

On an example of a pseudo-Anosov homeomorphism of the disk not inducing all link types

奈良女子大学大学院人間文化研究科
(Department of Mathematics, Nara Women's Univ.)
金 英子 (Eiko Kin)

1 序文

円周 S^1 から 3 次元多様体 M への埋め込み $K : S^1 \rightarrow M$ の像 $K(S^1)$ を 結び目 といふ. n 個の円周の直和から 3 次元多様体 M への埋め込み $L : S^1 \amalg \dots \amalg S^1 \rightarrow M$ の像 $L(S^1 \amalg \dots \amalg S^1)$ を (n 成分の) 絡み目 といふ. 2 つの絡み目 L_1, L_2 が 同型 であるとは、 L_1, L_2 は S^3 で全同位 (ambient isotopic) であることとする. このとき $L_1 = L_2$ とかく.

D^2 を 2 次元円板とし、 $\varphi : D^2 \rightarrow D^2$ を向きを保つ同相写像とする. いま $\Phi = \{\varphi_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ を、 D^2 上のアイソトピーで恒等写像 id_{D^2} と φ を結ぶ (i.e., $\varphi_0 = id_{D^2}, \varphi_1 = \varphi$) ものとする. φ の周期軌道の有限個の和集合 (φ -不変な有限集合) P に対して、 $\mathcal{S}_\Phi P \subset D^2 \times S^1 (\cong D^2 \times I / (x, 0) \sim (x, 1))$ を次で定める.

$$\mathcal{S}_\Phi P = \bigcup_{0 \leq t \leq 1} (\varphi_t(P) \times \{t\}) / (x, 0) \sim (x, 1).$$

$\tilde{V} = D^2 \times S^1$, V を S^3 内に標準的に埋め込まれたソリッドトーラスとする (つまり, V の core circle が S^3 内の自明な結び目となるようなもの). 次を満たす \tilde{V} から V への同相写像を $h_n : \tilde{V} \rightarrow V$ ($n \in \mathbb{Z}$) とかく.

V のトーラス上の経線 $\tilde{\ell}$ に対して、結び目 $h_n(\tilde{\ell})$ と V の core circle の絡み数は n である.

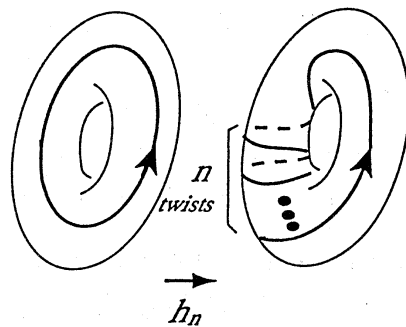


図 1.1

任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して、 $h_n(\mathcal{S}_\Phi P)$ は S^3 内の絡み目であることに注意する.

Definition 1.1. φ, Φ を上と同じものとする. φ は (Φ に対して) 全ての絡み目型を導くとは、ある $m \in \mathbb{Z}$ が存在して次が成立することとする.

任意の S^3 内の絡み目 L に対して、 φ の有限個の周期軌道の和集合 P_L で $h_m(\mathcal{S}_\Phi P_L) = L$ を満たすものが存在する。

Remark 1.2. 上の定義はアイソトピー Φ の選び方によらない。すなわち、別のアイソトピー $\tilde{\Phi}$ に対して、次が成り立つ。

φ は Φ に対して全ての絡み目型を導く $\iff \varphi$ は $\tilde{\Phi}$ に対して全ての絡み目型を導く。

([1; Theorem A]) より φ の位相的エントロピーが 0 ならば、任意のアイソトピー Φ と整数 m と (一つの) 周期軌道 P に対して、結び目 $h_m(\mathcal{S}_\Phi P)$ は iterated torus knot であることがわかる。これより、全ての絡み目型を導く同相写像の位相的エントロピーは正である。これまでにそのような同相写像に関連する次の結果が得られている。

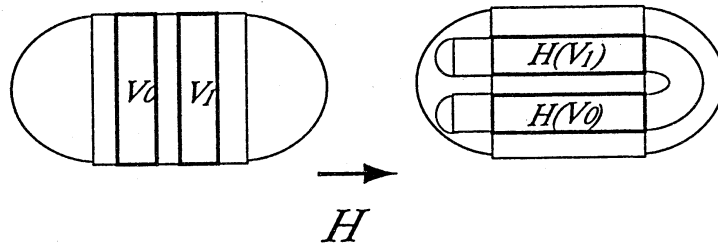


図 1.2

Theorem 1.3 ([7]). $H : D^2 \rightarrow D^2$ を Smale horseshoe とする (図 1.2)。このとき、

- H とその 2 乗 H^2 は全ての絡み目型を導かない。
- H^n ($n \geq 3$) は全ての絡み目型を導く。

Theorem 1.4 ([6]). $\varphi : D^2 \rightarrow D^2$ を向きを保つ C^1 微分同相写像とする。いま φ は双曲型不動点 p を持ち、 $W^u(p; \varphi) \cap W^s(p; \varphi) \setminus \{p\} \neq \emptyset$ かつ、 $W^u(p; \varphi)$ と $W^s(p; \varphi)$ は横断的とする。このとき、無限個の $n \in \mathbb{N}$ に対して φ^n は全ての絡み目型を導く。

D^2 の内部の n 点集合を A_n とおく。今回は、全ての絡み目型を導く pseudo-Anosov $\varphi : (D^2, A_n) \rightarrow (D^2, A_n)$ relative to A_n の十分条件と、全ての絡み目型を導かない pseudo-Anosov $\psi : (D^2, A_n) \rightarrow (D^2, A_n)$ relative to A_n の例について報告する。

Theorem A ([8]). $\varphi : D^2 \rightarrow D^2$ を向きを保つ同相写像とする。 φ が周期 3 の周期軌道 A_3 を持ち、pseudo-Anosov relative to A_3 ならば、 φ は全ての絡み目型を導く。

Theorem B ([8]). $\psi \in \text{Aut}_+(D^2, A_5)$ を pseudo-Anosov relative to A_5 とする。 $\psi \in \text{Aut}_+(D^2, A_5)$ のアイソトピークラスを $[f]$ とおく。 $[f] = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 Z(B_5)$ ならば、 ψ は全ての絡み目型を導かない。

2 準備

2.1 Thurston による曲面上の自己同相写像の分類定理

M をコンパクトで向き付け可能な曲面とし、 A を $M \setminus \partial M$ 内の有限集合とする。

Theorem 2.1.1 (Thurston). $f \in \text{Aut}(M, A)$ とする。このとき f は次のいずれかの $\varphi \in \text{Aut}(M, A)$ と isotopic である。

- φ は reducible (relative to A).
- φ は finite order.
- φ は pseudo-Anosov (relative to A).

$f \in \text{Aut}(M, A)$ のアイソトピークラス $[f]$ が pseudo-Anosov であるとは、 $[f]$ が pseudo-Anosov $\varphi : (M, A) \rightarrow (M, A)$ relative to A を含むこととする。finite order, reducible も同様に定義する。

D^2 の内部の n 点集合 $\{a_r = (2r/(n+1) - 1, 0) \mid 1 \leq r \leq n\}$ を A_n とおく。 (D^2, A_n) の写像類群を MCG_n とおく。 B_n を n -組み紐群、 $Z(B_n)$ をその中心とする。2つの群 MCG_n と $B_n/Z(B_n)$ は同型であることが知られている。その同型写像 $m : MCG_n \rightarrow B_n/Z(B_n)$ は次で与えられる。 $\omega \in MCG_n$ をとる。 $f \in \text{Aut}_+(D^2, A_n)$ を $f \in \omega$ とする。 D^2 上のアイソトピー $\{f_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ ($f_0 = id_{D^2}$, $f_1 = f$) をとる。 n -組み紐 $(\bigcup_{0 \leq t \leq 1} (f_t(a_1)) \times \{t\}) \cup \dots \cup (\bigcup_{0 \leq t \leq 1} (f_t(a_n)) \times \{t\})$ を β とおき、 $m(\omega) = \beta Z(B_n)$ と定める。この m が同型写像を与える。
 $m(\omega) = \beta Z(B_n)$ であるとき、 m を省略して単に $\omega = \beta Z(B_n)$ と表す。

2.2 写像類群 MCG_3

n -組み紐群 B_n の生成元を $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ とする。



図 2.2.1 σ_i

村杉による 3-組み紐群 B_3 の分類定理を紹介する。 $\Delta = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$ とおく。 Δ^2 は B_3 の中心 $Z(B_3)$ を生成することが知られている。 B_3 の部分集合 Ω_i を次で与える。

- $\Omega_0 = \{\Delta^{2n} \mid n = 0, \pm 1, \dots\}$.
- $\Omega_1 = \{\Delta^{2n} \sigma_1 \sigma_2 \mid n = 0, \pm 1, \dots\}$.
- $\Omega_2 = \{\Delta^{2n} (\sigma_1 \sigma_2)^2 \mid n = 0, \pm 1, \dots\}$.
- $\Omega_3 = \{\Delta^{2n+1} \mid n = 0, \pm 1, \dots\}$.
- $\Omega_4 = \{\Delta^{2n} \sigma_1^p \mid p > 0, n = 0, \pm 1, \dots\}$.
- $\Omega_5 = \{\Delta^{2n} \sigma_2^{-q} \mid q > 0, n = 0, \pm 1, \dots\}$.
- $\Omega_6 = \{\Delta^{2n} \sigma_1^{p_1} \sigma_2^{-q_1} \sigma_1^{p_2} \sigma_2^{-q_2} \dots \sigma_1^{p_r} \sigma_2^{-q_r} \mid p_i, q_i > 0, n = 0, \pm 1, \dots\}$.

Theorem 2.2.1 ([9; Proposition 2.1]). B_3 の任意の要素は、ある Ω_i の中のたった一つの要素と共役である。

Corollary 2.2.2. $B_3/Z(B_3)$ の任意の要素は、ある $\tilde{\Omega}_i$ の中のたった一つの要素と共役である。ただし、 $\tilde{\Omega}_i$ は次で与えられる $B_3/Z(B_3)$ の部分集合である。

- $\tilde{\Omega}_0 = \{Z(B_3)\}$.
- $\tilde{\Omega}_1 = \{\sigma_1 \sigma_2 Z(B_3)\}$.
- $\tilde{\Omega}_2 = \{(\sigma_1 \sigma_2)^2 Z(B_3)\}$.
- $\tilde{\Omega}_3 = \{\Delta Z(B_3)\}$.
- $\tilde{\Omega}_4 = \{\sigma_1^p Z(B_3) \mid p > 0\}$.
- $\tilde{\Omega}_5 = \{\sigma_2^{-q} Z(B_3) \mid q > 0\}$.
- $\tilde{\Omega}_6 = \{\sigma_1^{p_1} \sigma_2^{-q_1} \sigma_1^{p_2} \sigma_2^{-q_2} \dots \sigma_1^{p_r} \sigma_2^{-q_r} Z(B_3) \mid p_i, q_i > 0\}$.

Remark 2.2.3. $f \in \text{Aut}_+(D^2, A_3)$ とし、 f のアイソトピークラスを $[f]$ とおく。Corollary 2.2.2 より次が成り立つ。

- $[f]$ は finite order である $\iff [f]$ は $\bigcup_{i=0}^3 \tilde{\Omega}_i$ のある要素と共役である。
- $[f]$ は reducible である $\iff [f]$ は $\tilde{\Omega}_4 \cup \tilde{\Omega}_5$ のある要素と共役である。
- $[f]$ は pseudo-Anosov である $\iff [f]$ は $\tilde{\Omega}_6$ のある要素と共役である。

2.3 Templates

Template とは、境界を持つコンパクトな branched 2-manifold であり、その上に拡大的な半流が定義されていて、局所的には joining chart と splitting chart からなるものである (詳しくは [3; Section 2.2])。

3次元多様体 M に埋め込まれた template \mathcal{T} に対して、周期軌道の有限個の和集合は M 内の絡み目である。 S^3 に埋め込まれた template \mathcal{T} が universal であるとは、 S^3 内の任意の絡み目 L に対して、 \mathcal{T} の周期軌道の有限個の和集合 P_L が存在して $L = P_L$ を満たすこととする。

Lorenz-like template $\mathcal{L}(0, n)$ ($n < 0$) は universal であることが、R. Ghrist によって示された ([2])。次の lemma は、 \mathcal{V}, \mathcal{W} の subtemplate として、 $\mathcal{L}(0, n)$ ($n < 0$) が得られることで示される。

Lemma 2.3.1. (1) ([4; Theorem 4.3]) 図 2.3.1 (a) の template $\mathcal{V} \subset S^3$ は universal.
 (2) ([7]) 図 2.3.1 (b) の template $\mathcal{W} \subset S^3$ は universal.

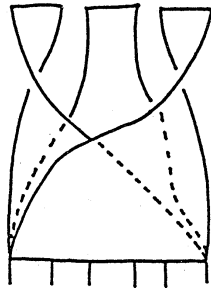


図 2.3.1 (a) \mathcal{V}

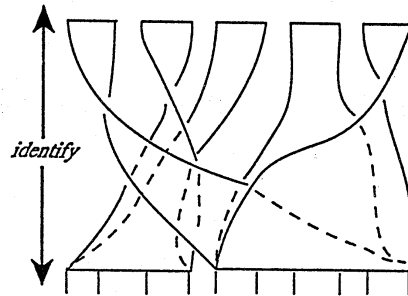


図 2.3.1 (b) \mathcal{W}

n -組み紐 $b \subset S^3$ の紐の交差が全て positive (negative) であるとき, b は positive (negative) であるという (図 2.3.2 (a)). b の紐の上下を自然に同一視して得られる S^3 内の絡み目 \hat{b} を closed braid という (図 2.3.2 (b)).

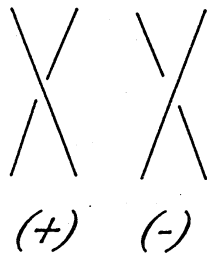


図 2.3.2 (a)

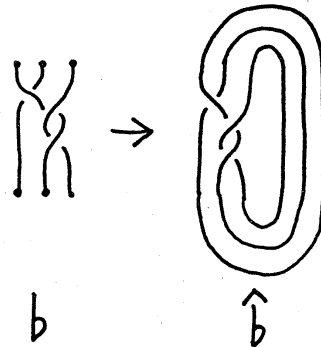


図 2.3.2 (b)

$V \subset S^3$ に埋め込まれた template \mathcal{T} が braided とは, \mathcal{T} 上の任意の周期軌道 P に対して, P は V の任意の meridian disc $D^2 \times \{\theta\}$ と横断的であることとする。Braided template \mathcal{T} が positive (negative) とは, \mathcal{T} 上の任意の周期軌道の有限個の和集合 P が closed positive braid (closed negative braid) と同型であることとする。

Remark 2.3.2. Closed positive braid でも closed negative braid でもない結び目 K が存在する (e.g. 8 の字結び目) ([10]). 従って, そのような K は, positive template や negative template の周期軌道として実現できない。これより template \mathcal{T} が positive 又は negative ならば, \mathcal{T} は universal でない。

Template を簡単に表すために, 以下の条件をもつ, 上下に四角の箱と三角の箱がくっついているひもを用いて template を表す。

- 各ひもは、template の half twist をもたない各 strip を表す.
- 各ひもの上にある四角の箱の中の整数は、各 strip の half twist の総数を表す.
- 各ひもの下にある三角の箱は、どのように strip が branch line に合流するかを表す.

これを、template の normal form とよぶ。例えば、図 2.3.3 (a) の template \mathcal{U}^0 に対して、図 2.3.3 (b) はその normal form である。

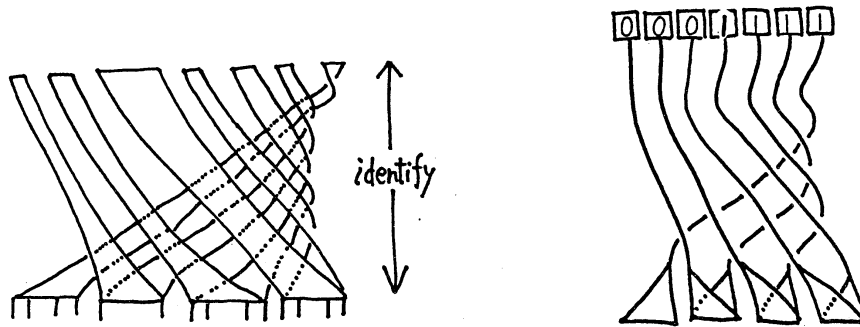


図 2.3.3 (a) \mathcal{U}^0

図 2.3.3 (b)

3 Theorem A

$\varphi : (M, A) \rightarrow (M, A)$ を pseudo-Anosov relative to A とする。 φ とアイソトピックな別の pseudo-Anosov $\psi : (M, A) \rightarrow (M, A)$ relative to A に対して、 φ と ψ は共役 (relative to A) であることが知られている。一般に、 D^2 上の向きを保つ同相写像 f と g が共役であるとき、次が成り立つことがわかる。

$$f \text{ は全ての絡み目型を導く} \iff g \text{ は全ての絡み目型を導く.}$$

よって Remark 2.2.3 より、Theorem A を示すためには次を示せば十分である。

Proposition 3.1. $\varphi : D^2 \rightarrow D^2$ を向きを保つ同相写像とする。いま、 φ は周期 3 の周期軌道 A_3 をもち、pseudo-Anosov relative to A_3 であり、 $[f] \in \tilde{\Omega}_6$ とする。このとき φ は全ての絡み目型を導く。

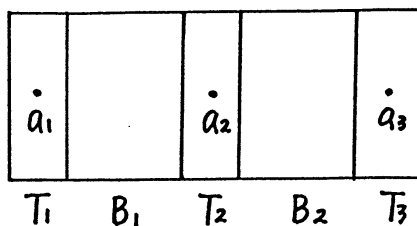


図 3.1

D^2 の内部に含まれる長方形 T_1, B_1, T_2, B_2, T_3 を図 3.1 のように取る. (A_3 の点 a_r は T_r の内部に含まれていて, B_s は T_s, T_{s+1} と左右の辺を共有している.) $B = B_1 \cup B_2$, $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ とおく. $\theta_k \in \text{Aut}_+(D^2, A_3)$ ($k \in \{1, 2\}$) を次で定める.

- $B \cup T$ は θ_1 (θ_2) によって図 3.2 (a) (図 3.2 (b)) のように写される.
- $\theta_k|_{B_i}$ ($i = 1, 2$) は, 水平方向に一様に拡大し, 垂直方向に一様に縮小する.
- $\theta_k|_T$ は縮小写像である.
- θ_k は $D^2 \setminus (B \cup T)$ 内に周期点をもたない.

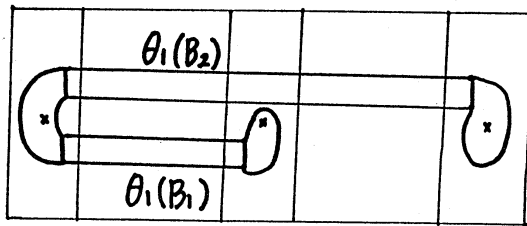


図 3.2 (a)

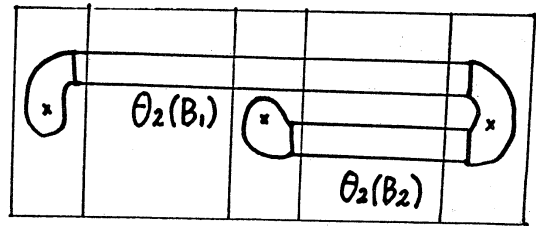


図 3.2 (b)

$[\theta_1] = \sigma_1 Z(B_3)$, $[\theta_2] = \sigma_2^{-1} Z(B_3)$ であることに注意する. よって, $p_1, q_1, \dots, p_r, q_r \in \mathbb{N}$ に対して $[\theta_2^{q_r} \circ \theta_1^{p_r} \circ \dots \circ \theta_2^{q_1} \circ \theta_1^{p_1}] = \sigma_1^{p_1} \sigma_2^{-q_1} \dots \sigma_1^{p_r} \sigma_2^{-q_r} Z(B_3)$ である.

以下, 集合 A_3 が $\theta_2^{q_r} \circ \theta_1^{p_r} \circ \dots \circ \theta_2^{q_1} \circ \theta_1^{p_1}$ の周期 3 の周期軌道となるような $p_1, q_1, \dots, p_r, q_r \in \mathbb{N}$ について考え, このとき, $\theta_2^{q_r} \circ \theta_1^{p_r} \circ \dots \circ \theta_2^{q_1} \circ \theta_1^{p_1}$ を $\theta(p_1, q_1, \dots, p_r, q_r)$ とかく.

Lemma 3.2. $\theta = \theta(p_1, q_1, \dots, p_r, q_r)$ は偽の推移をもたない, すなわち, 任意の $r, s \in \{1, 2\}$ と任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, (D^2, A_3) 内で自明なループとホモトピックな, B_s の vertical line の一部からなる弧 α と B_r の horizontal line の一部からなる弧 β の θ^k による像 $\theta^k(\beta)$ でできるループが存在しない.

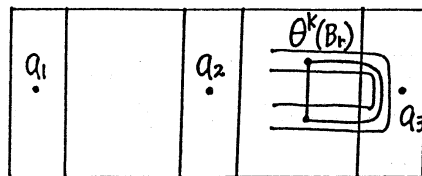


図 3.3 (D^2, A_3) 内で自明なループの例

上の θ が偽の推移をもたないことから, $\varphi \in [\theta]$ なる pseudo-Anosov relative to A_3 の周期軌道の組み紐型の集合と, θ の周期軌道の組み紐型の集合は, 高々有限個を除いて完全に対応することが, [5; Theorem 6] よりわかる. さらに, この結果の証明 [5; Theorem 6] から次が成り立つことがわかる.

(*) φ は全ての絡み目型を導く $\iff \theta$ は全ての絡み目型を導く.

Outline of proof of Proposition 3.1. 上の (*) より, 任意の $\theta = \theta(p_1, q_1, \dots, p_r, q_r)$ が全ての絡み目型を導くことを示す.

$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \theta^n(B_1 \cup B_2)$ とおく. 恒等写像 id_{D^2} と θ を結ぶ D^2 上のアイソトピー Θ をとる. このとき, ある $m \in \mathbb{Z}$ と, Lemma 2.3.1 の \mathcal{V} 又は \mathcal{W} と S^3 内でアイソトピックな template $\mathcal{T} \subset S^3$ が存在して

$$\begin{aligned} & \{L \mid L \text{ は } \mathcal{T} \text{ 上の周期軌道の有限個の和集合} \} \\ & \subset \{h_m(S_\Theta P) \mid P \subset \Lambda, P \text{ は } \theta \text{ の周期軌道の有限個の和集合} \} \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる. Lemma 2.3.1 より \mathcal{T} は universal である. これより θ は全ての絡み目型を導く. \square

4 Theorem B

D^2 の内部に含まれる長方形 T_i ($1 \leq i \leq 5$), B_j ($1 \leq j \leq 4$) を図 4.1(a) のように取る.

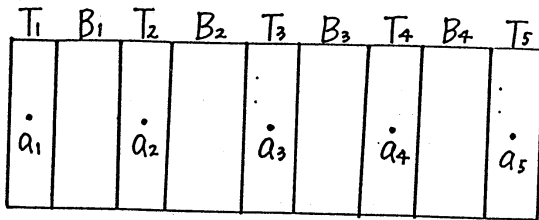


図 4.1(a)

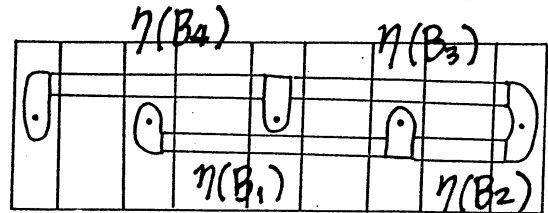


図 4.1(b)

$B = \bigcup_{i=1}^5 B_i, T = \bigcup_{j=1}^4 T_j$ とおく. $\eta \in \text{Aut}_+(D^2, A_5)$ を次で定める.

- $B \cup T$ は η によって図 4.1(b) のように写される.
- $\eta|_{B_i}$ ($1 \leq i \leq 4$) は, 水平方向に一様に拡大し, 垂直方向に一様に縮小する.
- $\eta|_T$ は縮小写像である.
- η は $D^2 \setminus (B \cup T)$ 内に周期点をもたない.

$\eta \in \text{Aut}_+(D^2, A_5)$ のアイソトピークラス $[\eta]$ は $\sigma_3 \sigma_2 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 Z(B_5)$ であり, $[\eta]$ は pseudo-Anosov であることが確かめられる.

Lemma 4.1 ([5; Section 6]). η は偽の推移をもたない, すなわち, 任意の $r, s \in \{1, 2, 3, 4\}$ と任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, (D^2, A_3) 内で自明なループとホモトピックな, B_s の vertical line の一部からなる弧と B_r の horizontal line の一部からなる弧の η^k による像でできる

ループが存在しない。

上の lemma より $\psi \in [\eta]$ なる pseudo-Anosov $\psi : (D^2, A_5) \rightarrow (D^2, A_5)$ relative to A_5 に対して, 次が成り立つことがわかる。

(*) ψ は全ての絡み目型を導く $\iff \eta$ は全ての絡み目型を導く。

よって Theorem B を示すためには次の Proposition 4.2 を示せば十分である。

Proposition 4.2. η は全ての絡み目型を導かない。

Proof. $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \eta^n(B_1 \cup \dots \cup B_4)$ とおく。 D^2 上のアイソトピー $\Psi = \{\eta_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ ($\eta_0 = id_{D^2}$, $\eta_1 = \eta$) を、 BUT の η_t による像が図 4.2 であるものとする。

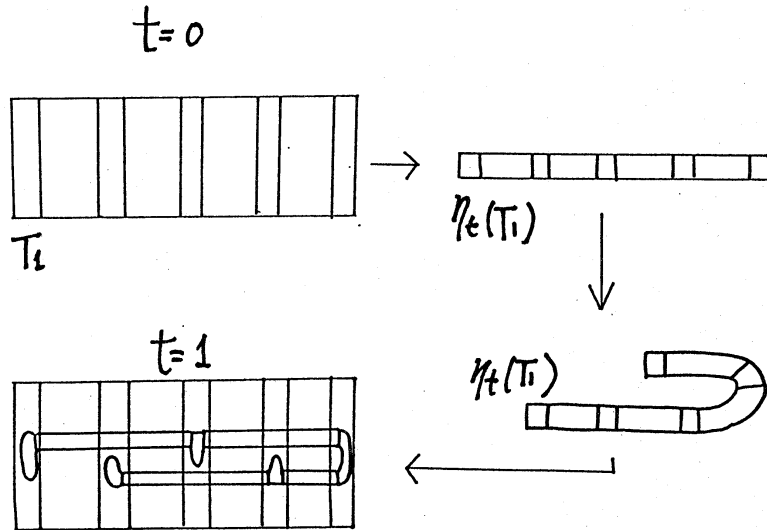


図 4.2

η の定義から Λ は双曲型集合であり, $\mathcal{R} = \{\Lambda \cap B_i \mid i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ は Λ のマルコフ分割を与えることから, ある template $U^0 \subset S^3$ (図 2.3.3(a)) が存在して次を満たす。

$$\begin{aligned} & \{h_0(S_\Psi P) \mid P \subset \Lambda, P \text{ は } \eta \text{ の周期軌道の有限個の和集合}\} \\ &= \{L \mid L \text{ は } U^0 \text{ 上の周期軌道の有限個の和集合}\}. \end{aligned}$$

$U^0 \subset S^3$ に m -full twists ($m \in \mathbb{Z}$) を加えて得られる template を $U^m \subset S^3$ と表す. 上の等式より次は直ちに従う。

$$\begin{aligned} & \{h_m(S_\Psi P) \mid P \subset \Lambda, P \text{ は } \eta \text{ の周期軌道の有限個の和集合}\} \\ &= \{L \mid L \text{ は } U^m \text{ 上の周期軌道の有限個の和集合}\}. \end{aligned}$$

まず, U^m ($m \in \mathbf{Z}$) が universal でないことを示す. U^0 は positive template である (図 2.3.3(a)). これより, 明らかに U^m ($m > 0$) は positive template である.

U^{-1} について考える (図 4.3(a)). U^{-1} は S^3 内で図 4.3(b) の negative template とアイソトピックであることがわかる. これより, U^{-1} は negative である. よって U^m ($m < 0$) もまた negative である. よって Remark 2.3.2 より U^m ($m \in \mathbf{Z}$) は universal でない.

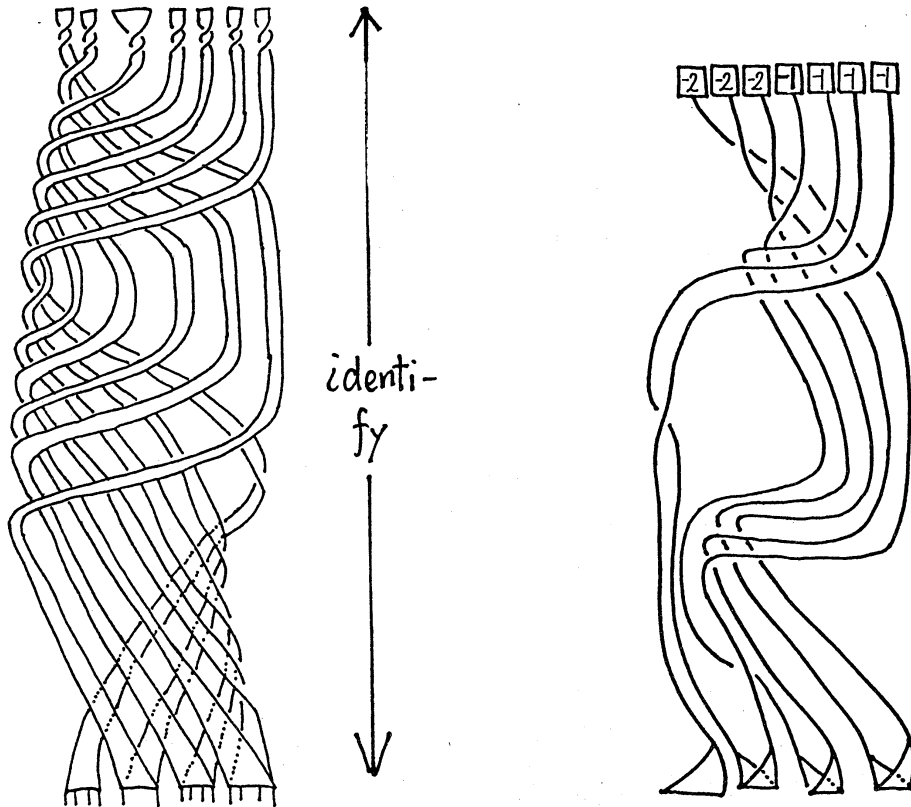


図 4.3(a) U^{-1}

図 4.3(b)

η の定義より, η の周期点は $A_5 \cup \Lambda$ に含まれる. [5; Lemma 5] より, ある 5 点集合 $B_5 \subset \Lambda$ が存在して, 任意の $m \in \mathbf{Z}$ に対して結び目 $h_m(S_\Psi A_5)$ と $h_m(S_\Psi B_5)$ は等しいことが直ちにわかる. この事実と, U^m ($m \in \mathbf{Z}$) が universal でないことから η は全ての絡み目型を導かない. \square

参考文献

- [1] J. M. Gambaudo, S. van Strien and C. Tresser, *The periodic orbits structure of orientation preserving diffeomorphisms on D^2 with topological entropy zero*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor. 50 (1989) 335-356.

- [2] Robert Ghrist, *Branched two-manifolds supporting all links*, Topology 36 (2) (1997) 423-448.
- [3] Robert W. Ghrist, Philip J. Holmes, and Michael C. Sullivan, *Knots and Links in Three-Dimensional Flows*, Lect. Notes in Math. 1654, Springer-Verlag (1997).
- [4] Robert Ghrist and Todd Young, *From Morse-Smale to all knots and links* Nonlinearity 11 (1998) 1111-1125.
- [5] T. Hall, *Fat oen-dimensional representatives of pseudo-Anosov isotopy classes with minimal periodic orbit structure*, Nonlinearity 7 (1994) 367-384.
- [6] E. Kin, *A suspension of an orientation preserving diffeomorphism of D^2 with a hyperbolic fixed point and universal template*, J. Knot Thy. and Ram., 9 (6) (2000) 771-795.
- [7] E. Kin, *The third power of the Smale horseshoe induces all link types*, J. Knot Thy. and Ram., 9 (7) (2000) 939-953.
- [8] E. Kin, *Period 3 periodic orbits of pseudo-Anosov types induce all link types*, in preparation.
- [9] K. Murasugi, *On closed 3-braids*, Memoirs Amer. Math. Soc. No. 151, Amer. Math. (1974)
- [10] L. Rudolph, *Non-trivial positive braid have positive signature*, Topology 21 (3) (1982) 325-327.