数理解析研究所講究録
1180 巻 2000 年 127-132

A Study on Lie Algebra Spanned by Quadratic First Integrals Admitted by Discrete Linear Hamiltonian System

徳島大学・総合科学部　前田茂

1　初めに

線形 symplectic 系が許容する斉2次第1積分の全体は、Poisson 括弧 [1] に関して閉じ、Lie 環をつくる。本報告では、その Lie 環の構造を追究し、幾つかの例を提示する [4]。

2　問題と準備

本報告を通じて扱う対象は、自由度 N の線形 symplectic 系

$$x_{n+1}=Tx_{n}, \quad T\in Sp(2N, \boldsymbol{R}), \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{1}$$

で、T は固有値 ± 1 を持たないものとする。(1) が許容する $f_{S}(x)=\frac{1}{2}\ {}^{t}xSx$ なる形をした第1積分の係数行列の全体を

$$\mathcal{S}=\{S\in M(2N,\ \boldsymbol{C})\mid {}^{t}TST=S,\ {}^{t}S=S,\ \overline{S}=S\} \tag{2}$$

とすると、$\mathcal{S}$ は Poisson 括弧

$$\{S_{1},\ S_{2}\}=S_{1}JS_{2}-S_{2}JS_{1}, \quad J=\left(\begin{smallmatrix} 0 & I\\ -I & 0\end{smallmatrix}\right) \tag{3}$$

について閉じ、Lie 環をなす。本報告では、$(\mathcal{S}, \{,\})$ の構造を追究したい。

いま固有値 a を持つ ℓ 次 Jordan ブロックを $J(a,\ \ell)$ とかき、T の固有値 a に対するすべてのJordan ブロックを対角状に並べたブロック対角行列を B_{a} とかくことにする。すなわち、

$$B_{a}=\mathrm{diag}(J(a,\ \ell_{1}),\ \cdots,\ J(a,\ \ell_{u})),\ \ \ell_{1}\geq\cdots\geq\ell_{u}. \tag{4}$$

symplectic 行列の固有値は、$\{a,\ 1/a,\ \bar{a},\ 1/\bar{a}\}$ の4つ組で現れるが、このうちの1つで組を代表させよう。そのために T の固有値からなる3つの集合を定義する。

$$\Gamma_1 = \{a\ \text{は}\ T\ \text{の固有値} \mid \bar{a} = a,\ a > 1\},$$
$$\Gamma_2 = \{a\ \text{は}\ T\ \text{の固有値} \mid |a| = 1,\ \ 0 < \arg a < \pi\},$$
$$\Gamma_3 = \{a\ \text{は}\ T\ \text{の固有値} \mid |a| > 1,\ \ 0 < \arg a < \pi\}.$$

$\Gamma_1,\ \Gamma_2$ は4つ組が縮退して2つ組になる場合である。更に、各 Γ_j に属するすべての固有値 a に対する B_a を対角線上に並べたブロック対角行列を D_j とかくことにすれば、以下の事実の成り立つことが知られている [3]。

補題 1 ある *(複素)symplectic* 行列 X があって、以下の式が成立する。

$$X^{-1}TX = D, \qquad D = diag(D_1,\ D_2,\ D_3,\ \overline{D_3},\ {}^tD_1^{-1},\ {}^tD_2^{-1},\ {}^tD_3^{-1},\ {}^t\overline{D_3}^{-1}). \qquad (5)$$

注意　X の列ベクトルは T の広義固有ベクトルである。固有値 a に対する広義固有空間を $\tilde{W}_a$ とかくことにすると、上の補題は次の事実に基づく [3]。

(1) $ab \neq 1$ ならば、$\tilde{W}_a$ と $\tilde{W}_b$ とは歪直交する。
(2) $\tilde{W}_a$ に対応する Jordan ブロックを $K_1,\ \cdots,\ K_u$ とし、K_α に対応する広義固有ベクトルを $\{\xi_i^\alpha\}_i$ s.t. $T\xi_i^\alpha = a\xi_i^\alpha + (1-\delta_{i1})\xi_{i-1}^\alpha$ の形に取る。このとき、$\tilde{W}_{1/a}$ の基底 $\{\eta_j^\beta\}$ で $<\xi_i^\alpha,\ \eta_j^\beta> = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}$ を満たすものがただ1つ存在する。

以下、上記の D を symplectic 行列 T の標準形ということにする。

後の都合上、$\mathcal{S}$ の条件から実及び対称という2条件を除いた行列全体のなす集合を導入する。

$$\mathcal{M} = \{M \in M(2N,\ \boldsymbol{C}) \mid {}^tTMT = M\}.$$

$\mathcal{M}$ は、転置、複素共役、および Poisson 括弧 (3) の各演算について閉じる。

3　$\mathcal{S}$ の表現

$\mathcal{S}$ の表現空間を導入して、$\mathcal{S}$ が B_a に依存して決まる部分 Lie 環の直和になることを示す。

T の標準形 D と可換な $2N$ 次行列のなす複素線形空間 $\mathcal{U}$、及び行列間の線形写像 σ を以下によって導入しよう。

$$\mathcal{U} = \{U \in M(2N,\ \boldsymbol{C}) \mid [U,\ D] = 0\},$$
$$\sigma\ :\ M \mapsto (JX)^{-1}MX.$$

次の補題は簡単な計算によって導かれる。

補題 2 σ は $(\mathcal{M},\ \{,\})$ から $(\mathcal{U},\ [,])$ への *Lie* 環反同型写像を与える。

証明は省略する。この補題は $\mathcal{U}$ 上では、(1) の時間発展に対して f_S が不変であることは D と可換であること、ならびに Poisson 括弧 (3) が通常の括弧積で表現されることを意味する。我々の対象である $\mathcal{S}$ は $\sigma(\mathcal{S})$ と同型になる。更に、第 1 積分の係数行列が実および対称であるという性質を $\sigma(\mathcal{S})$ 上で表現することで、結局

定理 1 *Lie* 環 $\mathcal{S}$ は次で定義される $\sigma(\mathcal{S})$ と同型である。

$$\sigma(\mathcal{S}) = \{U \in M(2N,\ \boldsymbol{C}) \mid [U,\ D] = 0,\ U = J^tUJ = P\overline{U}P^{-1}\}. \tag{6}$$

ただし、行列 P は $\overline{X} = XP$ によって定義される *symplectic* 行列で、次の形をしており、

$$P = \begin{pmatrix} I & & & & & & & \\ & & & & & \overline{P_2}^{-1} & & \\ & & & I & & & & \\ & & I & & & & & \\ & & & & I & & & \\ & P_2 & & & & & & \\ & & & & & & & I \\ & & & & & & I & \end{pmatrix}$$

$\sigma(\mathcal{S})$ の係数体は $\boldsymbol{R}$ である。

この定理に基づき些か煩雑な行列計算を経ることで、$\sigma(\mathcal{S})$ に属する行列を特徴づけることができる。

補題 3 行列 U が $\sigma(\mathcal{S})$ の元であるための必要十分条件は

(1) T の標準形 D に現れるブロックに同じ次数のブロックからなるブロック対角行列 $U = \mathrm{diag}(U_1,\ U_2,\ U_3,\ \overline{U_3},\ -^tU_1,\ -^tU_2,\ -^tU_3,\ -^t\overline{U_3})$ であって、
(2) 以下の 3 種類の行列の $\boldsymbol{R}$ -線形結合になること。
 (a) $\mathrm{diag}(U_1,\ 0,\ 0,\ 0,\ -^tU_1, 0,\ 0,\ 0)$ $\quad s.t.\ [U_1,\ D_1] = 0,\ \overline{U_1} = U_1.$
 (b) $\mathrm{diag}(0,\ U_2,\ 0,\ 0,\ 0,\ -^tU_2,\ 0,\ 0)$ $\quad s.t.\ [U_2,\ D_2] = 0,\ P_2\overline{U_2} = -^tU_2P_2.$
 (c) $\mathrm{diag}(0,\ 0,\ U_3,\ \overline{U_3},\ 0,\ 0,\ -^tU_3,\ -^t\overline{U_3})$ $\quad s.t.\ [U_3,\ D_3] = 0.$

さて、D_j は Γ_j に属するすべての固有値 a で定まる小行列 B_a を対角線上に並べたブロック対角行列であった。上の補題の結論は、各ブロック成分 B_a にまでおとして記述ができ

る。以下の定理で、 B_a は (4) で与えられるブロック対角行列とし、$k=\ell_1+\cdots+\ell_u$ とする。そして、行列 $\tilde{P}$ を新たに次のように定義する。

$$TY = YD_2, \quad \tilde{P} = {}^t YJ\overline{Y}.$$

定義から明らかに、Y は D_2 に対応する、T の広義固有ベクトル達を標準形 D が得られるような順番に並べたものである。

定理 2 Γ_j $(j=1,\ 2,\ 3)$ に属する a に対して、下記のような *(**R**-線形)Lie* 環 g_a を定める。このとき、$\mathcal{S}$ は g_a の直和に同型である。

(a) $a \in \Gamma_1$ の場合 $\quad g_a = \{Q \in M(k,\ \boldsymbol{R}) \mid [Q,\ \tilde{B}] = 0\}.$
(b) $a \in \Gamma_2$ の場合 $\quad g_a = \{Q \in M(k,\ \boldsymbol{C}) \mid [Q,\ \tilde{B}] = 0,\ \ \tilde{P}\overline{Q} = -{}^tQ\tilde{P}\}.$
(c) $a \in \Gamma_3$ の場合 $\quad g_a = \{Q \in M(k,\ \boldsymbol{C}) \mid [Q,\ \tilde{B}] = 0\}.$

注意 この定理によると、目的の Lie 環 $\mathcal{S}$ は固有値に依存してきまる部分 Lie 環の直和からなることが分かる。固有値が Γ_1、または Γ_3 に属する場合は対応する部分 Lie 環は Jordan ブロックだけから定まってしまう。Γ_2 に属する固有値については、行列 $\tilde{P}$ が関係するため、T に依存することになる。しかし、数例を見る限りこの行列は単位行列になったりするので、他と同じく Jordan ブロックだけから決まりそうな予感がある。

4 Γ_1 に対応する部分 Lie 環の例

最後に、T の固有値 a が Γ_1 に属する場合の g_a の例を幾つか挙げる。本節を通じて、

$$B_a = \mathrm{diag}(J(a,\ \ell_1),\ \cdots,\ J(a,\ \ell_u)),\ \ \ell_1 \geq \cdots \geq \ell_u,\ \ k = \ell_1 + \cdots + \ell_u$$

とし、k 次行列

$$Q_{mn}^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} & & & & \\ & 0 & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & 0 & 1 & \\ & & & & \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{l} 1 \leq m \leq \ell_m,\ \ 1 \leq n \leq \ell_n, \\ \\ 1 \leq \alpha \leq min(\ell_m,\ \ell_n). \end{array} \tag{7}$$

を定める。これらの行列全体は g_a の基底をなすため、$\dim g = \sum_{j=1}^{u}(2j-1)\ell_j$ であることがわかる。そして、$1 \leq \alpha \leq min(\ell_j,\ \ell_\ell)$, $1 \leq \beta \leq min(\ell_m,\ \ell_n)$ とするとき、交換関係

$$Q_{j\ell}^{(\alpha)} Q_{mn}^{(\beta)} = \delta_{\ell m} Q_{jn}^{(\alpha+\beta-\ell_\ell)}, \qquad [Q_{j\ell}^{(\alpha)},\ Q_{mn}^{(\beta)}] = \delta_{\ell m} Q_{jn}^{(\alpha+\beta-\ell_\ell)} - \delta_{jn} Q_{m\ell}^{(\alpha+\beta-\ell_j)},$$

が成り立つことに注意する。ただし、$\gamma < 1$ および $\gamma > \min(\ell_j,\ \ell_n)$ については $Q_{jn}^{(\gamma)} = O$ と約束をする。

例を４つ挙げる。

例 1　　初めの例は、最も簡単な場合 $B_a = aI$ のときである。このときすべての k 次行列が B_a と可換となるため、g_a は $gl(k,\ \boldsymbol{R})$ となる。力学系は等方性の線形発散系であって、角運動量が部分 Lie 環 $so(k,\ \boldsymbol{R})$ を生成することは良く知られている [2]。

例 2　　次の例は、B_a がただ１つの Jordan ブロック $J(a,\ k)$ からなる場合である。このとき、B_a と可換な行列は巾零行列 $J(a,k) - aI$ の多項式しかないため、g_a は k 次元可換 Lie 環である。

例 3　　３番目の例は、B_a=diag $(J(a,\ \ell_1), J(a,\ \ell_2))$ $(\ell_1 > \ell_2)$。まず、導来環 $g_a^{(1)} = [g_a,\ g_a]$ を求めると、２つの場合が生じる。

$\ell_1 \geq 2\ell_2$ の場合:　　$g^{(1)} = \{Q_{12}^{(1)},\ \cdots,\ Q_{12}^{(\ell_2)},\ Q_{21}^{(1)},\ \cdots,\ Q_{21}^{(\ell_2)},\ Q_{11}^{(1)},\ \cdots,\ Q_{11}^{(\ell_2)}\}$.

$\ell_1 < 2\ell_2$ の場合:

$$g^{(1)} = \{Q_{12}^{(1)},\ \cdots,\ Q_{12}^{(\ell_2)},\ Q_{21}^{(1)},\ \cdots,\ Q_{21}^{(\ell_2)},\ Q_{11}^{(1)},\ \cdots,\ Q_{11}^{(\ell_1-\ell_2)},$$

$$Q_{11}^{(\ell_1-\ell_2+1)} - Q_{22}^{(1)},\ \cdots,\ Q_{11}^{(\ell_2)} - Q_{22}^{(2\ell_2-\ell_1)}\}.$$

しかし、任意の $X \in g_a$ および $Y \in g^{(1)}$ に対して、$\ell_1 > \ell_2$ によって $\mathrm{Tr}(XY) = 0$ が従うため、Cartan の定理から g_a は可解 Lie 環、$g_a^{(1)}$ は巾零 Lie 環になることが分かる。すなわち、対称性 Lie 環は、$\ell_1 + 3\ell_2$ 次元の可解 Lie 環。

例 4　　最後に、少し複雑な Lie 環が現れる例をみる。B_a が同一の Jordan ブロックからなる場合である。すなわち、$B_a = \mathrm{diag}(J(a,\ \ell),\ J(a,\ \ell))$。このとき、$g_a$ の中心 ζ および導来環 $g^{(1)}$ は、

$$\begin{aligned} \zeta &= \{Q_{11}^{(1)} + Q_{22}^{(1)},\ \cdots,\ Q_{11}^{(\ell)} + Q_{22}^{(\ell)}\}, \\ g^{(1)} &= \{Q_{12}^{(1)},\ \cdots,\ Q_{12}^{(\ell)},\ Q_{21}^{(1)},\ \cdots,\ Q_{21}^{(\ell)},\ Q_{11}^{(1)} - Q_{22}^{(1)},\ \cdots,\ Q_{11}^{(\ell)} - Q_{22}^{(\ell)}\}, \end{aligned}$$

となり、しかも $g = \zeta \oplus g^{(1)}$ と $g^{(1)} = [g^{(1)},\ g^{(1)}]$ が成り立つ。$g^{(1)}$ の Levi 分解 $g^{(1)} = s \oplus r$ は、半単純部分 s と根基 r を以下のように構成することで実現される。

$$
\begin{aligned}
s &= \{Q_{12}^{(\ell)},\ Q_{21}^{(\ell)},\ Q_{11}^{(\ell)} - Q_{22}^{(\ell)}\}, \\
r &= \{Q_{12}^{(1)},\ \cdots,\ Q_{12}^{(\ell-1)},\ Q_{21}^{(1)},\ \cdots,\ Q_{21}^{(\ell-1)},\ Q_{11}^{(1)} - Q_{22}^{(1)},\ \cdots,\ Q_{11}^{(\ell-1)} - Q_{22}^{(\ell-1)}\}.
\end{aligned}
$$

そして、$\zeta \oplus r$ は g_a の根基であって、s は次の基底をつくることで $so(2,\ 1)$ になることが分かる。

$$[X_1,\ X_2] = -X_3, \quad [X_2,\ X_3] = -X_1, \quad [X_3,\ X_1] = X_2.$$

ただし、$X_1 = (Q_{12}^{(\ell)} + Q_{21}^{(\ell)})/2$, $X_2 = (Q_{12}^{(\ell)} - Q_{21}^{(\ell)})/2$, および $X_3 = (Q_{11}^{(\ell)} - Q_{22}^{(\ell)})/2$.

参考文献

[1] V.I.Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, 2nd. ed., Springer, New York, 1991.

[2] M. Ikeda and S. Maeda, On symmetries in a discrete model of mechanical systems, Math. Japon., **23** (1978), 231-244.

[3] S. Maeda, A Topic of Quadratic First Integral of Linear Symplectic System, J. Math. Tokushima Univ., **30**(1996), 11-17.

[4] S. Maeda, A Study on Lie Algebra Spanned by Quadratic First Integrals Admitted by Discrete Linear Hamiltonian System, Int. J. Appl. Math, **2**(2000), 635-644.