

# A Universal Disentangling Formula for Coherent States of Perelomov's Type

横浜市立大学理学部 藤井 一幸 (Kazuyuki Fujii)

Faculty of Science, Yokohama City Univ.

早稲田大学理工学部 鈴木 達夫 (Tatsuo Suzuki)\*

School of Science and Engineering, Waseda Univ.

## 概要

generalized oscillator algebra に対して Perelomov type の coherent state を計算する公式 (universal disentangling formula) を与え, 例として oscillator algebra と  $su(1,1)$  の場合にその公式を適用する.

## 1 Introduction

coherent state は量子物理, 特に量子光学では重要な役割を果たしている. ([1]などを参照.) 経路積分に対しては, coherent state を用いた coherent 表示が非常に有用である. ([1], [2], [3], [4]を参照.) また最近では, 幾何学的量子コンピューターの理論にも用いられている. ([5], [6]などを参照.)

詳しいことは次節以降にまわすことにして, まず我々の考える問題の概略を述べる. oscillator algebra (harmonic oscillator) の生成・消滅演算子をそれぞれ  $a^\dagger$ ,  $a$  とし, それらの作用する Fock space の (正規化された) vacuum vector を  $|0\rangle$  とする. coherent state  $|z\rangle$  は  $a$  の固有関数として定義される.

$$a|z\rangle = z|z\rangle \quad \text{for } \forall z \in \mathbf{C}. \quad (1.1)$$

---

\*講演者

この  $|z\rangle$  は次のように書ける.

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{za^\dagger} |0\rangle = e^{za^\dagger - \bar{z}a} |0\rangle.$$

二番目の等号には Baker-Campbell-Hausdorff の公式

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A e^B \quad (1.2)$$

(ただし,  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ ) を使った. 次に  $\{K_+, K_-, K_3\}$  で  $\mathfrak{su}(1,1)$  の spin  $K$  ( $K \geq 1/2$ ) 表現を表す. これに対し, Perelomov は vacuum vector に unitary operator (coherent operator) を作用させたものとして次のような coherent state を定義した.

$$|z\rangle = e^{zK_+ - \bar{z}K_-} |K, 0\rangle \quad \text{for } \forall z \in \mathbb{C}, \quad (1.3)$$

([7], [1] を参照.) これを計算して, その algebra の性質が反映される形 (oscillator algebra なら  $e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{za^\dagger} |0\rangle$ ) にしたい. この場合には Baker-Campbell-Hausdorff の公式 (1.2) は適用できないが, Lie group  $SU(1,1)$  の Gauss 分解と離散表現を用いて公式

$$e^{zK_+ - \bar{z}K_-} = e^{\zeta K_+} e^{\log(1-|\zeta|^2) K_3} e^{-\bar{\zeta} K_-} \quad \text{ただし } \zeta = (z \tanh |z|)/|z| \quad (1.4)$$

([7], [8] を参照) が示される. これより,

$$|z\rangle = (1 - |\zeta|^2)^K e^{\zeta K_+} |K, 0\rangle \quad \text{for } 2K = 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

が求まる.

そこで, 我々は generalized oscillator algebra  $\mathcal{A} = \{1, A, A^\dagger, N\}$  に対して, Perelomov type の coherent state

$$|z\rangle = e^{zA^\dagger - \bar{z}A} |0\rangle \quad \text{for } \forall z \in \mathbb{C}. \quad (1.6)$$

を計算する公式 (universal disentangling formula) を与え, それを用いて上の2つを統一的に求めた.

## 2 Oscillator algebra の Coherent State について

後のために oscillator algebra を次のように書いておく.

$$\{1, a, a^\dagger, N \equiv a^\dagger a\},$$

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger, [N, a] = -a, [a, a^\dagger] = 1. \quad (2.1)$$

$a$  と  $a^\dagger$  の作用する Fock space を  $\mathcal{H} \equiv \{|n\rangle \mid n \geq 0\}$  とし, その作用を次で定義する.

$$\begin{aligned} a^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \\ a |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle, \\ N |n\rangle &= n |n\rangle, \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここで,  $|0\rangle$  は正規化された vacuum (i.e.  $a|0\rangle = 0$  かつ  $\langle 0|0\rangle = 1$ ).

(2.2) より  $|n\rangle$  は次で与えられる.

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (2.3)$$

これらは直交性と完全性の条件を満たす.

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1. \quad (2.4)$$

**定義 2.1** *coherent state* とは, 次を満たす  $|z\rangle$  のことである.

$$a|z\rangle = z|z\rangle \quad \text{for } \forall z \in \mathbf{C}. \quad (2.5)$$

(ただし,  $\langle z|z\rangle = 1$  と正規化しておく.)

oscillator algebra の coherent state を求めよう. 正規化されていない coherent state を  $|z\rangle$  と書いて

$$a|z\rangle = z|z\rangle \quad \text{for } \forall z \in \mathbf{C}. \quad (2.6)$$

を解くと,  $|z\rangle$  は次のように書ける.

$$\begin{aligned} |z\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(za^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = e^{za^\dagger} |0\rangle. \end{aligned}$$

$\langle z|z\rangle = e^{|z|^2}$  であるので, (正規化された) coherent state は次のようになる.

$$|z\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{\langle z|z\rangle}} e^{za^\dagger} |0\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{za^\dagger} |0\rangle. \quad (2.7)$$

Baker-Campbell-Hausdorff の公式

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]}e^Ae^B \quad (2.8)$$

(ただし,  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ ) を使うと, これは次のように書きなおすこともできる.

$$|z\rangle = e^{za^\dagger - \bar{z}a}|0\rangle. \quad (2.9)$$

**定義 2.2**

$$|z\rangle = e^{za^\dagger - \bar{z}a}|0\rangle. \quad (2.10)$$

の形の  $|z\rangle$  を *Perelomov type* の *coherent state* と呼ぶ.

Perelomov type の coherent state は, vacuum vector に unitary operator (coherent operator)  $e^{za^\dagger - \bar{z}a}$  を作用させたものになっているのが特徴である.

**注意 2.3** 今見たように, *oscillator algebra* の場合,

$$\text{定義 2.1} = \text{定義 2.2} \quad (2.11)$$

しかし, 以下に見るように *generalized oscillator algebra* の場合は,

$$\text{定義 2.1} \neq \text{定義 2.2} \quad (2.12)$$

である.

以後, Perelomov type の coherent state のみ考える.

### 3 $\mathfrak{su}(1, 1)$ に対する Perelomov Type の Coherent States について

$\{k_+, k_-, k_3\}$  を  $\mathfrak{su}(1, 1) \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  の Weyl basis とする.

$$k_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$[k_3, k_+] = k_+, \quad [k_3, k_-] = -k_-, \quad [k_-, k_+] = 2k_3. \quad (3.1)$$

次に,  $\mathfrak{su}(1, 1)$  の spin  $K$  ( $K \geq 1/2$ ) 表現を考え, その生成元を  $\{K_+, K_-, K_3\}$ ,

$$[K_3, K_+] = K_+, \quad [K_3, K_-] = -K_-, \quad [K_-, K_+] = 2K_3 \quad (3.2)$$

とする.  $\{K_+, K_-, K_3\}$  の作用する Fock space を  $\mathcal{H}_K \equiv \{|K, n\rangle \mid n \geq 0\}$  とし, 作用を次で定義する.

$$\begin{aligned} K_+|K, n\rangle &= \sqrt{(n+1)(2K+n)}|K, n+1\rangle, \\ K_-|K, n\rangle &= \sqrt{n(2K+n-1)}|K, n-1\rangle, \\ K_3|K, n\rangle &= (K+n)|K, n\rangle, \end{aligned} \quad (3.3)$$

ここで,  $|K, 0\rangle$  は正規化された vacuum ( $K_-|K, 0\rangle = 0$  かつ  $\langle K, 0|K, 0\rangle = 1$ ). (3.3) より  $|K, n\rangle$  は次で与えられる.

$$|K, n\rangle = \frac{(K_+)^n}{\sqrt{n!(2K)_n}}|K, 0\rangle, \quad (3.4)$$

ここで  $(a)_n$  は Pochhammer の記号

$$(a)_n \equiv a(a+1)\cdots(a+n-1).$$

これらは直交性と完全性の条件を満たす.

$$\langle K, m|K, n\rangle = \delta_{mn}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |K, n\rangle\langle K, n| = 1_K. \quad (3.5)$$

次に Perelomov type の coherent state を考える.

$$|z\rangle \equiv e^{zK_+ - \bar{z}K_-}|K, 0\rangle \quad \text{for } \forall z \in \mathbf{C}. \quad (3.6)$$

これには Baker-Campbell-Hausdorff の公式 (2.8) は使えない. しかし次が成り立つ.

**補題 3.1**  $\zeta = (z \tanh |z|)/|z|$  ( $z \in \mathbf{C}$ ) とおくと,

$$e^{zK_+ - \bar{z}K_-} = e^{\zeta K_+} e^{\log(1-|\zeta|^2)K_3} e^{-\bar{\zeta}K_-}. \quad (3.7)$$

証明は次のようにする.  $\rho_K$  ( $2K = 1, 2, \dots$ ) を Lie 群  $SU(1, 1)$  の spin  $K$  の離散表現とする. このとき,

$$K_+ = d\rho_K(k_+), \quad K_- = d\rho_K(k_-), \quad K_3 = d\rho_K(k_3). \quad (3.8)$$

であるので,  $SU(1, 1)$  の Gauss 分解

$$e^{zk_+ - \bar{z}k_-} = e^{\zeta k_+} e^{\log(1-|\zeta|^2)k_3} e^{-\bar{\zeta}k_-} \quad \text{ただし } \zeta = (z \tanh |z|)/|z|, \quad (3.9)$$

を用いると

$$\begin{aligned}
e^{zK_+ - \bar{z}K_-} &= e^{d\rho_K(zk_+ - \bar{z}k_-)} \\
&= \rho_K(e^{zk_+ - \bar{z}k_-}) \\
&= \rho_K(e^{\zeta k_+}) \rho_K(e^{\log(1-|\zeta|^2)k_3}) \rho_K(e^{-\bar{\zeta}k_-}) \\
&= e^{d\rho_K(\zeta k_+)} e^{d\rho_K(\log(1-|\zeta|^2)k_3)} e^{d\rho_K(-\bar{\zeta}k_-)} \\
&= e^{\zeta K_+} e^{\log(1-|\zeta|^2)K_3} e^{-\bar{\zeta}K_-}.
\end{aligned}$$

この補題と (3.3) より

$$|z\rangle = (1 - |\zeta|^2)^K e^{\zeta K_+} |K, 0\rangle \quad \text{for } 2K = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

を得る.

**注意 3.2** 上の計算は  $2K = 1, 2, \dots$  に制限されている.

これらの結果を統一的に与える公式を次節で与える.

## 4 A Universal Disentangling Formula

$\mathcal{A} \equiv \{1, A, A^\dagger, N\}$  を generalized oscillator algebra とする. ([9], [10] を参照.) その関係式は次で定義される.

$$[N, A^\dagger] = A^\dagger, \quad [N, A] = -A, \quad [A, A^\dagger] = F(N+1) - F(N), \quad (4.1)$$

ここで  $F$  は  $F(0) = 0$  かつ  $F(n) > 0$  ( $n > 0$ ) を満たす整関数. この algebra は Fock space  $\{|n\rangle \mid n \geq 0\}$  に次のように作用する.

$$\begin{aligned}
A^\dagger |n\rangle &= \sqrt{F(n+1)} |n+1\rangle, \\
A |n\rangle &= \sqrt{F(n)} |n-1\rangle, \\
N |n\rangle &= n |n\rangle,
\end{aligned} \quad (4.2)$$

ここで  $|0\rangle$  は正規化された vacuum とする. (4.2) より,  $|n\rangle$  は次のように書ける.

$$|n\rangle = \frac{(A^\dagger)^n}{\sqrt{\prod_{j=1}^n F(j)}} |0\rangle. \quad (4.3)$$

これらは直交性と完全性の条件を満たす.

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1. \quad (4.4)$$

これに対し, Perelomov type の coherent state を計算したい.

$$|z\rangle \equiv e^{zA^\dagger - \bar{z}A} |0\rangle \quad \text{for } \forall z \in \mathbf{C}. \quad (4.5)$$

我々の結果は次の定理である.

**定理 4.1** *generalized oscillator algebra* に対する *Perelomov type* の *coherent state* は次で与えられる.

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+2j)!} \Delta(n+1, j) (-|z|^2)^j \right\} \frac{(zA^\dagger)^n}{n!} |0\rangle, \quad (4.6)$$

ここで  $\Delta(n+1, j)$  は次式で定義される:

$$\begin{aligned} \Delta(n+1, 0) &= 1, \\ \Delta(n+1, j) &= \sum_{k_1=1}^{n+1} F(k_1) \sum_{k_2=1}^{k_1+1} F(k_2) \cdots \sum_{k_j=1}^{k_{j-1}+1} F(k_j). \end{aligned} \quad (4.7)$$

**注意 4.2**  $\Delta(n+1, j)$  は次の差分方程式の解である.

$$\begin{aligned} \Delta(n+1, j) &= \Delta(n, j) + F(n+1)\Delta(n+2, j-1), \\ \Delta(n+1, 0) &= 1. \end{aligned}$$

(4.7) は “path-ordered integral の離散版” に似ている.

まず (4.6) を oscillator algebra  $F(n) = n$  の場合に適用してみる. よく知られた公式

$$\sum_{k=1}^n (k)_j = \frac{(n)_{j+1}}{j+1}$$

を用いると,

$$\Delta(n+1, j) = \frac{(n+1)_{2j}}{(2j)!!} = \frac{(n+2j)!}{n!2^j j!} \quad (4.8)$$

であるので,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+2j)!} \Delta(n+1, j) (-|z|^2)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-|z|^2)^j}{2^j j!} = e^{-\frac{|z|^2}{2}}. \quad (4.9)$$

となる. これより,

## 系 4.3

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{zA^\dagger} |0\rangle.$$

これは 2 節の結果に一致する.

次に, (4.6) を  $\mathfrak{su}(1, 1)$  の spin  $K$  表現

$$F(n) = n(2K + n - 1) \quad \text{for } 2K \geq 1. \quad (4.10)$$

に適用してみる. しかし,  $\Delta(n+1, j)$  を直接求めるのは困難であることがわかる. そこで次のように書きかえる.

$$\begin{aligned} & e^{zA^\dagger - \bar{z}A} |0\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{n!}{(n+2j)!} \Delta(n+1, j) |z|^{2j} \right\} \frac{(zA^\dagger)^n}{n!} |0\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{n!}{(n+2j)!} \Delta(n+1, j) |z|^{2j+n} \right\} \frac{1}{n!} \left( \frac{z}{|z|} A^\dagger \right)^n |0\rangle \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} I_n(|z|) \frac{1}{n!} \left( \frac{z}{|z|} A^\dagger \right)^n |0\rangle. \end{aligned} \quad (4.11)$$

$r = |z|$  として,

$$I_n(r) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{n!}{(n+2j)!} \Delta(n+1, j) r^{2j+n}. \quad (4.12)$$

を考え,  $\{I_n(r) \mid n \geq 0\}$  の満たす微分方程式を求める.

命題 4.4  $n \geq 0$  に対し,

$$\frac{d}{dr} I_n(r) = n I_{n-1}(r) - \frac{F(n+1)}{n+1} I_{n+1}(r) \quad (4.13)$$

かつ

$$I_n(r) \sim r^n \quad \text{for } 0 < r \ll 1. \quad (4.14)$$

試しに命題 4.4 を oscillator algebra  $F(n) = n$  の場合に当てはめてみよう. (4.13) は

$$\frac{d}{dr} I_n = n I_{n-1} - I_{n+1}. \quad (4.15)$$

このとき, 条件 (4.14) の下で, 解は

$$I_n(r) = e^{-\frac{r^2}{2}} r^n. \quad (4.16)$$



よって(4.11)より

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (zA^\dagger)^n |0\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{zA^\dagger} |0\rangle. \quad (4.17)$$

そこで, 再び(4.10)を考える.

$$F(n) = n(2K + n - 1) \quad \text{for } 2K \geq 1.$$

(4.13)は

$$\frac{d}{dr} I_n = nI_{n-1} - (2K + n)I_{n+1}. \quad (4.18)$$

このとき, 条件(4.14)の下で, 解は

$$\begin{aligned} I_n(r) &= (\cosh r)^{-2K-n} (\sinh r)^n \\ &= (\cosh r)^{-2K} (\tanh r)^n = (1 - \tanh^2 r)^K (\tanh r)^n \end{aligned} \quad (4.19)$$

と求まり,

$$\begin{aligned} |z\rangle &= (1 - \tanh^2 |z|)^K \sum_{n=0}^{\infty} (\tanh |z|)^n \frac{1}{n!} \left( \frac{z}{|z|} K_+ \right)^n |K, 0\rangle \\ &= (1 - \tanh^2 |z|)^K e^{\tanh |z| \frac{z}{|z|} K_+} |K, 0\rangle. \end{aligned} \quad (4.20)$$

$\zeta = (z \tanh |z|)/|z|$ とおけば,

系 4.5

$$|z\rangle = (1 - |\zeta|^2)^K e^{\zeta K_+} |K, 0\rangle \quad \text{for } 2K \geq 1. \quad (4.21)$$

これより, (4.6)は今まで知られていた結果を統一的に与える公式といえる.

注意 4.6 3節の方法では, Lie 群  $SU(1,1)$  の Gauss 分解と離散表現を用いたため,  $spin K$  を半整数に制限する必要があったが, 我々は(4.6)を用いることにより, 系 4.5 を任意の  $spin K \geq 1/2$  に対して証明した. それ故, 系 4.5 は(3.10)の一般化と言える.

## 参考文献

- [1] J.R. Klauder and Bo-S. Skagerstam, *Coherent States* (World Scientific, Singapore, 1985).

- [2] K. Funahashi, T. Kashiwa, S. Sakoda and K. Fujii, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 3232.
- [3] K. Funahashi, T. Kashiwa, S. Sakoda and K. Fujii, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 4590.
- [4] K. Fujii, T. Kashiwa and S. Sakoda, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 567.
- [5] K. Fujii, *J. Math. Phys.* **41** (2000) 4406.
- [6] P. Zanardi, M. Rasetti, *Phys. Lett. A.* **264** (1999) 94.
- [7] A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications* (Springer-Verlag, Berlin, 1986).
- [8] H-C. Hu and R. Sasaki, *J. Math. Phys.* **38** (1997) 3968.
- [9] C. Quesne and N. Vansteenkiste, *Phys. Lett. A.* **240** (1998) 21.
- [10] S. Klishevich and M. Plyushchay, Supersymmetry of parafermions, hep-th/9905149.