

Title	Generalized Longo-Rehren subfactors (Free products in operator algebras and related topics)
Author(s)	河東, 泰之
Citation	数理解析研究所講究録 (2000), 1177: 1-2
Issue Date	2000-11
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/64509">http://hdl.handle.net/2433/64509</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## Generalized Longo-Rehren subfactors

東京大学・数理: 河東泰之 (Yasuyuki Kawahigashi)  
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

Longo-Rehren は,  $M$  上の有限個の morphism の system  $\{\lambda_i\}$  から, subfactor  $M \otimes M^{\text{op}} \subset R$  を作る方法を与えた. これを Longo-Rehren subfactor という. ここで,  $R$ - $R$  morphism の system を見ると, 元の system の “quantum double” になるということが多くの人によって研究されている. 特に,  $R$ - $R$  morphism の system は, 非退化な braiding を持つことがわかっている. ([2] およびそこでの引用文献を参照のこと.) そこで, もとから system  $\{\lambda_i\}$  が非退化な braiding を持つ場合に何が起こるかを考えてみると,  $R$ - $R$  morphism の system はもとの system を単に 2 重に水増ししたものであることがわかっている. さらにこのような場合の Longo-Rehren subfactor は, 一回 basic construction を行って, dual に移ってもやはり Longo-Rehren subfactor である.

一方, Longo-Rehren によって定義され, Xu, Böckenhauer-Evans によって詳しく調べられた  $\alpha$ -induction の理論が, Longo-Rehren subfactor の研究とよく似ていることも, [2] で明らかになった. そこで我々は, [1] で  $\alpha$ -induction と Longo-Rehren subfactor の関係について調べた. まず設定を述べよう. (詳しくは, [1] とそこでの引用文献を見ていただきたい. ここでは簡略に述べる.)  $N \subset M$  を subfactor とし,  $N$ - $N$  morphism の system が braiding を持つとする. このとき, system の endomorphism  $\lambda$  は, braiding を用いて,  $M$  の endomorphism  $\alpha_\lambda^\pm$  にいつせいに延長される. ここで  $\pm$  は braiding の choice を表す. この  $\alpha_\lambda^\pm$  の既約分解から生成される  $M$ - $M$  morphism の system を考える. 今 braiding は非退化としよう. [1] の中に次の結果がある.

この  $M$ - $M$  system からできる Longo-Rehren subfactor によって得られる quantum double system は, もとの  $N$ - $N$  system の単なる “double” と同型であり, この subfactor の canonical endomorphism はこの同型で  $\sum Z_{\lambda\mu} \lambda \otimes \mu^{\text{op}}$  に移る.

ただしここで,  $Z_{\lambda\mu} = \langle \alpha_\lambda^+, \alpha_\mu^- \rangle$  である. 一方最近, Rehren [3] は, generalized Longo-Rehren subfactor の構成を行った. 彼は一般に endomorphism の system がいつせいに延長される状況を考えているが, 今のところそのような延長の一般論が知られているのは  $\alpha$ -induction (とその簡単な変形) だけである. このときは彼の定理は次のように与えられる.

上のような  $\alpha$ -induction に対し,  $\sum Z_{\lambda\mu} \lambda \otimes \mu^{\text{op}}$  は  $N \otimes N^{\text{op}}$  上の dual canonical

endomorphism である.

また, そこで Rehren が実際に構成した subfactor を generalized Longo-Rehren subfactor という.

このことと, 上のもとから非退化な braiding のあるときの Longo-Rehren subfactor の現れ方を見ると,  $\alpha$ -induction で生じた  $M$ - $M$  system から Longo-Rehren subfactor を作って dual に移行すると, 上の Rehren による generalized Longo-Rehren subfactor ができているのではないかと考えられる. 今回は計算によってそのとおりであることを確認した. それにはまず,  $\alpha$ -induction で生じた  $M$ - $M$  system から作った Longo-Rehren subfactor から dual に移り, そこでの canonical endomorphism を [2] の方法で計算する. これは簡単だが, この形は generalized Longo-Rehren の方と intertwiner の形が違っているなのでそのままでは比較できない. そこで, intertwiner の計算を行うことによって比較できるようにする. この比較の際に “twist” が現れるがこれが容易に消せることは Rehren によって指摘された. これによって, [3] の最後であげられている予想が否定的に解ける.

引用文献は多くなりすぎるので, ごくわずかしか挙げていない. 詳しくは, [1] の引用文献表を見ていただきたい.

## References

- [1] J. Böckenhauer, D. E. Evans, Y. Kawahigashi, *Longo-Rehren subfactors arising from  $\alpha$ -induction*, preprint, math.OA/0002154.
- [2] M. Izumi, *The structure of sectors associated with the Longo-Rehren inclusions I. General theory*, Commun. Math. Phys. **213**, 127–179 (2000).
- [3] K.-H. Rehren, *Canonical tensor product subfactors*, Commun. Math. Phys. **211**, 395–406 (2000).