C}}=\frac{1}{2}(A_i^{\mathrm{L}}+A_i^{\mathrm{R}}),\qquad A_i^{\mathrm{W}}=\frac{1}{2}(A_i^{\mathrm{R}}-A_i^{\mathrm{L}}) \tag{14}$$

5.2 $m_1=0$ のとき

定理 3 より，$m_1=0$ のとき，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ および $A_2\boldsymbol{x}$ が大きく，$\boldsymbol{b}_2$ が小さくなる $(A_2,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{c})$ を考えれば良いので，問題 (3) は次の問題と等価になる．

$$\begin{array}{ll}\underset{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}{\text{minimize}} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{C}^{\mathrm{T}}}D^{-1}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}^{\mathrm{W}^{\mathrm{T}}}|D^{-1}\boldsymbol{x}|+\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\\ \text{subject to} & A_0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_0\\ & A_2^{\mathrm{C}}D^{-1}\boldsymbol{x}+A_2^{\mathrm{W}}|D^{-1}\boldsymbol{x}|+W_2\boldsymbol{y}\le\boldsymbol{b}_2^{\mathrm{L}}\\ & \boldsymbol{x}\ge\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}\ge\boldsymbol{0}\end{array} \tag{15}$$

さらに，この問題は補助変数 $\boldsymbol{w}$ を導入することにより，次のように線形計画問題に帰着される．

定理 4 問題 *(15)* は次の線形計画問題と等価である．

$$\begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}{\text{minimize}} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{C}^{\mathrm{T}}} D^{-1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^{\mathrm{W}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0 \\ & A_2^{\mathrm{C}} D^{-1}\boldsymbol{x} + A_2^{\mathrm{W}}\boldsymbol{w} + W_2\boldsymbol{y} \le \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{L}} \\ & D^{-1}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{w},\ -D^{-1}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{w} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{w} \ge \boldsymbol{0} \end{array} \tag{16}$$

5.3 リコース行列が特別な場合

W_1, W_2 が次のように与えられる場合を考えよう．

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & -V & \\ & & U \end{pmatrix} \tag{17}$$

ただし，V は正則行列である．W_1，W_2 の特殊構造に合わせて，$\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{q}$ を $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_1^{+\mathrm{T}}, \boldsymbol{y}_1^{-\mathrm{T}}, \boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_1^{+\mathrm{T}}, \boldsymbol{q}_1^{-\mathrm{T}}, \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ と三つに分解すると，$\boldsymbol{y}_1^{+}$，$\boldsymbol{y}_1^{-}$ は次のように一意に定まる．

$$\boldsymbol{y}_1^{+} = \max(\boldsymbol{0}, V^{-1}(\boldsymbol{b}_1 - A_1\boldsymbol{x}^{k-1})), \qquad \boldsymbol{y}_1^{-} = \max(\boldsymbol{0}, V^{-1}(A_1\boldsymbol{x}^{k-1} - \boldsymbol{b}_1)) \tag{18}$$

ただし，max はベクトルの各成分ごとにとるものとする．

このことより，問題 (8) は次のように変形される．

$$\begin{array}{ll} \underset{A_1,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{y}_1^{+},\boldsymbol{y}_1^{-}}{\text{maximize}} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{C}^{\mathrm{T}}} D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1} + \boldsymbol{c}^{\mathrm{W}^{\mathrm{T}}}|D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1}| + \boldsymbol{q}_1^{+\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1^{+} + \boldsymbol{q}_1^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1^{-} + \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 \\ \text{subject to} & A_1\boldsymbol{x}^{k-1} + V\boldsymbol{y}_1^{+} - V\boldsymbol{y}_1^{-} = \boldsymbol{b}_1 \\ & A_2^{\mathrm{C}} D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1} + A_2^{\mathrm{W}}|D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1}| + U\boldsymbol{y}_2 \le \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{L}} \\ & \boldsymbol{y}_1^{+} \ge \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}_1^{-} \ge \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}_2 \ge \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}_1^{+\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1^{-} = 0 \\ & A_1^{\mathrm{L}} \le A_1 D \le A_1^{\mathrm{R}},\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{L}} \le \boldsymbol{b}_1 \le \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{R}} \end{array} \tag{19}$$

問題 (19) は，相補条件 $\boldsymbol{y}_1^{+\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1^{-} = 0$ を除くと，線形計画問題になる．$\boldsymbol{y}^{+} = (y_{11}^{+}, y_{12}^{+}, \ldots, y_{1m_1}^{+})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}^{-} = (y_{11}^{-}, y_{12}^{-}, \ldots, y_{1m_1}^{-})^{\mathrm{T}}$ と定めると，相補条件 $\boldsymbol{y}_1^{+\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1^{-} = 0$ を除いた問題から始め，$y_{1i}^{+} = 0$ あるいは $y_{1i}^{-} = 0$ を加えていく分枝限定法の適用が考えられる．しかし，次の定理に示すように，この分枝限定法の節点で解かれる問題の多くは，実行可能解が存在すれば非有界解をもつ．

定理 5 Y^{+} と Y^{-} を，$Y^{+} \cap Y^{-} = \emptyset$ および $Y^{+} \cup Y^{-} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ $(Y^{+} \cup Y^{-} \neq \{1, 2, \ldots, m\})$ を満たす添え字集合とする．次の線形計画問題に実行可能解が存在すれば必ず非有界解が存在する．

$$\begin{array}{ll} \underset{A_1,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{y}_1^{+},\boldsymbol{y}_1^{-}}{\text{maximize}} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{C}^{\mathrm{T}}} D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1} + \boldsymbol{c}^{\mathrm{W}^{\mathrm{T}}}|D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1}| + \boldsymbol{q}_1^{+\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1^{+} + \boldsymbol{q}_1^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1^{-} + \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 \\ \textit{subject to} & A_1\boldsymbol{x}^{k-1} + V\boldsymbol{y}_1^{+} - V\boldsymbol{y}_1^{-} = \boldsymbol{b}_1 \\ & A_2^{\mathrm{C}} D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1} + A_2^{\mathrm{W}}|D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1}| + U\boldsymbol{y}_2 \le \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{L}} \\ & \boldsymbol{y}_1^{+} \ge \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}_1^{-} \ge \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}_2 \ge \boldsymbol{0},\ y_{1i}^{+} = 0,\ i \in Y^{+},\ y_{1i}^{-} = 0,\ i \in Y^{-} \\ & A_1^{\mathrm{L}} \le A_1 D \le A_1^{\mathrm{R}},\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{L}} \le \boldsymbol{b}_1 \le \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{R}} \end{array} \tag{20}$$

分枝限定法の各頂点では，線形計画問題 (20) が解かれるので，その解が非有界解となれば，その頂点では終端できないことになる．したがって，上の性質は計算効率性の点で好ましくない．そこで，$\boldsymbol{y}^-$，$\boldsymbol{y}^+$ の上限値について考察しよう．

V^{-1^+}，V^{-1^-} を次のように定義する．

$$V^{-1^+} = \max(V^{-1}, O), \qquad V^{-1^-} = \min(V^{-1}, O) \tag{21}$$

ただし，O は零行列で，max および min は行列の成分ごとに取られるものとする．このとき，次の定理を得る．

定理 6 $\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}^{k-1})$，$\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}^{k-1})$ を

$$\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}^{k-1}) = A_1^{\mathrm{C}} D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1} - A_1^{\mathrm{W}}|D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1}| \tag{22}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}^{k-1}) = A_1^{\mathrm{C}} D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1} + A_1^{\mathrm{W}}|D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1}| \tag{23}$$

と定めるとき，式 *(18)* で定められる $\boldsymbol{y}_1^+$，$\boldsymbol{y}_1^-$ について次が成立する．

$$\boldsymbol{y}_1^+ \leq \max\left(\boldsymbol{0},\ V^{-1^+}\left(\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{R}} - \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}^{k-1})\right) + V^{-1^-}\left(\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{L}} - \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}^{k-1})\right)\right) \tag{24}$$

$$\boldsymbol{y}_1^- \leq \max\left(\boldsymbol{0},\ V^{-1^+}\left(\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}^{k-1}) - \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{L}}\right) + V^{-1^-}\left(\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}^{k-1}) - \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{R}}\right)\right) \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_1^+ + \boldsymbol{y}_1^- \leq \max\Big(&V^{-1^+}\left(\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{R}} - \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}^{k-1})\right) + V^{-1^-}\left(\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{L}} - \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}^{k-1})\right),\\ &V^{-1^+}\left(\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}^{k-1}) - \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{L}}\right) + V^{-1^-}\left(\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}^{k-1}) - \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{R}}\right)\Big)\end{aligned} \tag{26}$$

ただし，max は各成分ごとにとるものとする．

いま，$v_j^+(\boldsymbol{x}^{k-1})$ と $v_j^-(\boldsymbol{x}^{k-1})$ を

$$\begin{aligned}v_j^+(\boldsymbol{x}^{k-1}) &= \max\left(\boldsymbol{0},\ V^{-1^+}\left(\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{R}} - \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}^{k-1})\right) + V^{-1^-}\left(\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{L}} - \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}^{k-1})\right)\right)\\ &\quad \text{の第 } j \text{ 成分}\\ v_j^-(\boldsymbol{x}^{k-1}) &= \max\left(\boldsymbol{0},\ V^{-1^+}\left(\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}^{k-1}) - \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{L}}\right) + V^{-1^-}\left(\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}^{k-1}) - \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{R}}\right)\right)\\ &\quad \text{の第 } j \text{ 成分}\end{aligned}$$

と定め，添え字集合 $J^+(\boldsymbol{x}^{k-1})$，$J^-(\boldsymbol{x}^{k-1})$ を

$$J^+(\boldsymbol{x}^{k-1}) = \{j \mid v_j^+(\boldsymbol{x}^{k-1}) < v_j^-(\boldsymbol{x}^{k-1}),\ j \in \{1, 2, \ldots, m_1\}\} \tag{27}$$

$$J^-(\boldsymbol{x}^{k-1}) = \{j \mid v_j^-(\boldsymbol{x}^{k-1}) < v_j^+(\boldsymbol{x}^{k-1})\ j \in \{1, 2, \ldots, m_1\}\} \tag{28}$$

と定めると，定理 6 より，問題 (19) は次の問題と等価になる．

$$\begin{aligned}\underset{A_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{y}^+, \boldsymbol{y}^-}{\text{maximize}}\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{C}^{\mathrm{T}}} D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1} + \boldsymbol{c}^{\mathrm{W}^{\mathrm{T}}}|D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1}| + \boldsymbol{q}_1^{+^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{y}_1^+ + \boldsymbol{q}_1^{-^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{y}_1^- + \boldsymbol{q}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{q}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2\\ \text{subject to}\quad & A_1\boldsymbol{x}^{k-1} + V\boldsymbol{y}_1^+ - V\boldsymbol{y}_1^- = \boldsymbol{b}_1\\ & A_2^{\mathrm{C}} D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1} + A_2^{\mathrm{W}}|D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1}| + U\boldsymbol{y}_2 \leq \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{L}}\\ & \boldsymbol{y}_1^+ \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}_1^- \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}_2 \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}_1^{+^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{y}_1^- = 0\\ & A_1^{\mathrm{L}} \leq A_1 D \leq A_1^{\mathrm{R}},\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{L}} \leq \boldsymbol{b}_1 \leq \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{R}}\\ & y_{1j}^+ \leq v_j^+(\boldsymbol{x}^{k-1}),\ j \in J^+(\boldsymbol{x}^{k-1})\\ & y_{1j}^- \leq v_j^-(\boldsymbol{x}^{k-1}),\ j \in J^-(\boldsymbol{x}^{k-1})\\ & y_{1j}^+ + y_{1j}^- \leq v_j^+(\boldsymbol{x}^{k-1}),\ j \in \{1, 2, \ldots, m_1\}\backslash J^+(\boldsymbol{x}^{k-1})\\ & y_{1j}^+ + y_{1j}^- \leq v_j^-(\boldsymbol{x}^{k-1}),\ j \in J^+(\boldsymbol{x}^{k-1})\end{aligned} \tag{29}$$

したがって，問題 (19) の代わりに，問題 (29) を分枝限定法で解けばよい．この際，分枝限定法の各頂点で解かれる問題は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\underset{A_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{y}^+, \boldsymbol{y}^-}{\text{maximize}} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{C}\mathrm{T}} D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1} + \boldsymbol{c}^{\mathrm{W}\mathrm{T}}|D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1}| + {\boldsymbol{q}_1^+}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1^+ + {\boldsymbol{q}_1^-}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1^- + {\boldsymbol{q}_2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 + {\boldsymbol{q}_2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 \\
\text{subject to} \quad & A_1\boldsymbol{x}^{k-1} + V\boldsymbol{y}_1^+ - V\boldsymbol{y}_1^- = \boldsymbol{b}_1 \\
& A_2^{\mathrm{C}} D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1} + A_2^{\mathrm{W}}|D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1}| + U\boldsymbol{y}_2 \le \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{L}} \\
& \boldsymbol{y}_1^+ \ge \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}_1^- \ge \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}_2 \ge \boldsymbol{0},\ y_{1i}^+ = 0,\ i \in Y^+,\ y_{1i}^- = 0,\ i \in Y^- \\
& A_1^{\mathrm{L}} \le A_1 D \le A_1^{\mathrm{R}},\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{L}} \le \boldsymbol{b}_1 \le \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{R}} \\
& y_{1j}^+ \le v_j^+(\boldsymbol{x}^{k-1}),\ j \in J^+(\boldsymbol{x}^{k-1}) \\
& y_{1j}^- \le v_j^-(\boldsymbol{x}^{k-1}),\ j \in J^-(\boldsymbol{x}^{k-1}) \\
& y_{1j}^+ + y_{1j}^- \le v_j^+(\boldsymbol{x}^{k-1}),\ j \in \{1, 2, \ldots, m_1\} \backslash J^+(\boldsymbol{x}^{k-1}) \\
& y_{1j}^+ + y_{1j}^- \le v_j^-(\boldsymbol{x}^{k-1}),\ j \in J^+(\boldsymbol{x}^{k-1})
\end{aligned}
\tag{30}
$$

制約条件の中に，$\boldsymbol{y}_1^+$，$\boldsymbol{y}^-$ の上限が与えられているので，問題 (30) に実行可能解が存在すれば，必ず有界な目的関数値をもつ最適解が存在する．

以上より，注意 1 を考慮して，問題 (29) を解く分枝限定法のアルゴリズムを作成すると，次のようになる．

[分枝限定法に基づくアルゴリズム]

Step 1. $\tilde{z} = -\infty$，$\mathcal{P} = \emptyset$ と初期化する．また，$Y^+(P_0) = Y^-(P_0) = \emptyset$ とおく．

Step 2. $Y^+ = Y^+(P_0)$，$Y^- = Y^-(P_0)$ として，問題 (30) の最適解 $(\hat{A}_1, \hat{\boldsymbol{b}}_1, \hat{\boldsymbol{y}}_1^+, \hat{\boldsymbol{y}}_1^-, \hat{\boldsymbol{y}}_2)$ と最適値 $\check{z}$ を求める．実行可能解が存在しなければ，終了する．この場合，問題 (3) に実行可能解は存在しない．

Step 3. $\tilde{z} = \max(\tilde{z}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{C}\mathrm{T}} D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1} + \boldsymbol{c}^{\mathrm{W}\mathrm{T}}|D^{-1}\boldsymbol{x}^{k-1}| + {\boldsymbol{q}_1^+}^{\mathrm{T}}\max(\boldsymbol{0}, \hat{\boldsymbol{y}}_1^+ - \hat{\boldsymbol{y}}_{11}^-) + {\boldsymbol{q}_1^-}^{\mathrm{T}}\max(\boldsymbol{0}, \hat{\boldsymbol{y}}_1^- - \hat{\boldsymbol{y}}_1^+) + {\boldsymbol{q}_2}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{y}}_2)$ と更新する．$\tilde{z} > z^{k-1}$ ならば，Step 9 へ行く．

Step 4. ${\hat{\boldsymbol{y}}_1^+}{}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{y}}_1^- = 0$ ならば，Step 7 へ行く．

Step 5. $\check{z} \le \tilde{z}$ ならば，Step 7 へ行く．

Step 6. $\hat{y}_{1j}^+ \cdot \hat{y}_{1j}^- > 0$ なる j を選択する．$Y^+(P_1) = Y^+(P_0) \cup \{j\}$，$Y^-(P_1) = Y^-(P_0)$ とする問題 (P_1) と $Y^+(P_2) = Y^+(P_0)$，$Y^-(P_2) = Y^-(P_0) \cup \{j\}$ とする問題 (P_2) を生成する．$\mathcal{P} = \mathcal{P} \cup \{(P_1), (P_2)\}$ と更新する．

Step 7. $\mathcal{P} = \emptyset$ ならば，終了する．このとき，解 $(\hat{A}_1, \hat{\boldsymbol{b}}_1, \hat{\boldsymbol{y}}_1^+, \hat{\boldsymbol{y}}_1^-, \hat{\boldsymbol{y}}_2)$ が問題 (19) の最適解である．

Step 8. $\mathcal{P}$ から線形計画問題 (P_0) を選び，$\mathcal{P} = \mathcal{P} - \{(P_0)\}$ と更新する．Step 2 へ戻る．

Step 9. 終了する． このとき，解 $(\hat{A}_1, \hat{\boldsymbol{b}}_1, \max(\boldsymbol{0}, \hat{\boldsymbol{y}}_1^+ - \hat{\boldsymbol{y}}_1^-), \max(\boldsymbol{0}, \hat{\boldsymbol{y}}_1^- - \hat{\boldsymbol{y}}_1^+), \hat{\boldsymbol{y}}_2)$ が問題 (19) の実行可能解であり，その目的関数は z^{k-1} より大きくなっている．

なお，本分節の条件のもとでは，定理 3 より，問題 (7)，問題 (9) をそれぞれ，次の問題に置き換えることができる．

$$
\begin{array}{ll}
\underset{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}{\text{minimize}} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{C}^{\mathrm{T}}} D^{-1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^{\mathrm{W}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{q}_1^{+\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1^{+} + \boldsymbol{q}_1^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1^{-} + \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 \\
\text{subject to} & A_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0 \\
 & A_1(0)\boldsymbol{x} + V\boldsymbol{y}_1^{+} - V\boldsymbol{y}_1^{-} = \boldsymbol{b}_1(0) \\
 & A_2^{\mathrm{C}} D^{-1}\boldsymbol{x} + A_2^{\mathrm{W}}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{y}_2 \leq \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{L}} \\
 & D^{-1}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{w},\ -D^{-1}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{w} \\
 & \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_1^{+},\ \boldsymbol{y}_1^{-},\ \boldsymbol{y}_2 \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
\tag{31}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\underset{\boldsymbol{x},z,\boldsymbol{y}_{11},\ldots,\boldsymbol{y}_{1k}}{\text{minimize}} & z \\
\text{subject to} & A_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0 \\
 & A_1(j)\boldsymbol{x} + V\boldsymbol{y}_{1j}^{+} - V\boldsymbol{y}_{1j}^{-} = \boldsymbol{b}_1(j),\ j = 0, 1, \ldots, k \\
 & A_2^{\mathrm{C}} D^{-1}\boldsymbol{x} + A_2^{\mathrm{W}}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{y}_2 \leq \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{L}} \\
 & \boldsymbol{c}^{\mathrm{C}^{\mathrm{T}}} D^{-1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^{\mathrm{W}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{q}_1^{+\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_{1j}^{+} + \boldsymbol{q}_1^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_{1j}^{-} + \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 \leq z \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j = 0, 1, \ldots, k \\
 & D^{-1}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{w},\ -D^{-1}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\
 & \boldsymbol{y}_{1j}^{+},\ \boldsymbol{y}_{1j}^{-} \geq \boldsymbol{0},\ j = 0, 1, \ldots, k,\ \boldsymbol{y}_2 \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
\tag{32}
$$

5.4 より一般の Θ の場合

Θ が式 (2) で与えられる場合でも，$m_2 = 0$ でリコース行列 W_1 が

$$W_1 = (V \ \ -V)$$

と表される場合には，$A_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{x}$ に対して一意に $\boldsymbol{y}$ が定まるので，上述の分枝限定法を適用することができる．ただし，V は正則な行列である．

この場合，まず，$V^{-1}(\boldsymbol{b}_1 - A_1\boldsymbol{x}^{k-1})$ の各成分の上限値 $\eta_j^{+}(\boldsymbol{x}^{k-1})$ と下限値 $\eta_j^{-}(\boldsymbol{x}^{k-1})$ をそれぞれ，次の $2m_1$ 個の線形計画問題を解く．

$$
\begin{array}{ll}
\underset{A_1,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{c}}{\text{maximize}} & V_{j\cdot}^{-1}(\boldsymbol{b}_1 - A_1\boldsymbol{x}^{k-1}), \\
 & F\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & 0 \\ A_1 & \boldsymbol{b}_1 \end{pmatrix}\boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{g},
\end{array}
\qquad j = 1, 2, \ldots, m_1
\tag{33}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\underset{A_1,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{c}}{\text{minimize}} & V_{j\cdot}^{-1}(\boldsymbol{b}_1 - A_1\boldsymbol{x}^{k-1}), \\
\text{subject to} & F\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & 0 \\ A_1 & \boldsymbol{b}_1 \end{pmatrix}\boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{g},
\end{array}
\qquad j = 1, 2, \ldots, m_1
\tag{34}
$$

次に，$\eta_j^{+}(\boldsymbol{x}^{k-1})$ と $\eta_j^{-}(\boldsymbol{x}^{k-1})$ から，$v_j^{+}(\boldsymbol{x}^{k-1})$ と $v_j^{-}(\boldsymbol{x}^{k-1})$ を次式で求める．

$$v_j^{+}(\boldsymbol{x}^{k-1}) = \max(0, \eta_j^{+}(\boldsymbol{x}^{k-1})), \quad v_j^{-}(\boldsymbol{x}^{k-1}) = \max(0, -\eta_j^{-}(\boldsymbol{x}^{k-1})) \tag{35}$$

一方，問題 (8) は次の問題に帰着できる．

$$\begin{aligned} \underset{A_1,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{y}^-}{\text{maximize}} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{k-1} + \boldsymbol{q}^{+\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^+ + \boldsymbol{q}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^- \\ \text{subject to} \quad & A_1\boldsymbol{x}^{k-1} + V\boldsymbol{y}^+ - V\boldsymbol{y}^- = \boldsymbol{b}_1 \\ & \boldsymbol{y}^+ \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}^- \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}^{+\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^- = 0 \\ & F\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & 0 \\ A_1 & \boldsymbol{b}_1 \end{pmatrix}\boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{g} \end{aligned} \tag{36}$$

ただし，W_1 の特殊構造に合わせて，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{q}$ を $\boldsymbol{y}^+$ と $\boldsymbol{y}^-$，$\boldsymbol{q}^+$ と $\boldsymbol{q}^-$ に分けている．この問題は，相補条件 $\boldsymbol{y}^{+\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^- = 0$ を除けば，線形計画問題となり，$\boldsymbol{y}^+$ と $\boldsymbol{y}^-$ の上限値も，それぞれ，$v_j^+(\boldsymbol{x}^{k-1})$，$v_j^-(\boldsymbol{x}^{k-1})$ と得られているので，問題 (30) に対応する問題は，

$$\begin{aligned} \underset{A_1,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{y}^-}{\text{maximize}} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{k-1} + \boldsymbol{q}^{+\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^+ + \boldsymbol{q}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^- \\ \text{subject to} \quad & A_1\boldsymbol{x}^{k-1} + V\boldsymbol{y}^+ - V\boldsymbol{y}^- = \boldsymbol{b}_1 \\ & \boldsymbol{y}^+ \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}^- \geq \boldsymbol{0},\ y_i^+ = 0,\ i \in Y^+,\ y_i^- = 0,\ i \in Y^- \\ & F\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & 0 \\ A_1 & \boldsymbol{b}_1 \end{pmatrix}\boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{g} \\ & y_j^+ \leq v_j^+(\boldsymbol{x}^{k-1}),\ j \in J^+(\boldsymbol{x}^{k-1}) \\ & y_j^- \leq v_j^-(\boldsymbol{x}^{k-1}),\ j \in J^-(\boldsymbol{x}^{k-1}) \\ & y_j^+ + y_j^- \leq v_j^+(\boldsymbol{x}^{k-1}),\ j \in \{1,2,\ldots,m_1\}\backslash J^+(\boldsymbol{x}^{k-1}) \\ & y_j^+ + y_j^- \leq v_j^-(\boldsymbol{x}^{k-1}),\ j \in J^+(\boldsymbol{x}^{k-1}) \end{aligned} \tag{37}$$

となる．ただし，$J^+(\boldsymbol{x}^{k-1})$，$J^-(\boldsymbol{x}^{k-1})$ は式 (27)，(28) により定められる添え字集合である．したがって，本分節の場合，問題 (19)，(30) をそれぞれ，問題 (36)，(35) に置き換え，上の分枝限定法に基づくアルゴリズムを適用すればよいことになる．

6　数値例

本研究で提案したアルゴリズムを説明するため，次の問題を考える．

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2,x_3,y_1^+,y_2^+,y_1^-,y_2^-}{\text{maximize}} \quad & 4x_1 + 5x_2 + 6y_1^+ + 20y_2^+ + 8y_1^- + 2y_2^- \\ \text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + y_1^+ + y_2^+ - y_1^- - y_2^- = 50 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + y_2^+ - y_2^- = 50 \\ & x_1, x_2, x_3, y_1^+, y_2^+, y_1^-, y_2^- \geq 0 \end{aligned} \tag{38}$$

ただし，a_{ij} を (i,j) 成分とする行列 A_1 の取りうる範囲は，

$$\Theta = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \leq A_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\} \tag{39}$$

と与えられる．問題 (38) は 5.3 分節で述べた場合で，特に，$m_2 = 0$,

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\quad A_1^{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad A_1^{\mathrm{W}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

とする場合である．このとき，

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ V^{-1+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ V^{-1-} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と得られる．本研究で提案した解法を適用すると，最適解が次のように求められる．

$$\begin{array}{l} x_1 = 19.2857,\ x_2 = 0.7143,\ x_3 = 0, \\ y_1^+ = 0,\ y_2^+ = 10,\ y_1^- = 40,\ y_2^- = 0, \end{array} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

この解が得られる計算過程を表 1 に示す．この計算過程において，$\boldsymbol{b}_1(j) = (50, 50)^{\mathrm{T}}$ および，任意の j に関して，$\boldsymbol{c}(j) = (4, 5)^{\mathrm{T}}$ となっている．

7　おわりに

本研究では，目的関数，制約条件の不明確な係数および右辺値の取りうる範囲が凸多面体として与えられた場合のリコース問題 (2 段計画問題) を悲観的な観点から min-max 基準を用いて取り扱った．この問題が第 1 段の決定変数に関する微分不可能な目的関数をもつ凸計画問題になることを示すとともに，凸多面体の頂点集合が与えられた場合には双対角形構造をもつ線形計画問題に帰着されることを示した．次に，問題が一種の min-max 問題であることから，緩和法に関する解法を考察した．この解法においては，部分問題として max-min 問題あるいは双線形計画問題を解く必要がある．そこで，ある特別な場合を取り上げ，max-min 問題となる部分問題の分枝限定法による解法を議論した．また，全体の問題が線形計画問題に帰着できる場合があることを述べた．

ここでは，特別な場合を取り上げ，緩和法に基づく解法を議論したが，一般の場合の解法，問題が凸計画問題になることを利用した勾配法に基づく解法などは今後の課題である．また，不明確な係数や右辺値の取りうる範囲がファジィ集合として与えられる場合に関する問題の定式化，解法の考察も今後の課題となる．

参考文献

[1] 石井：確率論的最適化，in: 伊理，今野 (編)：数理計画法の応用〈理論編〉，産業図書，pp.1–40 (1982).

[2] I. M. Stancu-Minasian: *Stochastic Programming with Multiple Objective Functions*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht (1984).

[3] J. R. Birge and F. Louveaux: *Introduction to Stochastic Programming*, Springer-Verlag, New York (1997).

[4] 乾口，井田：多様な決定を支援する可能性計画法 第 1 回〜第 4 回，日本ファジィ学会誌，Vol.12, pp.10–18, pp.210–217, pp.377–381, pp.507–514 (2000).

[5] M. Inuiguchi and J. Ramik: Possibilistic Linear Programming: A Brief Review of Fuzzy Mathematical Programming and a Comparison with Stochastic Programming in Portfolio Selection Problem, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.111, pp.3–28 (2000).

[6] 乾口：確率計画問題とファジィ数理計画問題，日本ファジィ学会誌, Vol.4, pp.21–30 (1993).

表 1: 計算過程

step	分枝限定法 step	緩和法
1		$k=1$, $A_1(0)=\begin{pmatrix}4&4\\4&2\end{pmatrix}\in\Theta$. 問題 (7) を解く：$\boldsymbol{x}^0=(12.5,0)^{\mathrm{T}}$.
2		分枝限定法
	0	$\varphi^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}^0)=(-25,12.5)^{\mathrm{T}}$, $\varphi^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}^0)=(75,62.5)^{\mathrm{T}}$: $v_1^+(\boldsymbol{x}^0)=87.5$, $v_2^+(\boldsymbol{x}^0)=37.5$, $v_1^-(\boldsymbol{x}^0)=25$, $v_2^-(\boldsymbol{x}^0)=12.5$.
	1	$\tilde{z}=-\infty$, $\mathcal{P}-\emptyset$, $Y^+(P_0)=Y^-(P_0)=\emptyset$.
	2	問題 (30) を解く：$a_{11}=0$, $a_{12}=3$, $a_{21}=2$, $a_{22}=2$, $y_1^+=50$, $y_2^+=31.25$, $y_1^-=25$, $y_2^-=6.25$.
	3	$\tilde{z}=700>50=z^0$.
	9	$A_1(1)=\begin{pmatrix}0&3\\2&2\end{pmatrix}$.
4		問題 (9) を解く：$z^1=351.765$, $\boldsymbol{x}^1=(4.706,15.294)^{\mathrm{T}}$. $k=2$.
2		分枝限定法
	0	$\varphi^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}^1)=(5.882,35.294)^{\mathrm{T}}$, $\varphi^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}^1)=(104.706,54.118)^{\mathrm{T}}$: $v_1^+(\boldsymbol{x}^1)=48.234$, $v_2^+(\boldsymbol{x}^1)=14.7059$, $v_1^-(\boldsymbol{x}^1)=69.412$, $v_2^-(\boldsymbol{x}^1)=4.118$.
	1	$\tilde{z}=-\infty$, $\mathcal{P}-\emptyset$, $Y^+(P_0)=Y^-(P_0)=\emptyset$.
	2	問題 (30) を解く：$a_{11}=4$, $a_{12}=4$, $a_{21}=2$, $a_{22}=2$, $y_1^+=14.706$, $y_2^+=12.353$, $y_1^-=54.706$, $y_2^-=2.353$.
	3	$\tilde{z}=615.294>351.765=z^1$.
	9	$A_1(2)=\begin{pmatrix}4&4\\2&2\end{pmatrix}$.
4		問題 (9) を解く：$z^2=600$, $\boldsymbol{x}^2=(20,0)^{\mathrm{T}}$. $k=3$.
2		分枝限定法
	0	$\varphi^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}^2)=(-40,20)^{\mathrm{T}}$, $\varphi^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}^2)=(120,100)^{\mathrm{T}}$: $v_1^+(\boldsymbol{x}^2)=140$, $v_2^+(\boldsymbol{x}^2)=30$, $v_1^-(\boldsymbol{x}^2)=100$, $v_2^-(\boldsymbol{x}^2)=50$.
	1	$\tilde{z}=-\infty$, $\mathcal{P}-\emptyset$, $Y^+(P_0)=Y^-(P_0)=\emptyset$.
	2	問題 (30) を解く：$a_{11}=4$, $a_{12}=4$, $a_{21}=2$, $a_{22}=2$, $y_1^+=50$, $y_2^+=30$, $y_1^-=90$, $y_2^-=20$.
	3-5	$\tilde{z}=600\leq 600=z^2$. $\hat{\boldsymbol{y}}^{+\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{y}}^->0$. $\check{z}=2100>600=\tilde{z}$.
	6-8	$Y^+(P_1)=\{1\}$, $Y^-(P_1)=\emptyset$ なる (P_1). $Y^+(P_2)=\emptyset$, $Y^-(P_2)=\{1\}$ なる (P_2). $\mathcal{P}=\{(P_1),(P_2)\}$. $\mathcal{P}\neq\emptyset$. (P_2) を選択.
	2	問題 (30) を解く：$a_{11}=0$, $a_{12}=2$, $a_{21}=2$, $a_{22}=2$, $y_1^+=40$, $y_2^+=30$, $y_1^-=0$, $y_2^-=20$.
	3-5	$\tilde{z}=520\leq 600=z^2$. $\hat{\boldsymbol{y}}^{+\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{y}}^->0$. $\check{z}=1320>600=\tilde{z}$.
	6-8	$Y^+(P_3)=\{1,2\}$, $Y^-(P_3)=\emptyset$ をもつ (P_3). $Y^+(P_4)=\{2\}$, $Y^-(P_4)=\{1\}$ をもつ (P_4). $\mathcal{P}=\{(P_1),(P_3),(P_4)\}$. $\mathcal{P}\neq\emptyset$. (P_4) を選択.
	2	問題 (30) を解く：$a_{11}=0$, $a_{12}=2$, $a_{21}=4$, $a_{22}=2$, $y_1^+=80$, $y_2^+=0$, $y_1^-=0$, $y_2^-=30$.
	3	$\tilde{z}=620>600=z^2$.
	9	$A_1(3)=\begin{pmatrix}0&2\\4&2\end{pmatrix}$.
4		問題 (9) を解く：$z^3=600.714$, $\boldsymbol{x}^3=(19.286,0.714)^{\mathrm{T}}$. $k=4$.
		続行することにより，$\boldsymbol{x}^3$ が最適解であることがわかる.

[7] T. Itoh and H. Ishii: Fuzzy Two-stage Problem by Possibility Measure, *Mathematica Japonica*, Vol.46, 279–288 (1997).

[8] 志水：多目的と競争の理論，共立出版 (1982).

[9] N. Z. Shor: *Minimization Methods for Non-Differentiable Functions*, Springer-Verlag, Berlin (1985).

[10] L. S. Lasdon: *Optimization Theory for Large Systems*, The Macmillan Company, New York (1970).

[11] R. Horst and H. Tuy: *Global Optimization: Deterministic Approaches, Third, Revised and Enlarged Edition*, Springer-Verlag, Berlin (1995).