数理解析研究所講究録
1180 巻 2000 年 81-104

運動量について4次の多項式第一積分を持つ 2次元同次多項式ポテンシャル系

総研大 中川克也 (Katsuya Nakagawa)
Department of Astronomical Science
The Graduate University for Advanced Studies
e-mail:k.nakagawa@nao.ac.jp

国立天文台 吉田春夫 (Haruo Yoshida)
National Astronomical Observatory
e-mail:h.yoshida@nao.ac.jp

概要

ハミルトニアンと独立な多項式第一積分を持つ2次元同次多項式ポテンシャル系について調べた．Bertrand-Darboux の定理からも分かるように，運動量について1次・2次の多項式第一積分が存在するのは，系が極座標・放物線座標・直交座標のいずれかで変数分離可能な場合に限る．運動量について3次以上の多項式第一積分に対しては，これまで完全なリストは知られていなかった．ただ，1980年代初めに発見された3次のポテンシャル2個と4次のポテンシャル1個に対して，運動量について真に4次の多項式第一積分が存在することが知られてきた．また，Hietarinta (1983) は，ポテンシャルが5次以下ならば，運動量について真に3次・4次の多項式第一積分が存在するのは，この既知の3つの場合に限るという結果を得ている．しかし，それから現在に至るまで目立った進展は報告されてこなかった．本研究では，Hietarinta (1983) の結果を受けて,「より高次のポテンシャルに対して，運動量について真に3次・4次の多項式第一積分が存在するか？」という問題に取り組んだ．そして，この問題に対して否定的な解答を与え，運動量について真に3次・4次の多項式第一積分が存在するのは，既知の3つの特殊な場合のみであることを示した．これにより，運動量について高々4次の多項式第一積分を持つ2次元同次多項式ポテンシャル系のリストを得た．

1 はじめに

Hamilton 系において包合系をなす自由度の数だけの独立な**第一積分**が存在するとき，運動方程式は求積可能，つまり基本的な演算のみで解を求めることができる (Liouville の定理)．このとき，系は**可積分**であるという．**与えられた Hamilton 系が可積分か否かを判定すること**は力学における基本問題である．系のハミルトニアン自身が第一積分になっているので，可積分性の判定が問題となる最も簡単な場合は自由度2の系である．Liouville の定理により，自由度2の系はハミルトニアンと独立な第一積分を1個持つとき可積分である．ここでは，2次元ポテンシャル系

$$H=\frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2)+V(x,y) \tag{1}$$

を考える．系 (1) において，ハミルトニアンと独立な第一積分が存在するかどうかは，ポテンシャル $V(x,y)$ の形に懸かっている．しかし，この最も簡単な場合でも，与えられたポテンシャルに対して，系の可積分性を判定する方法 (可積分性の必要十分条件) は知られていない．

特異点解析における解の Painlevé 性 [10] は，系の可積分性と深い関係があると考えられている (Painlevé 予想)．解の Painlevé 性とは，動く特異点が極のみであるという性質のことである．また，特異点の範囲を代数的分岐点まで広げたものを weak-Painlevé 性 [9] という．解の Painlevé 性と系の可積分性の間の関係は証明されてはいないが，解の Painlevé 性を要請することによって，新たな可積分系が発見された例もある [1, 9]．これは，Painlevé 性が可積分性の十分条件として有効に働いたことを示している．また，ポテンシャルに対して非常に強い制約を課すこととなった Morales-Ruiz and Ramis [6, 7] による同次式ポテンシャル系の可積分性の必要条件により，可積分性の必要条件としての weak-Painlevé 性が正当化されることが分かっている [11].

さて，解の Painlevé 性を要請することによって初めて発見された可積分系が存在すると述べたが，実際のところは次のようにして発見された．まず，係数が未知の多項式ポテンシャルを持つ系 (1) に対して，解が Painlevé 性を有するようにポテンシャルの係数を決定する．そして，幸運にもハミルトニアンと独立な第一積分を見つけることができ，新たな可積分系の発見と相成ったわけである．ここで注意しなければならないのは，解の Pailevé 性は可積分系候補をあぶり出すだけということである．実際に可積分であることを証明するには，ハミルトニアンと独立な第一積分を見つける必要がある．ある関数 Φ が第一積分となるための条件は，系のハミルトニアンとの Poisson 括弧の値が 0 となることである．この条件は，関数 $\Phi(x, y, p_x, p_y)$ とポテンシャル $V(x, y)$ に対する偏微分方程式を与える．これを直接解析的に解くことはほとんど無理であるから，色々と制限を付けることになる．例えば，第一積分を多項式あるいは有理式の範囲に限定したりする．この辺りのことは，Hietarinta によるレビュー論文 [3] に詳しい．

本研究では，$\{\Phi, H\} = 0$ から導かれる偏微分方程式の多項式解に注目する．つまり，ポテンシャルと第一積分を共に多項式と仮定する．多項式ポテンシャル $V(x, y)$ は，同次部分に分けて

$$V(x, y) = V_{\min} + \cdots + V_{\max} \tag{2}$$

と書ける．ここで，$V_{\min}$ は最低次部分，$V_{\max}$ は最高次部分である．いま，ポテンシャル (2) を持つ系 (1) が可積分であるとする．このとき，ポテンシャルの最低次部分だけをとった系と最高次部分だけをとった系

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V_{\min}(x, y), \quad H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V_{\max}(x, y) \tag{3}$$

は，それぞれ単独で可積分とならなければならない．更に，元の系がハミルトニアンと独立な多項式第一積分を持つならば，ポテンシャルの最低次部分だけをとった系と最高次部分だけをとった系も，それぞれハミルトニアンと独立な多項式第一積分を持つ [3]．この事実により，まず同次多項式ポテンシャルを考えることが，一般の非同次多項式ポテンシャルの場合の基礎になることが分かる．更に，§2 でも述べるように，同次多項式ポテンシャルを仮定することにより，第一積分の扱いが簡単化され，ほとんど不可能に思われた偏微分方程式の解析が可能になる．本研究の最終的な目標は，**ハミルトニアンと独立な多項式第一積分を持つ 2 次元同次多項式ポテンシャル系のリスト**を作ることである．

本稿の構成は以下の通りである．まず，§2 では，多項式第一積分を求めるための準備をし，$\{\Phi, H\} = 0$ から得られる偏微分方程式の解析法を一般的な形で述べる．§3 では，既知の事実を簡単にまとめた後，今回得られた新しい結果を主定理として示す (定理 1)．そして，その証明の方針とエッセンスを §4 で述べる．最後の §5 で，定理 1 より導かれる結果として，運動量について高々 4 次の多項式第一積分を持つ 2 次元同次多項式ポテンシャルのリストを示す (定理 2)．

2 多項式第一積分

2.1 時間反転対称性と相似変換不変性

多項式第一積分 Φ に対して，一般性を失うことなく次の 2 つの性質を仮定することができる．

Property 1. Φ は運動量 (p_x, p_y) について偶関数か奇関数のどちらかである．

Property 2. Φ はポテンシャルの次数 k によって決まる量をウエイトとする同次式である．

Property 1 は系 (1) の時間反転対称性から導かれる．系 (1) は，時間反転の変換

$$t \to -t, \quad x \to x, \quad y \to y, \quad p_x \to -p_x, \quad p_y \to -p_y \tag{4}$$

により不変であるから，$\Phi(x,y,p_x,p_y)$ が第一積分ならば，$\Phi(x,y,-p_x,-p_y)$ も第一積分となる．したがって，

$$\Phi^+ = \frac{\Phi(x,y,p_x,p_y)+\Phi(x,y,-p_x,-p_y)}{2}, \quad \Phi^- = \frac{\Phi(x,y,p_x,p_y)-\Phi(x,y,-p_x,-p_y)}{2} \tag{5}$$

も第一積分である．ここで，任意の第一積分 Φ は $\Phi = \Phi^+ + \Phi^-$ と書けることに注意しよう．そして，Φ^+ は (p_x,p_y) について偶関数の第一積分，Φ^- は (p_x,p_y) について奇関数の第一積分になっている．したがって，第一積分として最初から Φ^+ または Φ^- を考えることができる．つまり，第一積分は運動量 (p_x,p_y) について偶関数か奇関数のどちらかであると仮定してもよい．

Property 2 は同次多項式ポテンシャル系の相似変換 (スケール変換) に対する不変性から導かれる．一般に N 階の微分方程式系

$$\frac{dx_i}{dt} = F(x_1,x_2,\ldots,x_N), \quad (i=1,2,\ldots,N) \tag{6}$$

が，$g_1,g_2,\ldots,g_N$ を適当な定数とする相似変換

$$t \to \sigma^{-1}t, \quad x_1 \to \sigma^{g_1}x_1, \quad x_2 \to \sigma^{g_2}x_2, \ldots, x_N \to \sigma^{g_N}x_N \tag{7}$$

によって不変であるとき，この系を**相似不変系**という．ここで，パラメーター σ は任意である．また，相似変換によって σ^M 倍される，つまり

$$\phi(\sigma^{-1}t,\sigma^{g_1}x_1,\ldots,\sigma^{g_N}x_N) = \sigma^M\phi(t,x_1,\ldots,x_N) \tag{8}$$

を満たす関数 $\phi(t,\boldsymbol{x})$ を **M をウエイトとする同次式**という．いま，ある相似不変系が多項式第一積分 Φ を持つとする．この多項式第一積分は

$$\Phi = \sum_m \Phi_m \tag{9}$$

のような和に表すことができる．ここで，Φ_m は m をウエイトとする同次多項式である．これは相似変換により

$$\Phi' = \sum_m \sigma^m\Phi_m \tag{10}$$

となり，再び元の系の第一積分になる．パラメーター σ は任意であるから，結局すべての Φ_m が第一積分になっていることが分かる．したがって，相似不変系における多項式第一積分は相似変換によって決まる量をウエイトとする同次式であると仮定してもよい．さて，ポテンシャルが k 次の同次多項式のとき，系 (1) は相似変換

$$t \to \sigma^{-1}t, \quad x \to \sigma^{2/(k-2)}x, \quad y \to \sigma^{2/(k-2)}y, \quad p_x \to \sigma^{k/(k-2)}p_x, \quad p_y \to \sigma^{k/(k-2)}p_y \tag{11}$$

によって不変である．よって，同次多項式ポテンシャル系の多項式第一積分はポテンシャルの次数 k によって決まる量をウエイトとする同次多項式であると仮定できる．例えば，系のハミルトニアン自身は

$$H(\sigma^{2/(k-2)}x,\sigma^{2/(k-2)}y,\sigma^{k/(k-2)}p_x,\sigma^{k/(k-2)}p_y) = \sigma^{2k/(k-2)}H(x,y,p_x,p_y) \tag{12}$$

より，$2k/(k-2)$ をウエイトとする多項式第一積分である．

2.2 運動量について N 次の多項式第一積分

Property 1 より，運動量について N 次の多項式第一積分は

$$\Phi = \sum_{n=0}^{[N/2]} \sum_{m=0}^{N-2n} A^{m,N-2n}(x,y) p_x^{N-2n-m} p_y^m \tag{13}$$

と書ける．ハミルトニアンとの Poisson 括弧の値を 0 とおくことにより得られる偏微分方程式は，

$$\begin{aligned}\{\Phi, H\} &= \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial\Phi}{\partial p_x}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial\Phi}{\partial p_y}\frac{\partial H}{\partial y} \\ &= p_x\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial p_x}\frac{\partial V}{\partial x} + p_y\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Phi}{\partial p_y}\frac{\partial V}{\partial y} = 0\end{aligned} \tag{14}$$

である．これに (13) を代入したものを運動量 (p_x, p_y) についての恒等式とみると

$$A_x^{m-1,l-1} + A_y^{m,l-1} = (m+1)A^{m+1,l+1}V_x + (l-m+1)A^{m,l+1}V_y, \quad (m = 0, 1, \ldots, l) \tag{15}$$

を得る．ただし，

$$l = N+1, N-1, N-3, \ldots, \begin{cases} 0 & (N \text{ が奇数}) \\ 1 & (N \text{ が偶数}) \end{cases}$$

で，$s<0, t<0, s>N$, または $t>N$ のときは $A^{s,t}=0$ とする．また，下付きの x, y は偏微分を表す．まず，$l = N+1$ に対して，(15) は

$$A_x^{m-1,N} + A_y^{m,N} = 0, \quad (m = 0, 1, \ldots, N+1) \tag{16}$$

となる．これを解いて，多項式の解

$$A^{m,N}(x,y) = \sum_{v=0}^{m} \sum_{u=0}^{N-m} (-1)^v \binom{u+v}{v} a_{u+v,m-v} x^v y^u, \quad (m = 0, 1, \ldots, N) \tag{17}$$

を得る．ここで，$a_{u+v,m-v}$ は積分定数である．Property 2 より，$N+1$ 個の多項式 $A^{m,N}$ は次数の等しい同次多項式であると仮定できる．したがって，解 (17) は，同次部分に分けて考えることができる．つまり，問題は和 $u+v$ によってラベル付けされる $N+1$ 通りの場合に分けられる $(u+v = N, N-1, \ldots, 0)$．各々の場合に，第一積分の運動量について N 次の項は次のような形になる．

$$\begin{aligned}&\textbf{Case 1}\ (u+v=N) &&: \Phi = a_{N,0}(yp_x - xp_y)^N + \cdots \\ &\textbf{Case 2}\ (u+v=N-1) &&: \Phi = (a_{N-1,0}p_x + a_{N-1,1}p_y)(yp_x - xp_y)^{N-1} + \cdots \\ &\quad\vdots \\ &\textbf{Case N+1}\ (u+v=0) &&: \Phi = a_{0,0}p_x^N + a_{0,1}p_x^{N-1}p_y + \cdots + a_{0,N}p_y^N + \cdots\end{aligned}$$

次に，$l = N-1$ に対して，(15) は

$$A_x^{m-1,N-2} + A_y^{m,N-2} = (m+1)A^{m+1,N}V_x + (N-m)A^{m,N}V_y, \quad (m = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{18}$$

となる．(18) の $(m+1)$ 番目の式の両辺に偏微分演算子 $(-1)^m\partial^{N-1}/\partial x^{N-m-1}\partial y^m$ を作用させて，$m=0$ から $m=N-1$ までの和をとると，左辺の和は 0 になり，右辺の和からポテンシャルについての偏微分方程式

$$\sum_{m=0}^{N-1}(-1)^m \frac{\partial^{N-1}}{\partial x^{N-m-1}\partial y^m}\left[(m+1)A^{m+1,N}V_x+(N-m)A^{m,N}V_y\right]=0 \tag{19}$$

を得る．$l=N-3,N-5,\ldots$ に対しても，同様の操作によってポテンシャルについての偏微分方程式を導くことができる．これにより，N が奇数のときは $(N+1)/2$ 個，N が偶数のときは $N/2$ 個の偏微分方程式を得る．こうして得られた偏微分方程式の完全な解析解が知られているのは，$N=1,2$ の場合のみである [3]．$N\geq 3$ に対して，完全な解を求めるのはほとんど不可能のように思われる．§1 で述べたように，本研究では，同次多項式ポテンシャルを考えるのだった．上で得られた偏微分方程式において，$V(x,y)$ に同次多項式を代入したものは (x,y) についての恒等式にならなければならない．係数がすべて 0 に等しいとおくことにより，ポテンシャルと第一積分の係数を未知数とする連立代数方程式が得られる．つまり，偏微分方程式を解く問題が，連立代数方程式を解く問題に帰着した．

ここで，多項式第一積分 (13) の係数多項式 $A^{m,N-2n}(x,y)(n=1,2,\ldots)$ について注意しておく．Property 2 より，これらは次数の等しい同次多項式と仮定してよい．運動量について N 次の項の係数多項式 $A^{m,N}(x,y)$ が $u+v$ 次の同次多項式であるとき，相似変換 (11) に対する第一積分の運動量について N 次の項のウエイトは

$$(u+v)\frac{2}{k-2}+N\frac{k}{k-2}=\frac{2(u+v)+Nk}{k-2} \tag{20}$$

である．第一積分の運動量について $N-2n$ 次の項のウエイトもこれに等しくなければならないので，同次多項式 $A^{m,N-2n}(x,y)$ の次数は $u+v+nk$ となる．

2.3 同次多項式ポテンシャル

ポテンシャルを k 次の複素数係数同次多項式とし，

$$V(x,y)=V_k=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x^{k-j}y^j=\alpha_0 x^k+\alpha_1 x^{k-1}y+\cdots+\alpha_k y^k \tag{21}$$

と書く．ここで，座標回転による自由度について述べておく．可積分なポテンシャルを座標回転して得られるポテンシャルは可積分である．したがって，可積分なポテンシャルを座標回転することによって，見かけ上は異なる可積分なポテンシャルを無数に作ることができる．このような座標回転の自由度を除去するために，ポテンシャル (21) において最初から $\alpha_1=0$ としておく．実際には，$x^{k-1}y$ の項が消去されるような座標回転を考えることになる．角度 φ の座標回転を

$$x\to x\cos\varphi-y\sin\varphi,\quad y\to x\sin\varphi+y\cos\varphi \tag{22}$$

で与えると，$x^{k-1}y$ の項が消去されるという条件は，$\tan\varphi$ についての k 次の代数方程式を与える．つまり，求める座標回転は高々 k 個ということになる．例えば，明らかに可積分な 4 次の同次多項式ポテンシャル

$$V_4=x^4+y^4 \tag{23}$$

は 30°, 45° の回転により，それぞれ一見明らかではないが，可積分なポテンシャル

$$V_4 = 5x^4 - 4\sqrt{3}x^3y + 18x^2y^2 + 4\sqrt{3}xy^3 + 5y^4 \tag{24}$$

$$V_4 = x^4 + 6x^2y^2 + y^4 \tag{25}$$

になる．最初から $\alpha_1 = 0$ とすることによって，(24) のようなポテンシャルは除外できることになる．しかし，(25) のようなポテンシャルは，依然として残っている．実際，$\alpha_1 = 0$ のポテンシャル (21) で，座標回転により互いに移り合うものの数は高々k 個である．ポテンシャル (23) の場合は，それ自身と (25) の 2 個である．

最初から $\alpha_1 = 0$ にしておくと，2 次の同次多項式ポテンシャルは，$V = \alpha_0 x^2 + \alpha_2 y^2$ となる．これは，第一積分 $\Phi = p_x^2 + 2\alpha_0 x^2$ を持つので可積分である．よって，2 次の同次多項式ポテンシャルは常に可積分であると考えることができる．本研究では，ポテンシャルの次数 k を $k \geq 3$ として解析を行なう．

3 既知の事実と新しい結果 (主定理)

3.1 運動量について 1 次・2 次の多項式第一積分

$N = 1, 2$ に対しては，§2.2 で得られた偏微分方程式の解析解が知られているので [3]，その解を用いれば，運動量について 1 次・2 次の多項式第一積分を持つ 2 次元同次多項式ポテンシャル系を求めることができる．しかし，ここでは，本研究で行なった解析の簡単な具体例を見るために，§2.2 で述べた偏微分方程式を連立代数方程式に直して解くという方法を取る．

運動量について 1 次の多項式第一積分は運動量について奇関数と仮定してよいので，

$$\Phi = A_0(x, y)p_x + A_1(x, y)p_y \tag{26}$$

とおける．ハミルトニアンとの Poisson 括弧が 0 になる条件 (15) は，

$$A_{0x} = 0, \quad A_{0y} + A_{1x} = 0, \quad A_{1y} = 0 \tag{27}$$

$$A_0V_x + A_1V_y = 0 \tag{28}$$

と書ける．(27) から運動量について 1 次の項が決まり，場合分けは次の 2 通りになる．

$$\textbf{Case 1.}\ \ \Phi = a_1(yp_x - xp_y) \tag{29}$$

$$\textbf{Case 2.}\ \ \Phi = a_0p_x + b_0p_y \tag{30}$$

このとき，(28) は，

$$\textbf{Case 1.}\ \ a_1(yV_x - xV_y) = 0 \tag{31}$$

$$\textbf{Case 2.}\ \ a_0V_x + b_0V_y = 0 \tag{32}$$

となる．ポテンシャル (21) を偏微分方程式 (31), (32) に代入したものは，(x, y) についての恒等式にならなければならない．係数を 0 に等しいとして得られる連立代数方程式が，$a_1 \neq 0$ (Case 1), $(a_0, b_0) \neq (0, 0)$ (Case 2) なる解を持つようにポテンシャルの係数 α_j を定めればよい．結果は次

のようになる．解析の詳細については，Appendix A.1 を参照のこと．

ポテンシャル	ハミルトニアンと独立な第一積分
$V_k = r^k = (x^2+y^2)^{k/2}$, k は偶数	$\Phi = yp_x - xp_y$
$V_k = x^k$	$\Phi = p_y$

運動量について 2 次の多項式第一積分は運動量について偶関数と仮定できるから

$$\Phi = A_0(x,y)p_x^2 + A_1(x,y)p_xp_y + A_2(x,y)p_y^2 + B_0(x,y) \tag{33}$$

とおく．ハミルトニアンとの Poisson 括弧の値が 0 になるための条件 (15) を書き下すと，

$$A_{0x} = 0, \quad A_{0y} + A_{1x} = 0, \quad A_{1y} + A_{2x} = 0, \quad A_{2y} = 0 \tag{34}$$

$$B_{0x} = 2A_0V_x + A_1V_y, \quad B_{0y} = A_1V_x + 2A_2V_y \tag{35}$$

となる．(34) から運動量について 2 次の項が決まり，場合分けは次の 3 通りになる．

$$\textbf{Case 1.}\ \Phi = a_2(yp_x - xp_y)^2 + B_0(x,y) \tag{36}$$

$$\textbf{Case 2.}\ \Phi = (a_1p_x + b_1p_y)(yp_x - xp_y) + B_0(x,y) \tag{37}$$

$$\textbf{Case 3.}\ \Phi = a_0p_x^2 + b_0p_xp_y + c_0p_y^2 + B_0(x,y) \tag{38}$$

(35) の左辺において，$\partial_y B_{0x} - \partial_x B_{0y} = 0$ となることを利用すると，右辺から偏微分方程式

$$A_1(V_{xx} - V_{yy}) + 2(A_2 - A_0)V_{xy} + (A_{1x} - 2A_{0y})V_x + (2A_{2x} - A_{1y})V_y = 0 \tag{39}$$

を得る．これは，**Case 1** に対しては，

$$a_2\{xy(V_{xx} - V_{yy}) - (x^2 - y^2)V_{xy} + 3yV_x - 3xV_y\} = 0, \tag{40}$$

Case 2 に対しては，

$$a_1(xV_{xx} + 2yV_{xy} - xV_{yy} + 3V_x) + b_1(yV_{xx} - 2xV_{xy} - yV_{yy} - 3V_y) = 0, \tag{41}$$

Case 3 に対しては，

$$2a_0V_{xy} + b_0(V_{xx} - V_{yy}) - 2c_0V_{xy} = 0 \tag{42}$$

となる．ポテンシャル (21) を (40), (41), (42) に代入して (x,y) についての恒等式を得る．得られた恒等式から導かれる連立代数方程式が，$a_2 \neq 0$ (Case 1)，$(a_1, b_1) \neq (0,0)$ (Case 2)，$(a_0, b_0, c_0) \neq (0,0,0)$ (Case 3) を満足する解を持つようにポテンシャルの係数 α_j を定めればよい．結果は次のようになる．解析の詳細については，Appendix A.2 を参照のこと．

ポテンシャル	ハミルトニアンと独立な第一積分
$V_k = r^k = (x^2+y^2)^{k/2}$, k は偶数（極座標）	$\Phi = (yp_x - xp_y)^2$
$V_k = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{r+x}{2}\right)^{k+1} + (-1)^k\left(\frac{r-x}{2}\right)^{k+1}\right]$（放物線座標）	$\Phi = p_y(yp_x - xp_y) + \frac{1}{2}y^2V_{k-1}$
$V_k = Ax^k + By^k$（直交座標）	$\Phi = p_x^2 + 2Ax^k$, $p_y^2 + 2By^k$

上に挙げたポテンシャルは順に**極座標**，**放物線座標**，**直交座標**で変数分離可能な場合になっている．一方，運動量について 2 次の (必ずしも多項式でない) 第一積分については，次の定理が知られている．

Bertrand-Darboux の定理 [5]

自由度 2 の Hamilton 系 (1) において，ハミルトニアンと独立な運動量について 2 次の第一積分が存在することと，系が楕円座標・極座標・放物線座標・直交座標のいずれかで変数分離可能なことは同値である．

Bertrand-Darboux の定理の楕円座標で変数分離可能な場合は，ポテンシャルが同次多項式であるという制限によって姿を消している．

3.2 運動量について 3 次・4 次の多項式第一積分

自明な例として，

$$\Phi = (yp_x - xp_y)^3, \quad \Phi = (yp_x - xp_y)^2 H \tag{43}$$

などのように運動量について 1 次または 2 次の多項式第一積分の積によって作られる第一積分がある．このような第一積分を，運動量についてより低次の第一積分に約せるという意味を込めて，**可約**な多項式第一積分と呼ぶことにする．逆に，運動量についてより低次の多項式第一積分に約せない第一積分のことを，**既約**な多項式第一積分と呼ぶことにする．さて，運動量について 3 次以上の既約な多項式第一積分が存在する例として，現在のところ，以下の 3 つの場合が知られている．いずれも運動量について 4 次の多項式第一積分である．Grammaticos *et al* [1] と Hall [4] は独立に

$$\begin{cases} V_3 = x^3 + \dfrac{3}{16}xy^2 \\ \Phi = p_y^4 - \dfrac{1}{4}y^3p_xp_y + \dfrac{3}{4}xy^2p_y^2 - \dfrac{3}{64}x^2y^4 - \dfrac{1}{128}y^6 \end{cases} \tag{44}$$

を発見した．また，Ramani *et al* [9] は

$$\begin{cases} V_3 = x^3 + \dfrac{1}{2}xy^2 + \dfrac{\sqrt{3}\,i}{18}y^3 \\ \Phi = p_xp_y^3 - \dfrac{\sqrt{3}i}{2}p_y^4 + \dfrac{1}{2}y^3p_x^2 - \left(\dfrac{3}{2}xy^2 - \dfrac{\sqrt{3}i}{2}y^3\right)p_xp_y \\ \qquad + \left(3x^2y - \sqrt{3}ixy^2 + \dfrac{1}{2}y^3\right)p_y^2 + \dfrac{1}{2}x^3y^3 + \dfrac{\sqrt{3}i}{8}x^2y^4 - \dfrac{1}{4}xy^5 + \dfrac{5\sqrt{3}i}{72}y^6 \end{cases} \tag{45}$$

と

$$\begin{cases} V_4 = x^4 + \dfrac{3}{4}x^2y^2 + \dfrac{1}{8}y^4 \\ \Phi = p_y^4 + \dfrac{1}{2}y^4p_x^2 + \left(3x^2y^2 + \dfrac{1}{2}y^4\right)p_y^2 - 2xy^3p_xp_y + \dfrac{1}{4}x^4y^4 + \dfrac{1}{4}x^2y^6 + \dfrac{1}{16}y^8 \end{cases} \tag{46}$$

を発見した．続いて Hietarinta [2] が，5 次以下の同次多項式ポテンシャルに対して運動量について高々4 次の多項式第一積分を計算し，次のような結果を得ている．ただし，厳密な証明は与えられていない．

Hietarinta の主張 [2]

5 次以下の同次多項式ポテンシャルに対して，運動量について 3 次・4 次の既約な多項式第一積分が存在するのは，(44), (45), (46) の場合に限る．

本研究では，Hietarinta の主張が正しいことを確認し，更に同次多項式ポテンシャルの次数を任意次数に拡張して調べ，次の結果を得た．

定理 1（Nakagawa and Yoshida [8]）

5 次以上の同次多項式ポテンシャル系に対しては，運動量について 3 次・4 次の既約な多項式第一積分は存在しない．

定理 1 により，運動量について 3 次・4 次の既約な多項式第一積分が存在するのは，(44), (45), (46) の場合に限ることが分かる．

4　定理 1 について

4.1　運動量について 3 次の多項式第一積分

第一積分は運動量について奇関数であると仮定してよいので，

$$\Phi = A_0(x,y)p_x^3 + A_1(x,y)p_x^2p_y + A_2(x,y)p_xp_y^2 + A_3(x,y)p_y^3 + B_0(x,y)p_x + B_1(x,y)p_y \tag{47}$$

とおける．ハミルトニアンとの Poisson 括弧の値が 0 になるための条件 (15) を書き下すと，

$$A_{0x} = 0,\ A_{0y} + A_{1x} = 0,\ A_{1y} + A_{2x} = 0,\ A_{2y} + A_{3x} = 0,\ A_{3y} = 0 \tag{48}$$

$$B_{0x} = 3A_0V_x + A_1V_y,\ B_{0y} + B_{1x} = 2A_1V_x + 2A_2V_y,\ B_{1y} = A_2V_x + 3A_3V_y \tag{49}$$

$$B_0V_x + B_1V_y = 0 \tag{50}$$

となる．(48) から運動量について 3 次の項が決まり，場合分けは次の 4 通りになる．

Case 1. $\Phi = a_3(yp_x - xp_y)^3 + B_0p_x + B_1p_y$ (51)

Case 2. $\Phi = (a_2p_x + b_2p_y)(yp_x - xp_y)^2 + B_0p_x + B_1p_y$ (52)

Case 3. $\Phi = (a_1p_x^2 + b_1p_xp_y + c_1p_y^2)(yp_x - xp_y) + B_0p_x + B_1p_y$ (53)

Case 4. $\Phi = a_0p_x^3 + b_0p_x^2p_y + c_0p_xp_y^2 + d_0p_y^3 + B_0p_x + B_1p_y$ (54)

(49) から得られる偏微分方程式は

$$\begin{aligned} &A_2V_{xxx} + (3A_3 - 2A_1)V_{xxy} + (3A_0 - 2A_2)V_{xyy} + A_1V_{yyy} \\ &+ 2(A_{2x} - A_{1y})(V_{xx} - V_{yy}) + 2(3A_{0y} - A_{1x} - A_{2y} + 3A_{3x})V_{xy} \\ &+ (3A_{0yy} - 2A_{1xy} + A_{2xx})V_x + (A_{1yy} - 2A_{2xy} + 3A_{3xx})V_y = 0. \end{aligned} \tag{55}$$

であり，**Case 1** に対しては，

$$\begin{aligned} a_3\{&x^2yV_{xxx} + (2xy^2 - x^3)V_{xxy} + (y^3 - 2x^2y)V_{xyy} - xy^2V_{yyy} \\ &+ 8xyV_{xx} + 8(y^2 - x^2)V_{xy} - 8xyV_{yy} + 12yV_x - 12xV_x\} = 0, \end{aligned} \tag{56}$$

Case 2 に対しては，

$$
\begin{aligned}
&a_2\{x^2V_{xxx} + 4xyV_{xxy} + (3y^2 - 2x^2)V_{xyy} - 2xyV_{yyy} \\
&\quad + 8xV_{xx} + 16yV_{xy} - 8xV_{yy} + 12V_x\} + \\
&b_2\{-2xyV_{xxx} + (3x^2 - 2y^2)V_{xxy} + 4xyV_{xyy} + y^2V_{yyy} \\
&\quad - 8yV_{xx} + 16xV_{xy} + 8yV_{yy} + 12V_y\} = 0, \qquad (57)
\end{aligned}
$$

Case 3 に対しては，

$$
\begin{aligned}
&a_1(2xV_{xxy} + 3yV_{xyy} - xV_{yyy} + 8V_{xy}) + \\
&b_1(-xV_{xxx} - 2yV_{xxy} + 2xV_{xyy} + yV_{yyy} - 4V_{xx} + 4V_{yy}) + \\
&c_1(yV_{xxx} - 3xV_{xxy} - 2yV_{xyy} - 8V_{xy}) = 0, \qquad (58)
\end{aligned}
$$

Case 4 に対しては，

$$
a_0(3V_{xyy}) + b_0(-2V_{xxy} + V_{yyy}) + c_0(V_{xxx} - 2V_{xyy}) + d_0(3V_{xxy}) = 0 \qquad (59)
$$

となる．偏微分方程式 (56)–(59)，および (50) にポテンシャル (21) を代入したものを (x, y) についての恒等式とみる．その恒等式において係数がすべて 0 に等しいとおくことによって得られる連立代数方程式が，$a_3 \neq 0$ (Case 1)，$(a_2, b_2) \neq (0, 0)$ (Case 2)，$(a_1, b_1, c_1) \neq (0, 0, 0)$ (Case 3)，$(a_0, b_0, c_0, d_0) \neq (0, 0, 0, 0)$ (Case 4) となる解を持つようにポテンシャルの係数 α_j を定める．結果は次の表のようになる．解析の詳細については本論文 [8] を参照のこと．

Case	ポテンシャル	ハミルトニアンと独立な多項式第一積分
1	$V_k = (x^2 + y^2)^{k/2}$	$\Phi = (yp_x - xp_y)^3$
2	$V_k \equiv 0$	
3	$V_k = (x^2 + y^2)^{k/2}$	$\Phi = (yp_x - xp_y)H$
4	$V_k = x^k$	$\Phi = b_0p_y(p_x^2 + 2x^k) + d_0p_y^3$

上表の第一積分は，運動量について 1 次あるいは 2 次の多項式第一積分に約せる，可約な第一積分であることに注意しよう．つまり，運動量について 3 次の既約な多項式第一積分は存在しないのである．

4.2 運動量について 4 次の多項式第一積分

第一積分は運動量について偶関数と仮定してよいので，

$$
\begin{aligned}
\Phi = {} & A_0(x, y)p_x^4 + A_1(x, y)p_x^3p_y + A_2(x, y)p_x^2p_y^2 + A_3(x, y)p_xp_y^3 + A_4(x, y)p_y^4 \\
& + B_0(x, y)p_x^2 + B_1(x, y)p_xp_y + B_2(x, y)p_y^2 + C_0(x, y) \qquad (60)
\end{aligned}
$$

とおける．ハミルトニアンとの Poisson 括弧の値が 0 になるための条件 (15) を書き下すと，

$$
A_{0x} = 0,\ A_{0y} + A_{1x} = 0,\ A_{1y} + A_{2x} = 0,\ A_{2y} + A_{3x} = 0,\ A_{3y} + A_{4x} = 0,\ A_{4y} = 0 \qquad (61)
$$

$$
\begin{aligned}
&B_{0x} = 3A_0V_x + A_1V_y,\ B_{0y} + B_{1x} = 3A_1V_x + 2A_2V_y, \\
&B_{1y} + B_{2x} = 2A_2V_x + 3A_3V_y,\ B_{2y} = A_3V_x + 4A_4V_y \qquad (62)
\end{aligned}
$$

$$
C_{0x} = 2B_0V_x + B_1V_y,\ C_{0y} = B_1V_x + 2B_2V_y \qquad (63)
$$

となる．(61) から運動量について 4 次の項が決まり，場合分けは次の 5 通りになる．

Case 1. $\Phi = a_4(yp_x - xp_y)^4 + B_0p_x^2 + B_1p_xp_y + B_2p_y^2 + C_0$ (64)

Case 2. $\Phi = (a_3p_x + b_3p_y)(yp_x - xp_y)^3 + B_0p_x^2 + B_1p_xp_y + B_2p_y^2 + C_0$ (65)

Case 3. $\Phi = (a_2p_x^2 + b_2p_xp_y + c_2p_y^2)(yp_x - xp_y)^2 + B_0p_x^2 + B_1p_xp_y + B_2p_y^2 + C_0$ (66)

Case 4. $\Phi = (a_1p_x^3 + b_1p_x^2p_y + c_1p_xp_y^2 + d_1p_y^3)(yp_x - xp_y) + B_0p_x^2 + B_1p_xp_y + B_2p_y^2 + C_0$ (67)

Case 5. $\Phi = a_0p_x^4 + b_0p_x^3p_y + c_0p_x^2p_y^2 + d_0p_xp_y^3 + e_0p_y^4 + B_0p_x^2 + B_1p_xp_y + B_2p_y^2 + C_0$ (68)

(62) から得られる偏微分方程式は

$$\begin{aligned}
&A_3V_{xxxx} - 2(A_2 - 2A_4)V_{xxxy} + 3(A_1 - A_3)V_{xxyy} - 2(2A_0 - A_2)V_{xyyy} - A_1V_{yyyy}\\
&- (2A_{2y} - 3A_{3x})V_{xxx} + (6A_{1y} - 4A_{2x} - 3A_{3x} + 12A_{4x})V_{xxy}\\
&- (12A_{0y} - 3A_{1x} - 4A_{2y} + 6A_{3x})V_{xyy} - (3A_{1y} - 2A_{2x})V_{yyy}\\
&+ (3A_{1yy} - 4A_{2xy} + 3A_{3xx})(V_{xx} - V_{yy})\\
&- (12A_{0yy} - 6A_{1xy} + 2A_{2xx} - 2A_{2yy} + 6A_{3xy} - 12A_{4xx})V_{xy}\\
&- (4A_{0yyy} - 3A_{1xyy} + 2A_{2xxy} - A_{3xxx})V_x - (A_{1yyy} - 2A_{2xyy} + 3A_{3xxy} - 4A_{4xxx})V_y = 0
\end{aligned} \tag{69}$$

であり，**Case 1** に対しては，

$$\begin{aligned}
a_4\{&x^3yV_{xxxx} - (x^4 - 3x^2y^2)V_{xxxy} - 3(x^3y - xy^3)V_{xxyy} + (y^4 - 3x^2y^2)V_{xyyy} - xy^3V_{yyyy}\\
&+ 15x^2yV_{xxx} - 15(x^3 - 2xy^2)V_{xxy} + 15(y^3 - 2x^2y)V_{xyy} - 15xy^2V_{yyy}\\
&+ 60xyV_{xx} - 60(x^2 - y^2)V_{xy} - 60xyV_{yy} + 60yV_x - 60xV_y\} = 0,
\end{aligned} \tag{70}$$

Case 2 に対しては，

$$\begin{aligned}
&a_3\{x^3V_{xxxx} + 6x^2yV_{xxxy} - 3(x^3 - 3xy^2)V_{xxyy} - 2(3x^2y - 2y^3)V_{xyyy} - 3xy^2V_{yyyy}\\
&\quad + 15x^2V_{xxx} + 60xyV_{xxy} - 15(2x^2 - 3y^2)V_{xyy} - 30xyV_{yyy}\\
&\quad + 60xV_{xx} + 120yV_{xy} - 60xV_{yy} + 60V_x\} +\\
&b_3\{-3x^2yV_{xxxx} + 2(2x^3 - 3xy^2)V_{xxxy} + 3(3x^2y - y^3)V_{xxyy} + 6xy^2V_{xyyy} + y^3V_{yyyy}\\
&\quad - 30xyV_{xxx} + 15(3x^2 - 2y^2)V_{xxy} + 60xyV_{xyy} + 15y^2V_{yyy}\\
&\quad - 60yV_{xx} - 120xV_{xy} + 60yV_{yy} + 60V_y\} = 0,
\end{aligned} \tag{71}$$

Case 3 に対しては，

$$\begin{aligned}
&a_2\{2x^2V_{xxxy} + 6xyV_{xxyy} - 2(x^2 - 2y^2)V_{xyyy} - 2xyV_{yyyy}\\
&\quad + 20xV_{xxy} + 30yV_{xyy} - 10xV_{yyy} + 40V_{xy}\} +\\
&b_2\{-x^2V_{xxxx} - 4xyV_{xxxy} + 3(x^2 - y^2)V_{xxyy} + 4xyV_{xyyy} + y^2V_{yyyy}\\
&\quad - 10xV_{xxx} - 20yV_{xxy} + 20xV_{xyy} + 10yV_{yyy} - 20V_{xx} + 20V_{yy}\} +\\
&c_2\{2xyV_{xxxx} - 2(2x^2 - y^2)V_{xxxy} - 6xyV_{xxyy} - 2y^2V_{xyyy}\\
&\quad + 10yV_{xxx} + 30xV_{xxy} - 20yV_{xyy} - 40V_{xy}\} = 0,
\end{aligned} \tag{72}$$

Case 4 に対しては,

$$
\begin{aligned}
&a_1(3xV_{xxyy} + 4yV_{xyyy} - xV_{yyyy} + 15V_{xyy}) + \\
&b_1(-2xV_{xxxy} - 3yV_{xxyy} + 2xV_{xyyy} + yV_{yyyy} - 10V_{xxy} + 5V_{yyy}) + \\
&c_1(xV_{xxxx} + 2yV_{xxxy} - 3xV_{xxyy} - 2yV_{xyyy} + 5V_{xxx} - 10V_{xyy}) + \\
&d_1(-yV_{xxxx} + 4xV_{xxxy} + 3yV_{xxyy} + 15V_{xxy}) = 0,
\end{aligned} \tag{73}
$$

Case 5 に対しては,

$$
\begin{aligned}
&a_0(4V_{xyyy}) + b_0(-3V_{xxyy} + V_{yyyy}) + c_0(2V_{xxxy} - 2V_{xyyy}) \\
&+ d_0(-V_{xxxx} + 3V_{xxyy}) + e_0(-4V_{xxxy}) = 0
\end{aligned} \tag{74}
$$

となる．また，(63) から得られる偏微分方程式は

$$
B_1(V_{xx} - V_{yy}) + 2(B_2 - B_0)V_{xy} + (B_{1x} - 2B_{0y})V_x + (2B_{2x} - B_{1y})V_y = 0 \tag{75}
$$

である．偏微分方程式 (70)–(74)，および (75) にポテンシャル (21) を代入したものを (x, y) についての恒等式とみる．その恒等式において係数がすべて 0 に等しいとおくことによって得られる連立代数方程式が，$a_4 \neq 0$ (Case 1)，$(a_3, b_3) \neq (0, 0)$ (Case 2)，$(a_2, b_2, c_2) \neq (0, 0, 0)$ (Case 3)，$(a_1, b_1, c_1, d_1) \neq (0, 0, 0, 0)$ (Case 4)，$(a_0, b_0, c_0, d_0, e_0) \neq (0, 0, 0, 0, 0)$ (Case 5) となる解を持つようにポテンシャルの係数 α_j を定める．結果は次の表のようになる．解析の詳細については，本論文 [8] を参照のこと．

Case	ポテンシャル	ハミルトニアンと独立な多項式第一積分
1	$V_k = (x^2 + y^2)^{k/2}$	$\Phi = (yp_x - xp_y)^4$
2	$V_k \equiv 0$	
3	$V_k = (x^2 + y^2)^{k/2}$	$\Phi = (yp_x - xp_y)^2 H$
	$V_k = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{r+x}{2}\right)^{k+1} + (-1)^k\left(\frac{r-x}{2}\right)^{k+1}\right]$	$\Phi = \left(p_y(yp_x - xp_y) + \frac{1}{2}y^2V_{k-1}\right)^2$
4	$V_k = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{r+x}{2}\right)^{k+1} + (-1)^k\left(\frac{r-x}{2}\right)^{k+1}\right]$	$\Phi = \left(p_y(yp_x - xp_y) + \frac{1}{2}y^2V_{k-1}\right)H$
5	$V_k = Ax^k + By^k$	$\Phi = a_0(p_x^2 + 2Ax^k)^2 + e_0(p_y^2 + 2By^k)^2$

上表の第一積分は，運動量について 1 次あるいは 2 次の多項式第一積分に約せるので可約な第一積分である．これが，定理 1 の意味するところである．

4.3 定理 1 の核心へ

ポテンシャルの次数 k が $k \geq 5$ のときは，これでよい．ただし，§3.2 で見たように，ポテンシャルの次数が $k = 3, 4$ の場合には，運動量について 4 次の既約な多項式第一積分を持つ例 (44), (45), (46) が知られているのであった．ここで，これら 3 つの特殊な例は，いずれも上の Case 5 に属していることに注意しよう．これから，特にこの Case 5 に注目して，$k = 3, 4$ の場合と $k \geq 5$ の場合の違いについてもう少し詳しく見ていくことにしよう．

Case 5 の第一積分は

$$\Phi = a_0 p_x^4 + b_0 p_x^3 p_y + c_0 p_x^2 p_y^2 + d_0 p_x p_y^3 + e_0 p_y^4 + B_0 p_x^2 + B_1 p_x p_y + B_2 p_y^2 + C_0 \tag{76}$$

という形をしている．この中に含まれる明らかな第一積分 H^2 を除外するために，$c_0 = 0$ としておく．これは，Φ の代わりに $\Phi - 2c_0 H^2$ を考えることを意味する．このとき，偏微分方程式 (74) は

$$4a_0 V_{xyyy} - b_0(3V_{xxyy} - V_{yyyy}) - d_0(V_{xxxx} - 3V_{xxyy}) - 4e_0 V_{xxxy} = 0 \tag{77}$$

となる．これにポテンシャル (21) を代入すると，(x, y) について $k-4$ 次同次の恒等式になる．係数がすべて 0 に等しいとおくことにより，$k-3$ 個の方程式

$$\begin{aligned}
&4(j-1)j(j+1)(k-j-1)\alpha_{j+1}a_0 \\
&+ j(j-1)\{(j+1)(j+2)\alpha_{j+2} - 3(k-j)(k-j-1)\alpha_j\}b_0 \\
&+ (k-j)(k-j-1)\{3j(j-1)\alpha_j - (k-j+1)(k-j+2)\alpha_{j-2}\}d_0 \\
&- 4(j-1)(k-j-1)(k-j)(k-j+1)\alpha_{j-1}e_0 = 0, \quad (j = 2, 3, \ldots, k-2)
\end{aligned} \tag{78}$$

を得る．これは，α_j に関する漸化式と考えることができる．一方，偏微分方程式 (75) に B_0, B_1, B_2 ((62) を積分して求める) およびポテンシャル (21) を代入すると，(x, y) について $2k-2$ 次同次の恒等式になる．係数がすべて 0 に等しいとおくことにより，$2k-1$ 個の方程式が得られる．そのうち，$x^{2k-2}, x^{2k-3}y, x^{2k-4}y^2, x^{2k-5}y^3$ の係数から得られる 4 つの方程式は

$$\begin{cases}
M_{11}b_0 = 0 \\
M_{21}b_0 + M_{22}a_0 = 0 \\
M_{31}b_0 + M_{32}a_0 + M_{33}d_0 = 0 \\
M_{41}b_0 + M_{42}a_0 + M_{43}d_0 + M_{44}e_0 = 0
\end{cases} \tag{79}$$

という形をしている．ただし，$k = 3$ のとき，

$$\begin{aligned}
&M_{11} = \frac{1}{3}(3\alpha_0 - \alpha_2)(45\alpha_0 - 2\alpha_2), \quad M_{21} = -30\alpha_3(3\alpha_0 - \alpha_2), \quad M_{22} = -\frac{112}{3}\alpha_2(3\alpha_0 - \alpha_2), \\
&M_{31} = -9\alpha_0\alpha_2 - 7\alpha_2^2 + 45\alpha_3^2, \quad M_{32} = 60\alpha_2\alpha_3, \quad M_{33} = -9(\alpha_0 - 2\alpha_2)(5\alpha_0 - \alpha_2), \\
&M_{41} = -30\alpha_2\alpha_3, \quad M_{42} = -40\alpha_2^2, \quad M_{43} = 30\alpha_3(3\alpha_0 - 2\alpha_2), \quad M_{44} = -\frac{8}{3}\alpha_2(3\alpha_0 - 16\alpha_2).
\end{aligned}$$

$k = 4$ のとき，

$$\begin{aligned}
&M_{11} = \frac{1}{3}(6\alpha_0 - \alpha_2)(42\alpha_0 - \alpha_2), \quad M_{21} = -11\alpha_3(6\alpha_0 - \alpha_2), \quad M_{22} = -\frac{80}{3}\alpha_2(6\alpha_0 - \alpha_2), \\
&M_{31} = \frac{1}{6}(540\alpha_0\alpha_2 - 16\alpha_2^2 + 99\alpha_3^2 - 1512\alpha_0\alpha_4 + 228\alpha_2\alpha_4), \quad M_{32} = -80\alpha_3(3\alpha_0 - \alpha_2), \\
&M_{33} = 80\alpha_0\alpha_2, \quad M_{41} = -2\alpha_3(6\alpha_0 + 37\alpha_2 - 48\alpha_4), \quad M_{42} = -\frac{8}{3}(32\alpha_2^2 - 27\alpha_3^2 - 24\alpha_2\alpha_4), \\
&M_{43} = 24\alpha_3(7\alpha_0 - \alpha_2), \quad M_{44} = -\frac{64}{3}\alpha_2(3\alpha_0 - 4\alpha_2).
\end{aligned}$$

$k \geq 5$ のとき，

$$M_{11} = \frac{\{k(k-1)\alpha_0 - 2\alpha_2\}\{3k(2k-1)\alpha_0 - 2\alpha_2\}}{k(k-1)},$$
$$M_{21} = \frac{-6(7k-6)\alpha_0\alpha_3}{k-2} + \frac{12(7k-6)\alpha_2\alpha_3}{k(k-1)(k-2)}, \quad M_{22} = -\frac{16(3k-2)\{k(k-1)\alpha_0 - 2\alpha_2\}\alpha_2}{k(k-1)},$$
$$M_{31} = 6(k-1)(2k-3)\alpha_0\alpha_2 - \frac{2(17k^2-28k+6)\alpha_2^2}{k(k-1)} + \frac{18(7k-6)\alpha_3^2}{k(k-1)(k-2)}$$
$$- \frac{12(7k^2-22k+18)\alpha_0\alpha_4}{(k-2)(k-3)} + \frac{48(2k^2-4k+3)\alpha_2\alpha_4}{k(k-1)(k-2)(k-3)},$$
$$M_{32} = \frac{-12(2k-3)(3k-4)\alpha_0\alpha_3}{k-2} + \frac{24(2k-3)(5k-4)\alpha_2\alpha_3}{k(k-1)(k-2)}, \quad M_{33} = 4k(2k-3)\alpha_0\alpha_2,$$
$$M_{41} = 6(k-2)(2k-3)\alpha_0\alpha_3 - \frac{4(29k^2-44k+6)\alpha_2\alpha_3}{k(k-1)} + \frac{48(7k-12)\alpha_3\alpha_4}{k(k-2)(k-3)}$$
$$- \frac{20(7k^2-31k+36)\alpha_0\alpha_5}{(k-3)(k-4)} + \frac{40(5k^2-11k+12)\alpha_2\alpha_5}{k(k-1)(k-3)(k-4)},$$
$$M_{42} = \frac{-16(k-2)(3k-4)\alpha_2^2}{k-1} + \frac{144\alpha_3^2}{k-2} - \frac{96(k-2)^2\alpha_0\alpha_4}{k-3} + \frac{384(k-2)\alpha_2\alpha_4}{k(k-3)},$$
$$M_{43} = 12k(k-2)\alpha_0\alpha_3, \quad M_{44} = 32(k-2)\alpha_2^2$$

である．$(a_0, b_0, d_0, e_0) \neq (0,0,0,0)$ であるから，$M_{11}M_{22}M_{33}M_{44} = 0$ でなければならない．この条件から，α_0 と α_2 の間の関係が定まる．すなわち，$k=3$ のときは，

$$\alpha_2 = 0, \quad \alpha_2 = 3\alpha_0, \quad \alpha_2 = \frac{45}{2}\alpha_0, \quad \alpha_2 = \frac{3}{16}\alpha_0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_0, \quad \alpha_2 = 5\alpha_0 \tag{80}$$

$k=4$ のときは，

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_2 = 6\alpha_0, \quad \alpha_2 = 42\alpha_0, \quad \alpha_2 = \frac{3}{4}\alpha_0 \tag{81}$$

$k \geq 5$ のときは，

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{k(k-1)}{2}\alpha_0, \quad \alpha_2 = \frac{3k(2k-1)}{2}\alpha_0 \tag{82}$$

である．$\alpha_0 = 0$ のとき，ポテンシャルは $V_k = y^k$，$\alpha_2 = 0$ のとき，ポテンシャルは $V_k = x^k + \alpha_k y^k$ となる．これらは，直交座標で変数分離可能な場合，つまり

$$V_k = Ax^k + By^k \tag{83}$$

にまとめることができる．$\alpha_2 = k(k-1)\alpha_0/2$ のとき，ポテンシャルは適当な座標回転により直交座標で変数分離可能な場合に帰着する．例えば，$k = 3, 4$ のときは，それぞれ

$$V_3 = x^3 + 3xy^2 + \alpha_3 y^3, \quad V_4 = x^4 + 6x^2y^2 + \alpha_3 xy^3 + \frac{16+\alpha_3^2}{16}y^4 \tag{84}$$

を得るが，これらは

$$x \to x\sin\varphi - y\cos\varphi, \quad y \to x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad \tan 2\varphi = -\frac{2}{\alpha_3}, -\frac{8}{\alpha_3} \tag{85}$$

で与えられる座標回転によって，直交座標で変数分離可能な場合になる．一般の k の場合に考える座標回転は

$$x \to x\sin\varphi - y\cos\varphi, \quad y \to x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad \tan 2\varphi = -\frac{k(k-1)(k-2)}{3\alpha_3} \tag{86}$$

である．$\alpha_2 = 3k(2k-1)\alpha_0/2$ のとき，もし $\alpha_0 = 0$ ならば，上の場合に帰着し，$V_k = y^k$ を得る．よって，$\alpha_0 \neq 0$ の場合を考える．$\alpha_0 = 1$ と固定すると，(79) の第 2, 3, 4 式から順に

$$a_0 = -\frac{M_{21}}{M_{22}}b_0, \tag{87}$$

$$d_0 = -\frac{1}{M_{33}}\left(M_{31} - M_{32}\frac{M_{21}}{M_{22}}\right)b_0, \tag{88}$$

$$e_0 = -\frac{1}{M_{44}}\left\{M_{41} - M_{42}\frac{M_{21}}{M_{22}} - M_{43}\frac{1}{M_{33}}\left(M_{31} - M_{32}\frac{M_{21}}{M_{22}}\right)\right\}b_0. \tag{89}$$

もし $b_0 = 0$ ならば，$(a_0, b_0, d_0, e_0) = (0, 0, 0, 0)$ となってしまうので，$b_0 = 1$ とする．こうして得られた a_0, b_0, d_0, e_0 を代入した漸化式 (78) を用いて，$\alpha_4, \alpha_5, \ldots, \alpha_k$ を k の有理式を係数とする α_3 の多項式で表すことができる．このとき，偏微分方程式 (75) から得られた恒等式の係数は k の有理式を係数とする α_3 の多項式で表されている．$x^{2k-2}, x^{2k-3}y, x^{2k-4}y^2, x^{2k-5}y^3$ の係数は既に用いた．残る $x^{2k-6}y^4, x^{2k-7}y^5, \ldots, y^{2k-2}$ の係数が 0 に等しいという条件から，$2k-5$ 個の代数方程式が得られることになる．これらは k の有理式を係数とする α_3 についての代数方程式で，次数は順に $4, 5, \ldots, 2k-2$ である．もし $2k-5$ 個の代数方程式のすべてを満たす α_3 の値が存在すれば，係数 $\alpha_4, \alpha_5, \ldots, \alpha_k$ が求まり，ポテンシャルを決定することができる．$k = 3$ のときは，代数方程式は 1 個であるから問題はないが，$k \geq 4$ では，共通解の存在が問題になる．まずは，最も次数の低い 2 個の代数方程式に注目しよう．それらは，

$$\begin{aligned}
&-\frac{9(k-2)k^2(k+2)(2k-1)(5k-2)G_1(k)}{4(k-1)S(k)^2} \\
&+\frac{3(k+2)(5k-2)(7k-6)G_2(k)\alpha_3^2}{4(k-2)(k-1)(2k-1)(3k-2)R(k)S(k)^2} \\
&+\frac{2(k+2)(5k-2)(7k-6)G_3(k)\alpha_3^4}{(k-2)^3(k-1)k^2(2k-1)^3(3k-2)^3R(k)S(k)^2} = 0
\end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{9(k-3)k(k+2)(5k-2)G_4(k)\alpha_3}{20(k-1)(3k-2)R(k)S(k)^2} \\
&+\frac{3(k-3)(k+2)(5k-2)(7k-6)G_5(k)\alpha_3^3}{20(k-2)^2(k-1)k(2k-1)^2(3k-2)^2R(k)S(k)^2} \\
&+\frac{(k-3)(k+2)(5k-2)(7k-6)G_6(k)\alpha_3^5}{5(k-2)^4(k-1)k^3(2k-1)^4(3k-2)^4R(k)S(k)^2} = 0
\end{aligned} \tag{91}$$

で与えられる．ただし，

$$
\begin{aligned}
R(k) &= 74 - 151k + 95k^2, \quad S(k) = -124 + 456k - 519k^2 + 241k^3, \\
G_1(k) &= 29952 - 260400k + 932160k^2 - 1727456k^3 + 1706012k^4 - 810861k^5 \\
&\quad + 118529k^6 + 16870k^7, \\
G_2(k) &= -3170144 + 37193808k - 190561760k^2 + 553816792k^3 - 998755638k^4 \\
&\quad + 1151765545k^5 - 843129587k^6 + 371783811k^7 - 86588015k^8 + 7446900k^9, \\
G_3(k) &= -1361952 + 20130192k - 133944304k^2 + 527295832k^3 - 1360307178k^4 \\
&\quad + 2408313485k^5 - 2978361002k^6 + 2565200757k^7 - 1500811081k^8 \\
&\quad + 563283562k^9 - 120201105k^{10} + 10736550k^{11}, \\
G_4(k) &= -54723072 + 687806528k - 3817158400k^2 + 12223132176k^3 - 24787677856k^4 \\
&\quad + 32872864764k^5 - 28351948208k^6 + 15180036291k^7 - 4446138980k^8 \\
&\quad + 454376975k^9 + 40055750k^{10}, \\
G_5(k) &= 68988096 - 912699392k + 5346987920k^2 - 18143124368k^3 + 39260441572k^4 \\
&\quad - 56288554120k^5 + 53780522743k^6 - 33457433369k^7 + 12720106145k^8 \\
&\quad - 2562547775k^9 + 186064500k^{10}, \\
G_6(k) &= 56393856 - 913712256k + 6725558432k^2 - 29645084416k^3 + 86929567784k^4 \\
&\quad - 178232080840k^5 + 261364852406k^6 - 275416174516k^7 + 206176050353k^8 \\
&\quad - 106294583086k^9 + 35472298955k^{10} - 6761687100k^{11} + 538285500k^{12}
\end{aligned}
$$

である．$k=3$ のときは，(91) の左辺が 0 になっているので代数方程式は 1 個しか出てこないことが確認できる．

2 つの代数方程式に共通解が存在するかどうかを判定する手段として，終結式と呼ばれる量を計算する方法がある．一般に，2 つの多項式

$$
f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m \tag{92}
$$

に対して，次の $m+n$ 次の行列式を $f(x), g(x)$ の**終結式**という．

$$
R(f,g) = \begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & & \\
 & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
 & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\
b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
 & & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m
\end{vmatrix} \tag{93}
$$

この終結式について，次の定理が成り立つ．証明は Appendix B を参照のこと．

定理（終結式による共通根存在判定）

$a_0b_0 \neq 0$ のとき，2 つの方程式 $f(x)=0$ と $g(x)=0$ が少なくとも 1 つの共通解を持つための必要十分条件は，$R(f,g)=0$ となることである．

代数方程式 (90), (91) に対する終結式を計算すると

$$
\begin{aligned}
&-\frac{289340}{4096}(k-3)^4(k-4)^2\\
&\times\frac{(k+2)^9(2k-3)^4(3k-4)^4(3k-1)^4(5k-6)^2(5k-2)^{29}(7k-6)^4}{k^2(k-1)^9(k-2)^{11}(2k-1)^{11}(3k-2)^{16}R(k)^6S(k)^{10}}\\
&\times(29952-260400k+932160k^2-1727456k^3\\
&\quad+1706012k^4-810861k^5+118529k^6+16870k^7)\\
&\times(-2787216+23021920k-82567904k^2+167598204k^3-211881739k^4\\
&\quad+173025983k^5-91304549k^6+30037885k^7-5594600k^8+450000k^9)^2
\end{aligned}
\tag{94}
$$

となる．これが0になるのは，$k=3,4$ のときのみである．つまり，共通解が存在するのは $k=3,4$ のときだけである．したがって，$k\geq 5$ に対して，代数方程式 (90), (91) は共通解を持たない．つまり，$2k-5$ 個の代数方程式を同時に満足する α_3 の値は存在しない．

$k=3$ のときに得られる代数方程式は，(90) に $k=3$ を代入したもので，

$$\frac{21749715}{2464}+\frac{3646305}{146608}\alpha_3^2+\frac{585}{36652}\alpha_3^4=0 \tag{95}$$

で与えられる．代数方程式 (95) の解は，

$$\alpha_3=\pm\frac{17\sqrt{14}\,i}{2},\quad \pm\frac{27\sqrt{3}\,i}{2} \tag{96}$$

と求まる．それぞれ，ポテンシャル

$$V_3=x^3+\frac{45}{2}xy^2\pm\frac{17\sqrt{14}\,i}{2}y^3,\quad V_3=x^3+\frac{45}{2}xy^2\mp\frac{27\sqrt{3}\,i}{2}y^3 \tag{97}$$

を導く．これらは，適当な座標回転によって，それぞれ (44), (45) になる．

$k=4$ の場合に得られる 3 個の代数方程式は，

$$63360+\frac{99}{14}\alpha_3^2-\frac{99}{768320}\alpha_3^4=0 \tag{98}$$

$$\frac{125136}{49}\alpha_3+\frac{369963}{960400}\alpha_3^3+\frac{57123}{7529536000}\alpha_3^5=0 \tag{99}$$

$$-\frac{2851200}{49}+\frac{19107}{24010}\alpha_3^2+\frac{111771}{94119200}\alpha_3^4+\frac{5247}{295157811200}\alpha_3^6=0 \tag{100}$$

で与えられる．最初の 2 個は，(90), (91) に $k=4$ を代入したものである．これら 3 個の代数方程式は共通解

$$\alpha_3=\pm 28\sqrt{10}\,i \tag{101}$$

を持ち，ポテンシャル

$$V_4=x^4+42x^2y^2\pm 28\sqrt{10}\,ixy^3-48y^4 \tag{102}$$

を導く．これは適当な座標回転によって，(46) になる．

最後に，$k=3$ における (80) と $k=4$ における (81) で残った場合について簡単に述べておく．まず，$k=3$ の場合において，$\alpha_2=3\alpha_0/16$ のときは (44) を，$\alpha_2=\alpha_0/2$ のときは (45) を得る．$\alpha_2=5\alpha_0$ のときは

$$V_3=x^3+5xy^2\pm\frac{22\sqrt{3}\,i}{9}y^3 \tag{103}$$

を得る．これは，座標回転により (45) になる．$k=4$ の場合において，$\alpha_2 = 3\alpha_0/4$ のときは，(46) を得る．また，$\alpha_2 = 6\alpha_0$ のとき，(84) に加えて，

$$V_4 = x^4 + 6x^2y^2 + 8y^4 \tag{104}$$

を得る．これは座標回転により，(46) になる．

5 可積分系リスト

以上のことより，運動量について高々4次の多項式第一積分を持つ2次元同次多項式ポテンシャル系のリストを得る．

定理 2（**Nakagawa and Yoshida [8]**）

運動量について高々4次の多項式第一積分を持つ2次元同次多項式ポテンシャル系は，次の通りである．

- 運動量について1次の既約な多項式第一積分を持つ系は，

$$V_k = (x^2+y^2)^{k/2}, \quad V_k = x^k$$

- 運動量について2次の既約な多項式第一積分を持つ系は，

$$V_k = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{r+x}{2}\right)^{k+1} + (-1)^k\left(\frac{r-x}{2}\right)^{k+1}\right], \quad V_k = Ax^k + By^k$$

- 運動量について3次の既約な多項式第一積分を持つ系は，存在しない．
- 運動量について4次の既約な多項式第一積分を持つ系は，

$$V_3 = x^3 + \frac{3}{16}xy^2, \quad V_3 = x^3 + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{\sqrt{3}i}{18}y^3, \quad V_4 = x^4 + \frac{3}{4}x^2y^2 + \frac{1}{8}y^4$$

今後の課題として，このリストの続きを作ることが考えられる．つまり，運動量について5次以上の多項式第一積分を求めることであるが，現在のところ，運動量について5次以上の既約な多項式第一積分を持つ2次元同次多項式ポテンシャル系は知られていない．もちろん，本研究で用いた方法を適用することは可能であるが，解析が煩雑になり過ぎ，あまり現実的ではないと思われる．

A 連立代数方程式の処理

A.1 運動量について1次の多項式第一積分

Case 1 第一積分は

$$\Phi = a_1(yp_x - xp_y), \quad a_1 \neq 0. \tag{105}$$

$a_1=1$ としてもよい．偏微分方程式 (31) にポテンシャル (21) を代入すると，係数 α_j についての漸化式

$$\alpha_1=\alpha_{k-1}=0, \quad \alpha_{j+1}=\frac{k-j+1}{j+1}\alpha_{j-1}, \quad (j=1,2,\ldots,k-1) \tag{106}$$

を得る．漸化式 (106) より，k が奇数のときは $\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_k=0$，つまりポテンシャルは恒等的に 0 となることが分かる．また，k が偶数のときは $\alpha_{2m+1}=0$，および

$$\begin{aligned}\alpha_{2m} &= \frac{k-2m+2}{2m}\alpha_{2m-2}=\frac{k/2-m+1}{m}\alpha_{2m-2}=\frac{\binom{k/2}{m}}{\binom{k/2}{m-1}}\alpha_{2m-2} \\ &= \frac{\binom{k/2}{m}}{\binom{k/2}{m-1}}\cdot\frac{\binom{k/2}{m-1}}{\binom{k/2}{m-2}}\alpha_{2m-4}=\cdots=\binom{k/2}{m}\alpha_0 \end{aligned}\tag{107}$$

と求められる．$\alpha_0=1$ とおいて，

$$V_k=\sum_{m=0}^{k}\binom{k/2}{m}x^{k-2m}y^{2m}=(x^2+y^2)^{k/2} \tag{108}$$

を得る．これは極座標 (r,θ) で変数分離可能である．ここで，

$$r=(x^2+y^2)^{1/2}, \quad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{109}$$

である．また，第一積分は，$\Phi=yp_x-xp_y$ である．

Case 2　第一積分は

$$\Phi=a_0p_x+b_0p_y, \quad (a_0,b_0)\neq(0,0). \tag{110}$$

偏微分方程式 (32) にポテンシャル (21) を代入すると，係数 α_j についての漸化式

$$(k-j)\alpha_j a_0+(j+1)\alpha_{j+1}b_0=0, \quad (j=0,1,\ldots,k-1) \tag{111}$$

を得る．これは，$j=0,1$ のとき，

$$k\alpha_0a_0=0, \quad 2\alpha_2b_0=0. \tag{112}$$

$(a_0,b_0)\neq(0,0)$ だから，$\alpha_0=0$ または $\alpha_2=0$ でなければならない．

$\alpha_0=0$ のとき，α_0 から α_j まで 0 になったとしよう $(j\geq 1)$．すると，漸化式 (111) から

$$(j+1)\alpha_{j+1}b_0=0, \quad (k-j-1)\alpha_{j+1}a_0+(j+2)\alpha_{j+2}b_0=0 \tag{113}$$

と書ける．$(a_0,b_0)\neq(0,0)$ であるためには，$\alpha_{j+1}=0$ でなければならないことが分かる．ただし，$j\leq k-2$ という条件がつく．つまり，$\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_{k-1}=0$ である．$\alpha_k=1$ とおいて，ポテンシャル $V_k=y^k$ を得る．第一積分は，$\Phi=p_x$ である．

$\alpha_2=0$ のとき，$\alpha_0=0$ なら上と同じなので，$\alpha_0=1$ とする．このとき，$a_0=0$ となり，$b_0\neq 0$ でなければならない．漸化式は

$$(j+1)\alpha_{j+1}=0 \quad (j=1,2,\ldots,k-1) \tag{114}$$

となる．よって，$\alpha_2=\alpha_3=\cdots=\alpha_k=0$，つまり $V_k=x^k$ となる．第一積分は，$\Phi=p_y$ である．

A.2 運動量について 2 次の多項式第一積分

Case 1. 第一積分は

$$\Phi = a_2(yp_x - xp_y)^2 + B_0(x,y), \quad a_2 \neq 0. \tag{115}$$

$a_2 = 1$ としてもよい．偏微分方程式 (40) を

$$(x\partial_x + y\partial_y + 2)(yV_x - xV_y) = 0 \Rightarrow (k+2)(yV_x - xV_y) = 0 \Rightarrow yV_x - xV_y = 0 \tag{116}$$

のように変形する．ここで，同次式に関する Euler の定理を用いた．

定理（Euler）

関数 $f(x,y)$ が k 次の同次式，つまり $f(cx,cy) = c^k f(x,y)$ を満たすとき，$x\partial_x f + y\partial_y f = kf$ が成り立つ．

ポテンシャルは，極座標で変数分離可能な $V_k = (x^2+y^2)^{k/2}$ となる．また，第一積分は $\Phi = (yp_x - xp_y)^2$ となるが，これは運動量について 1 次の第一積分 $\Phi = yp_x - xp_y$ に約せるので，可約な第一積分である．

Case 2. 第一積分は

$$\Phi = (a_1p_x + b_1p_y)(yp_x - xp_y) + B_0(x,y), \quad (a_1,b_1) \neq (0,0). \tag{117}$$

偏微分方程式 (41) にポテンシャル (21) を代入して漸化式

$$\begin{aligned}&\{(k-j+1)(k+j+1)\alpha_{j-1} - j(j+1)\alpha_{j+1}\}a_1\\&+\{j(2k-j+2)\alpha_j - (k-j+1)(k-j+2)\alpha_{j-2}\}b_1 = 0, \quad (j=1,2,\ldots,k)\end{aligned} \tag{118}$$

を得る．$j = 1,2$ を代入すると，

$$\{k(k+2)\alpha_0 - 2\alpha_2\}a_1 = 0, \quad -6\alpha_3a_1 + \{4k\alpha_2 - k(k-1)\alpha_0\}b_1 = 0 \tag{119}$$

$(a_1,b_1) \neq (0,0)$ だから，連立方程式 (119) の係数行列の行列式の値が 0，つまり

$$\alpha_2 = \frac{k-1}{4}\alpha_0, \quad \text{または} \quad \alpha_2 = \frac{k(k+2)}{2}\alpha_0 \tag{120}$$

でなければならない．

$\alpha_2 = (k-1)\alpha_0/4$ のとき，$\alpha_0 = 0$ と仮定すると，$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ となる．このとき，$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ となることが次のようにして分かる．いま，$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_j = 0$ になったと仮定する．ただし，$j \geq 2$ である．このとき，漸化式 (118) で j に $j, j+1$ を代入すると

$$\begin{cases} -j(j+1)\alpha_{j+1}a_1 = 0 & (j \leq k)\\ -(j+1)(j+2)\alpha_{j+2}a_1 + (j+1)(2k-j+1)\alpha_{j+1}b_1 = 0 & (j \leq k-1)\end{cases} \tag{121}$$

$(a_1,b_1) \neq (0,0)$ だから，$\alpha_{j+1} = 0$ でなければならない．これより，帰納的に $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ となる．つまり，ポテンシャルが恒等的に 0 になってしまう．よって，$\alpha_0 \neq 0$ とする．すると，(119) の第 1 式から $a_1 = 0$ となる．$(a_1,b_1) \neq (0,0)$ だから，$b_1 \neq 0$ でなければならない．$b_1 = 1$ とすると，漸化式 (118) は

$$\alpha_j = \frac{(k-j+1)(k-j+2)}{j(2k-j+2)}\alpha_{j-2}, \quad (j=2,3,\ldots,k) \tag{122}$$

となる．$\alpha_1=0$ に注意すると，$\alpha_{2m+1}=0$ となることが分かる．また，

$$\begin{aligned}\alpha_{2m} &= \frac{(k-2m+1)(k-2m+2)}{2m(2k-2m+2)}\alpha_{2m-2} = \frac{\binom{k-m}{m}}{2\binom{k-m+1}{m-1}}\alpha_{2m-2} \\ &= \frac{\binom{k-m}{m}}{2\binom{k-m+1}{m-1}} \cdot \frac{\binom{k-m+1}{m-1}}{2\binom{k-m+2}{m-2}}\alpha_{2m-4} = \cdots = 2^{-2m}\binom{k-m}{m}\alpha_0\end{aligned}$$

と求められる．$\alpha_0=1$ とおいて，

$$V_k = \sum_{m=0}^{[k/2]} 2^{-2m}\binom{k-m}{m} x^{k-2m}y^{2m} = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{r+x}{2}\right)^{k+1} + (-1)^k\left(\frac{r-x}{2}\right)^{k+1}\right] \tag{123}$$

を得る．これは放物線座標 (ξ,η) で変数分離可能である．ここで，

$$\xi = \frac{r+x}{2}, \quad \eta = \frac{r-x}{2} \tag{124}$$

である．また，第一積分は

$$\Phi = p_y(yp_x - xp_y) + \frac{1}{2}y^2V_{k-1} \tag{125}$$

である．

$\alpha_2 = k(k+2)\alpha_0/2$ のとき，$\alpha_0=0$ ならば上で見たようにポテンシャルが恒等的に 0 になってしまうので $\alpha_0 \neq 0$ の場合を考える．$\alpha_0=1$ とおくと，(119) の第 2 式から

$$b_1 = \frac{6\alpha_3}{k(k+1)(2k+1)}a_1. \tag{126}$$

したがって，第一積分は

$$\Phi = a_1\left(p_x + \frac{6\alpha_3}{k(k+1)(2k+1)}p_y\right)(yp_x - xp_y) + B_0(x,y) \tag{127}$$

となる．ここで，

$$a_1 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{\sqrt{k^2(k+1)^2(2k+1)^2 + 36\alpha_3^2}} \tag{128}$$

とおいて，座標回転

$$x \to x\cos\varphi - y\sin\varphi, \quad y \to x\sin\varphi + y\cos\varphi; \quad \tan\varphi = -\frac{k(k+1)(2k+1)}{6\alpha_3} \tag{129}$$

を行なうと，第一積分は

$$\Phi = p_y(yp_x - xp_y) + B_0(x,y) \tag{130}$$

という形になる．これは $a_1=0,\, b_1=1$ であることを示している．したがって，再び漸化式 (122) を得，ポテンシャルは放物線座標で変数分離可能となる．

Case 3.　第一積分は

$$\Phi = a_0p_x^2 + b_0p_xp_y + c_0p_y^2 + B_0(x,y), \quad (a_0,b_0,c_0) \neq (0,0,0). \tag{131}$$

第一積分として Φ の代わりに $\Phi - 2c_0H$ を考える．これにより最初から $c_0 = 0$ となり，ハミルトニアン自身を除外できる．このとき，偏微分方程式 (42) は

$$2a_0V_{xy} + b_0(V_{xx} - V_{yy}) = 0 \tag{132}$$

となる．ポテンシャル (21) を代入して漸化式

$$2j(k-j)\alpha_j a_0 + \{j(j+1)\alpha_{j+1} - (k-j)(k-j+1)\alpha_{j-1}\}b_0 = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, k-1) \tag{133}$$

を得る．$j = 1, 2$ のとき，

$$\{2\alpha_2 - k(k-1)\alpha_0\}b_0 = 0, \quad 4(k-2)\alpha_2 a_0 + 6\alpha_3 b_0 = 0 \tag{134}$$

$(a_0, b_0) \neq (0, 0)$ だから，

$$\alpha_2 = 0 \quad \text{または} \quad \alpha_2 = \frac{k(k-1)}{2}\alpha_o \tag{135}$$

でなけらばならない．

$\alpha_2 = 0$ のとき，(134) の第 1 式から

$$-k(k-1)\alpha_0 b_0 = 0. \tag{136}$$

ここで，$b_0 \neq 0$ であると仮定すると，$\alpha_0 = 0$ となる．つまり，$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ である．このとき，漸化式 (133) から $\alpha_3 = \alpha_4 = \cdots = \alpha_k = 0$，つまり，ポテンシャルが恒等的に 0 になることが分かる．よって，$b_0 = 0$ とする．すると $(a_0, b_0) \neq (0, 0)$ だから，$a_0 \neq 0$ でなければならない．$a_0 = 1$ とおくと，漸化式 (133) は

$$2j(k-j)\alpha_j = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, k-1) \tag{137}$$

となる．これより，$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$ となり，ポテンシャルは

$$V_k = \alpha_0 x^k + \alpha_k y^k. \tag{138}$$

これは直交座標 (x, y) で変数分離可能である．また，第一積分は

$$\Phi = p_x^2 + 2\alpha_0 x^k, \quad \text{あるいは} \quad \Phi = p_y^2 + 2\alpha_k y^k \tag{139}$$

である．

$\alpha_2 = k(k-1)\alpha_0/2$ のとき，$\alpha_0 = 0$ とすると，$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$．このとき，$b_0 \neq 0$ ならば，上で見たようにポテンシャルは恒等的に 0 になってしまう．よって，$b_0 = 0$ とする．このとき，漸化式 (133) から $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$ となることが分かるので，ポテンシャルは，$V_k = y^k$ である．ここで，$\alpha_k = 1$ とおいた．また，第一積分は $\Phi = p_x^2$ となるが，これは運動量について 1 次の第一積分 $\Phi = p_x$ の自乗だから，可約な第一積分である．次に，$\alpha_0 \neq 0$ とする．$\alpha_0 = 1$ とおくと (134) の第 2 式より，

$$a_0 = \frac{3\alpha_3}{k(k-1)(k-2)}b_0. \tag{140}$$

よって，第一積分は

$$\Phi = b_0\left\{-\frac{3\alpha_3}{k(k-1)(k-2)}p_x^2 + p_xp_y\right\} + B_0(x, y) \tag{141}$$

となる．ここで，

$$x \to x\cos\varphi - y\sin\varphi, \quad y \to x\sin\varphi + y\cos\varphi, \quad \tan 2\varphi = -\frac{k(k-1)(k-2)}{3\alpha_3} \tag{142}$$

で与えられる座標回転を行なうと，第一積分は

$$\Phi = a_0 p_x^2 + c_0 p_y^2 + B_0(x,y) \tag{143}$$

という形になる．これは，$b_0 = 0$ であることを示している．ここで，再び $\Phi - 2c_0 H$ を考えることにより，$c_0 = 0$ とする．これにより，再び漸化式 (137) を得，ポテンシャルは直交座標で変数分離可能となる． ∎

B　終結式による共通根存在判定の定理の証明

必要性の証明　2 つの代数方程式 $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ に共通解 $x = \alpha$ があったとすると

$$\begin{cases} \alpha^{m-1}f(\alpha) & = a_0\alpha^{m+n-1} + a_1\alpha^{m+n-2} + \cdots + a_n\alpha^{m-1} = 0 \\ \alpha^{m-2}f(\alpha) & = a_0\alpha^{m+n-2} + a_1\alpha^{m+n-3} + \cdots + a_n\alpha^{m-2} = 0 \\ & \vdots \\ f(\alpha) & = a_0\alpha^{n} + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \\ \alpha^{n-1}g(\alpha) & = b_0\alpha^{m+n-1} + b_1\alpha^{m+n-2} + \cdots + b_m\alpha^{n-1} = 0 \\ \alpha^{n-2}g(\alpha) & = b_0\alpha^{m+n-2} + b_1\alpha^{m+n-3} + \cdots + b_m\alpha^{n-2} = 0 \\ & \vdots \\ g(\alpha) & = b_0\alpha^{m} + b_1\alpha^{m-1} + \cdots + b_m = 0 \end{cases} \tag{144}$$

が成り立つ．ここで，終結式の第 $1, 2, \ldots, m+n-1$ 列に，それぞれ $\alpha^{m+n-1}, \alpha^{m+n-2}, \ldots, \alpha$ を掛けて，第 $m+n$ 列に加えると，上の連立方程式より第 $m+n$ 列の要素はすべて 0 になる．したがって，終結式 $R(f,g)$ の値は 0 である．

十分性の証明　終結式 $R(f,g)$ の値が 0 になったとすると，終結式を構成する $m+n$ 個の行ベクトルは一次従属である．第 $1, 2, \ldots, m+n$ 行ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ とおくと

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{j=1}^{n} d_j \boldsymbol{b}_j = 0, \quad (c_1, \ldots, d_n) \neq (0, \ldots, 0) \tag{145}$$

という関係が成り立つ．このベクトル式の第 $1, 2, \ldots, m+n$ 成分にそれぞれ $x^{m+n-1}, x^{m+n-2}, \ldots, 1$ を掛けて辺々加えると

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x^{m-i} f(x) + \sum_{j=1}^{n} d_j x^{n-j} g(x) = 0 \tag{146}$$

を得る．ここで，$\sum_{i=1}^{m} c_i x^{m-i} = h(x)$, $\sum_{j=1}^{n} d_j x^{n-j} = k(x)$ とおくと

$$h(x)f(x) = -k(x)g(x) \tag{147}$$

となる．多項式 $f(x)$ の次数を $\deg f(x)$ と表すことにすると，

$$\deg k(x) \leq n-1 < n = \deg f(x). \tag{148}$$

ここで，$f(x)$ と $g(x)$ が共通因子を持たないと仮定すると，$k(x)$ がより次数の高い $f(x)$ で割り切れることになり矛盾を生ずる．したがって，$f(x)$ と $g(x)$ は共通因子を持つ．つまり，$f(x)=0$ と $g(x)=0$ は共通解を持つ． ∎

参考文献

[1] B. Grammaticos, B. Dorizzi, and R. Padjen, Painlevé property and integrals of motion for the Hénon-Heiles system, *Physics Letters* **89A** (1982) 111–113.

[2] J. Hietarinta, A search for integrable two-dimensional Hamiltonian systems with polynomial potential, *Physics Letters* **96A** (1983) 273–278.

[3] J. Hietarinta, Direct methods for the search of the second invariant, *Physics Reports* **147** (1987) 87–154.

[4] L. S. Hall, A theory of exact and approximate configurational invariants *Physica* **8D** (1983) 90–116.

[5] I. Marshall and S. Wojciechowski, When is a Hamiltonian system separable? *J. Math. Phys.* **29** (1988) 1338–1346.

[6] J. J. Morales-Ruiz and J. P. Ramis, A note on the non-integrability of some Hamiltonian systems with a homogeneous potential *Preprint* (1997).

[7] J. J. Morales-Ruiz and J. P. Ramis, Galoisian obstruction to integrability of Hamiltonian systems, *Preprint* (1998).

[8] K. Nakagawa and H. Yoshida, A list of all integrable 2D homogeneous polynomial potentials with a polynomial integral of order at most 4 in the momenta, *Preprint*

[9] A. Ramani, B. Dorizzi, and B. Grammaticos, Painlevé conjecture revisited, *Physics Review Letters* **49** (1982) 1539–1541.

[10] A. Ramani, B. Grammaticos, and T. Bountis, The Painlevé property and singularity analysis of integrable and non-integrable systems, *Physics Reports* **180** (1989) 159–245.

[11] H. Yoshida, A new necessary condition for the integrability of Hamiltonian systems with a two dimensional homogeneous potential, *Physica* **D128** (1999) 53–69.