Title	Index ratio sets for minimal equivalence relations-subrelations (Free products in operator algebras and related topics)
Author(s)	佐野, 隆志
Citation	数理解析研究所講究録 (2000), 1177: 74-77
Issue Date	2000-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/64500
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1177巻 2000年 74-77

Index ratio sets for minimal equivalence relations – subrelations

山形大学理学部数理科学科　佐野隆志 (Takashi Sano)
Department of Mathematical Sciences,
Faculty of Science, Yamagata University

本講演では，ジョーンズの指数理論で展開された，ergodic equivalence relations – subrelations の分類結果の C^* 環バージョンについて言及する： C. Sutherland や T. Hamachi によりエルゴード的同値関係の組についてはよく分っている。(See [H].) そこでは choice functions により定まる index cocycle から index ratio set なる有限群の組を得て，それら群の作用で同値関係の標準的な分解を与えている。ここでは，minimal な equivalence relation – subrelation に対して ある種の index cocycle が与えられた時，同様の議論が行えることについて述べる。

X をコンパクト距離空間とし，X 上離散群 G が作用している，とする。(X 上の同相写像の全体を Homeo(X) とかけば，$G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$.) G による同値関係

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_G := \{ (gx, x) \mid x \in X,\ g \in G \}$$

を考える。

G (or $\mathcal{R}_G$) が <u>minimal</u> であるとは，以下の (同値

な）条件(のどれか)を満たすとき，をいう：

① $\forall x\in X$ に対し $Gx (= \mathcal{R}(x) = \mathrm{Orb}_G\, x) \underset{\text{dense}}{\subseteq} X$.

② $E(\subseteq X)$ closed, $gE = E\ (\forall g) \Rightarrow E = \phi$ or X.

③ $\forall U(\neq \phi)$ open に対し， $X = \bigcup_{g\in G} gU$.

よく知られた事実として G が minimal でないとき

$$gY = Y\ (\forall g\in G),\quad G|_Y : \text{minimal}$$

なる閉集合 $Y(\subseteq X)$ が存在する。

さて，$\mathcal{R} := \mathcal{R}_G \supseteq \mathcal{S}$ を minimal equivalence relation - subrelation とし，次の2つの設定を加える：

① $X \ni x \longmapsto \#\{\mathcal{S}(y) \mid y \underset{\mathcal{R}}{\sim} x\}$: constant $(=: N)$

② $\sigma : \mathcal{R} \ni (gx, x) \longmapsto \sigma(gx, x) \in \mathfrak{S}_N$

(homomorphism, X上 continuous,
$\mathcal{S} \supseteq \ker\sigma := \{(y, x)\in\mathcal{R} \mid \sigma(y, x) = e\}$)

なる写像 σ が与えられている。

(choice functions $\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ ($\varphi_1 = id$) が存在するときは，$\sigma(y, x)(i) = j \underset{def}{\Leftrightarrow} \varphi_i(x) \underset{\mathcal{S}}{\sim} \varphi_j(y)$ と定義すれば，② (連続性以外) は成立する。)

$[\mathcal{R}] := \{\varphi \in \mathrm{Homeo}(X) \mid \varphi x \in \mathcal{R}(x),\ \forall x\}$

$[\mathcal{R}]_* := \{\varphi : \mathrm{Dom}\,\varphi\,(\text{open}) \longrightarrow \mathrm{Im}\,\varphi$ homeo, $\varphi x \in \mathcal{R}(x)\ \forall x \in \mathrm{Dom}\,\varphi\}$

とし，

$$\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) := \left\{ \theta \in \mathfrak{S}_N \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^\forall U : \text{open} \ (\subseteq X) \\ {}^\forall x_0, y_0 \in U \\ {}^\exists \varphi, \psi \in [\mathcal{S}]_* \quad \text{s.t.} \\ \quad \operatorname{Dom}\varphi \ (\ni x_0), \ \operatorname{Im}\varphi \subseteq U \\ \quad \operatorname{Dom}\psi \ (\ni y_0), \ \operatorname{Im}\psi \subseteq U \\ \& \\ \quad \sigma(\varphi x, x) = \theta \quad {}^\forall x \in \operatorname{Dom}\varphi \\ \quad \sigma(\psi y, y) = \theta^{-1} \quad {}^\forall y \in \operatorname{Dom}\psi \end{array} \right\}$$

とおけば，$\mathcal{L}_0(\mathcal{S})$は群になる。また

$$Q := \{ (y, x) \in \mathcal{S} \mid \sigma(y, x) \in \mathcal{L}_0(\mathcal{S}) \}$$

とおくと　$\#\{\operatorname{Ker}\sigma\text{-minimal 成分}\} < +\infty$

であることが，$\operatorname{Ker}\sigma$-minimal 成分 $=$ Q-minimal 成分であることから示される。これより $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $\operatorname{Ker}\sigma$-minimal 成分よりなる X の有限分割 $({}^\#\Lambda < \infty)$ とする。

各 $\lambda \in \Lambda$ に対し

$\mathcal{L}_\lambda(\mathcal{S}) :=$ "上の $\mathcal{L}_0(\mathcal{S})$ の定義で $U \subseteq A_\lambda$ に制限したもの"

$\mathcal{L}_\lambda(\mathcal{R}) :=$ "$\mathcal{L}_\lambda(\mathcal{S})$ の定義で $\varphi, \psi \in [\mathcal{R}]_*$ と置き換えたもの"

と定義すると，

$$\mathfrak{r}_\lambda(\mathcal{R}) \geqq \mathfrak{r}_\lambda(\mathcal{S}) \underset{\text{conjugate}}{\sim} \underset{\substack{\| \\ G}}{\mathfrak{r}_{\lambda_0}(\mathcal{R})} \geqq \underset{\substack{\| \\ H}}{\mathfrak{r}_{\lambda_0}(\mathcal{S})}$$

となることも分る。

あとは、G の free な作用 α_g を作り、$\mathcal{P}(\subseteqq \mathcal{S})$ という subrelation を定義して

$$\mathcal{R} = \mathcal{P} \rtimes_\alpha G \geqq \mathcal{S} = \mathcal{P} \rtimes_\alpha H$$

と表せることなど、論文 [H] と同様に議論することができる。（説明を省いた記号・定義等については [H] を参照。）

Reference

[H] : T. Hamachi, Canonical subrelations of ergodic equivalence relations – Subrelations
J. Operator Theory 43 (2000) 3-34.