数理解析研究所講究録
1177 巻 2000 年 40-43

THE χ-INVARIANTS OF CERTAIN AMALGAMATED FREE PRODUCTS

植田 好道 (UEDA, YOSHIMICHI)

広島大学大学院理学研究科

1. Introduction & Preliminaries.

可分な前共役を持つフォン・ノイマン環のなす三つ組 $A \supseteq D \subseteq B$ を考える. 更に技術的ではあるが本質的な条件として, 忠実正則条件付き期待値 $E_D^A : A \to D$, $E_D^B : B \to D$ の存在を仮定する. この時, $A \supseteq D \subseteq B$ を自然に含むフォン・ノイマン環 M と条件付き期待値 $E_D^M : M \to D$ の組が構成出来, 次の条件で一意的に定まる：

(1) M は A, B により生成される；

(2) $E_D^M|_A = E_D^A$, $E_D^M|_B = E_D^B$；

(3) $E_D^M(\text{alternating word in } A^\circ, B^\circ) = 0$,

但し, $A^\circ := \mathrm{Ker}E_D^A$, $B^\circ := \mathrm{Ker}E_D^B$.

この組を

$$(M, E_D^M) = (A, E_D^A) *_D (B, E_D^B)$$

と表わし, やや正確さを欠く記法ではあるが, しばしば $M = A *_D B$ と書く. これを融合積フォン・ノイマン環と呼ぶ.

融合積フォン・ノイマン環は, 特別な場合として, 即ち $D = \mathbf{C}$ の場合として, 自由積を含む. 自由積の際だった特徴の一つとして, 完全性（後に詳しく説明する）を持つ, もしくは性質 Γ を持たないといったことがある. 現状では一般に自由積として生じる因子環が完全であることが証明されているわけではないが, 多くの具体的な場合には確認されている. 自由積により簡単に III 型環が生じることはすぐわかるが, III_0 型因子環となる具

体例は今までのところ見いだされていない. そこでネガティブな予想をたててみる. 即ち, しかるべき適当な条件下で自由積として生じる因子環が III_0 型になり得ないということを証明する試みが考えられる. ここで完全性の話が使えるのではないか? とすぐ気付く. 理由は次の Connes の結果である:

Theorem. (A. Connes) III_0 型因子環は完全ではない.

ちなみにこの定理の証明のキーポイントは III_0 型因子環が II_∞ 型因子環の増大列により近似出来, 更に, 各 II_∞ 型因子環には条件付き期待値が落ちるということを示すことにある.

ここまで, 自由積の研究に於ける完全性の重要性の一側面を説明したが, より一般の融合積ではどうなっているのか? という疑問が自然に浮かぶ. 筆者による以前の研究で III_0 型因子環となる融合積が存在することが証明されている. 即ち, $A = B$ を III_0 型因子環として, D を (それらの) Cartan 部分環とすると, 融合積 $M = A *_D B$ は III_0 型因子環となる. つまり, 融合積まで広げるとしばしば完全ではない因子環が生じることを主張する. よって自然な問題として, 融合積がいつ完全性を持ちうるかについての必要且つ十分条件を考察することが考えられる. ここでは, ある種の場合にこの問題に対する完全回答と副産物として得た Connes χ-普遍量に関する結果を述べる.

2. Main Results.

以下では, A, B を可分な前共役を持った非 I 型因子環で, D を A, B 共通の Cartan 部分環としよう. Cartan 部分環の定義より条件付き期待値の存在は自動的であるから, 融合積フォン・ノイマン環 $M = A *_D B$ を考えることが出来る. (この場合は, A から D 及び B から D への条件付き期待値が一意的であることから記法 $A *_D B$ に曖昧さはない!)

この融合積 M が因子環であること及び「型 $(\mathrm{II}_1, \mathrm{II}_\infty, \mathrm{III}_\lambda)$」の分類の一般論は以前の筆者の研究により確立している.

完全性の定義は $\mathrm{Int}(M)$ が $\mathrm{Aut}(M)$ の閉部分群になることであるが, 同値な条件とし

て漸近的中心化環 M_ω （ω は自由超フィルター）が自明, i.e., $M_\omega = \mathbf{C}1$, がある. 即ち, 状況は少々異なるが因子環条件・「型」の分類問題の時と同じく「ある種の」可換子環の決定がこの問題でも本質的である. しかしながら, 一般には漸近的中心化環 M_ω は完全に可換子環とはなっていない. それ故, 漸近的中心化環 M_ω の代りにそれを含むフォン・ノイマン環超積 M^ω を考察してみる.

Theorem 1. 次が成立： $M' \cap M^\omega = M' \cap D^\omega$.

この定理は少々複雑にはなるのだが, Popa の仕事 ([Adv. Math., 50 (1983) 27–48]) に出てくる技術的な結果の証明のテクニックをうまく（III 型の場合の困難を乗り越えて）拡張することにより証明する.

ところで, 既に述べたように漸近的中心化環 M_ω は一般に可換子環としては記述することが出来ない. 即ち, 一般には $M_\omega \neq M' \cap M^\omega$ である. しかしながら, 非常に都合のいい場合になっていて, 上の定理を利用すると次が証明できる.

Corollary 2. 次が成立： $M_\omega = M' \cap M^\omega = M' \cap D^\omega$.

ここで, D は可換であることから, もちろんフォン・ノイマン超積 D^ω も可換である. 即ち結論として $M = A *_D B$ は決して McDuff 性を持たないことがわかる：

Corollary 3. 次が成立：$M \otimes R \ncong M$. 但し, R は超有限的 II_1 型因子環.

ここで, 考察対象の融合積に対する完全性の必要且つ十分条件を考えよう. その為には, エルゴード理論・軌道同値の概念が便利である. 今, D は A, B が共通に含む Cartan 部分環であるから, D を $L^\infty(X)$ と同一視したとき, A, B は適当な X 上の測度付離散同値関係 $\mathcal{R}_A$, $\mathcal{R}_B$ とその 2-コサイクル達から Feldman-Moore 構成法により構成させる. ここで, Feldman-Moore の議論を詳しく見ると, $D = L^\infty(X)$ の同一視を一つ固定すると, 二つの同値関係の組は測度 0 を除き一意的に決まることがわかる. よって,

$$\mathcal{R}_M := \mathcal{R}_A \vee \mathcal{R}_B \ (\subseteq X \times X)$$

は $A \supseteq D \subseteq B$ から標準的に決まる測度付離散同値関係である．定理２をこの言葉に翻訳すると次が証明できる．

Theorem 4. 融合積フォン・ノイマン環 M が完全であることと $\mathcal{R}_M$ が *K. Schmidt* の意味で強エルゴード的であることは同値．

ある種の自己同型の形を詳しく見ることと，上の結果を利用することにより次が得られる：

Theorem 5. $\chi(M) \cong \overline{B^1(\mathcal{R}_M, \mathbb{T})}/B^1(\mathcal{R}_M, \mathbb{T}) \subseteq H^1(\mathcal{R}_M, \mathbb{T})$. 但し，$B^1$ はコバウンダリー群で H^1 はコホモロジー群を表わす．

今，定理４の証明を K. Schmidt の結果を経由せずに証明できることから，Connes の「$\mathrm{Int}(M)$ が閉部分群であることと $M_\omega = \mathbf{C}1$ は同値」という結果が K. Schmidt の「$B^1(\mathcal{R}_M, \mathbb{T})$ が閉部分群であることと $\mathcal{R}_M$ が強エルゴード的であることが同値」という命題を含むことがわかる．

参考文献は省略します．参考文献及び議論の詳細は

Y. Ueda "Amalgamated free product over Cartan subalgebra, III: Fullness & Connes' χ-invariant" preprint (2000)

に詳しく書いてあります．