

## エノン写像の exact WKB 量子化に向けて

首藤 啓

東京都立大学 大学院理学研究科  
shudo@phys.metro-u.ac.jp

池田 研介

立命館大学 理工学部  
ahoo@mp0tw009.bkc.ritsumei.ac.jp

### 1. カオスの量子化

Gutzwiller の跡公式は, 双曲条件を満たす “理想カオス系” の半古典量子化条件である [1]. 導出の方法は全く異なるものの, 量子スペクトルが周期軌道に対する和をもって表される点で, Selberg の跡公式との類似性がよく指摘される [1]. 後者は, 定負曲率面上での閉測地流とその上の Laplace-Beltrami 演算子の固有値との間に成り立つ関係式であり, 数学的に疑義のない対象である. Gutzwiller の跡公式は, Selberg の跡公式にその構造がよく似ており, さらに, ここ 10 年あまりの数々の数値実験を通してその有効性が検証されたことから, 物理学者の間ではその成立根拠を疑うことはあまりなくなってきたようにも見えるが, その数理的基盤は Selberg の跡公式のそれと比較して曖昧な点が多い.

Selberg の跡公式と Gutzwiller の跡公式の大きな違いは, 後者が  $\hbar \rightarrow 0$  でのみ成り立つ漸近公式になっている点である. Selberg の跡公式を含めて, カオス系の跡公式は, 周期軌道との絶対収束性と発散級数の再和という, 共通の難題をかかえるが, Gutzwiller の跡公式には,  $\hbar$  に対する漸近展開という, いまひとつの級数発散の問題がある. これまで取りあえずのところ, 両者は切り話した形で議論が進んできたが, 定常位相近似 (あるいは, 鞍点近似) もまた系がカオスであることによりその適用範囲に限られることを考えると, 本来, 2つの問題は独立ではないはずである.

また, 形式的には, Gutzwiller 跡公式は, 系が双曲的であればいつでも適用可能, という建て前であるが, “十分良い性質をもった双曲系” かそうでないか, によってその中味はかなり違う. 例えば, 3進の完全な記号力学系の存在する 3 ディスク散乱ビリヤード系では [3, 4, 2], 力学系の不変集合は 3 進記号力学系と共役な実の周期軌道だけであるが, 散乱体を近づけることで 3 進記号力学系の構造が崩れはじめると (それでも系は双曲的であり続ける), それに応じた周期軌道が消滅する (pruning がおこる) [5, 6]. 定常位相近似を採用する Gutzwiller 跡公式の立場では, そのような境界の変形につれて消えていく周期軌道 (3 進記号列に対して, 周期軌道がビリヤード台上に存在しない) は, まったく姿を現さないことになっているが, 定常位相近似の幽霊解 (ghost orbit) として存在し続ける.

同様の事情は, Lozi 写像と呼ばれる 2 次元区分線形写像でもみられる. Lozi 写像でもすべ

ての軌道が2進記号列と共役な領域から、パラメータを動かすことにより記号列の pruning が起こり、対応する軌道が実面から消える [7]. Lozi 写像の軌道は、軌道を表す無限次元のベクトルに作用するある縮小写像の固定点として捉えることができるが [7], 周期軌道が実面から消えたときにも、その縮小写像の固定点は引き続き存在し続ける [7]. 幽霊解同様、それらを‘実軌道を拡張した仮想軌道 (virtual orbit)’ とみなすことは極めて自然である. 幽霊解や仮想軌道は、拡張した力学系の中での不変構造であるから、それらが量子化の中でどのように役割をもっているか? という疑問は、“十分良い性質をもった双曲系”にはない重要な問題として浮かび上がってくる.

我々は、カオス系の半古典論の中にどのようにすれば  $\hbar$  に対する漸近展開の要素を取り込むことができ、それらを含めてカオス系の半古典量子化条件をいかに閉じた形にすることができるか? という問題をエノン写像を用いて議論を進めている [8, 9]. 現時点ではまだその試みは途上にあり完成にはほど遠い状況にあるが、これまでカオス系の半古典量子化が調べられてきたいくつかの理想モデルと比較してエノン写像のもっている利点は少なくなく、今後も解析を進める意義があると考えている. 特に、エノン写像では、カオスを発生の機構が単純であることはもちろんのこと、解析の前面に出てくる写像の母関数 (or 作用) が多項式関数で与えられることが様々な解析を容易にする. また、上記ビリヤード系、Lozi 写像で現れる ghost orbit や virtual orbit は、エノン写像上の複素軌道という、より自然な拡張をもつ.

## 2. 量子エノン写像のストークス現象

保測エノン写像  $\mathcal{H}$  は多項式自己同型写像:

$$\mathcal{H} : \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ y_n^2 - x_n + (1-c) \end{pmatrix} \quad (1)$$

で与えられる. エノン写像は多項式自己同型写像のうち、自明でないものの標準形であり [10, 11], 変換  $(p, q) = (y - x, y - 1)$  を経て2次元離散写像:

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n - V'(q_n) \\ q_n + p_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

に移される. ここで、 $V(q) = -\frac{q^3}{3} + cq$  である. 写像 (2) は周期激力のかかった1次元振動子

$$H = H_0(p) + V(q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n) \quad (3)$$

の時間発展方程式であり、 $V(q)$  はそのポテンシャルを与える.

この系の量子力学は、状態ベクトルの時間推進演算子(プロパゲータ)を経路積分表示したものの、すなわち、

$$\langle q_n | U^n | q_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \cdots dq_{n-1} \exp[\eta S(q_0, q_1, \dots, q_n)], \quad (\eta = \frac{i}{\hbar}), \quad (4)$$

を考えることで与えられる。(時間が離散的であることを反映して、通常の経路積分における経路に対する汎関数積分は多重積分になる。ここでは、プロパゲータを  $q$ -表示で表した。) ここで作用関数  $S(q_0, q_1, \dots, q_n)$  は、

$$S(q_0, q_1, \dots, q_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} (q_{j+1} - q_j)^2 - \sum_{j=1}^{n-1} V(q_j) \quad (5)$$

である。

エノン写像の跡公式を導くには、作用  $S(q_0, q_1, \dots, q_n)$  を、

$$S(q_0, q_1, \dots, q_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \frac{1}{2} (q_{j+1} - q_j)^2 - V(q_j) \right] \quad (6)$$

と定義し直し積分  $I(q_0, q_n)$  に対し、その跡:

$$\text{tr}(I) = \int I(q_0, q_0) dq_0 \quad (7)$$

をつくることによって実行される。(4)のプロパゲータを考える立場(時間領域の立場と呼ぶ)と(7)から系の固有状態を問題にする(エネルギー領域の立場)ことは当然のことながら互いに相補的である。ここでは、主に時間領域の問題を考え、最後にエネルギー領域の問題に対してコメントする。

時間領域プロパゲータの半古典論とは、(4)の多重積分を鞍点法をもって評価することである。鞍点条件は、作用の変分をゼロにする条件  $\delta S = 0$ 、つまり、

$$\frac{\partial}{\partial q_i} S(q_0, \dots, q_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (8)$$

であり、得られる鞍点は、初期位置  $q_0$  と終位置  $q_n$  が与えられたもとで写像(2)を満足する古典軌道に他ならない。写像系の Gutzwiller 跡公式の導出では、積分(4)の評価を定常位相近似をもって行い、出てくる鞍点は古典周期軌道である。定常位相近似の原理のもとでは、定常位相条件  $\delta S = 0$  を満足する解が複数存在する場合でも、解同士が十分離れている限りは、すべての実数定常解は無条件で足し込まれる。このような定常位相の原理を背景に、Gutzwiller 跡公式にはすべての実周期軌道が現れるわけである。

ところが、多重積分(4)を鞍点法により評価するものとする、形式的な条件式としては全く同じ  $\delta S = 0$  であるが、そこから得られるすべての複素解をその寄与として含めること

は許されない。これは、鞍点法に付随するストークス現象のためであり、もし、多重積分 (4) を鞍点法をもって評価する、という立場を取ることになると、実軌道も含めて、改めてどの鞍点が積分に寄与しどれが寄与しない鞍点か？ということを考え直す必要が出てくる。このようなことから、跡公式を含むカオス系の半古典論を複素領域で再構成するには、(高次元) ストークス現象にいかに対処するか？という点が最大の論点になってくる。

### 3. 高次元におけるストークス現象

WKB 解析をはじめ、漸近展開の手法は物理の中でも古くから頻繁に使われてきた汎用手法であるが、いわゆる exact WKB 解析が確立されるまでは、複素領域の漸近解析に付随して現れる‘ストークス現象’は発見的にしか取り扱うことができなかった [12]。シュレディンガー方程式など、物理に多く登場する 2 階の微分方程式に対しては発見的手法の範囲内でもなんとか処理することができるが、ここで問題にするような多重積分の鞍点法、もしくは、高階の微分方程式など高次元のストークス現象 (積分の鞍点法という点では高次元のストークス現象が問題になるのは多重積分に限らない) を問題にするに至っては、“そもそもストークス現象とは何ぞや?” という点を明確にしておかなくては先に進みようがない。

高階の微分方程式のストークス現象を従来の WKB 解析の枠内で議論し、2 階以下の微分方程式の場合との決定的な違いを指摘したのは Berk-Nevis-Roberts である [13]。その後、彼らの議論に対する exact WKB 解析からの基礎付けが青木-河合-竹井らによって与えられつつある [14, 15, 16]。特に、Berk-Nevis-Roberts らが高階の微分方程式のストークス現象に対処する際に必要性を強調した、新しいストークス曲線 (*New Stokes curve*) は、Borel-Laplace 変換を基にした exact WKB 解析の中では、新しい転回点 (*New turning points*) から延びる従来のストークス曲線の一般化として定義される。

[14] の議論の要点は以下の通りである。まず、exact WKB 法では、適当な large parameter  $\eta$  で展開された発散級数 — 例えば、 $\psi(x)$  — にボレル総和法を適用し、発散級数を収束させることで  $\psi(x)$  に解析的意味付けを与えることが出発点となる。その際、 $\psi(x)$  のボレル変換  $\tilde{\psi}(x, y)$  ( $y$  は  $\eta$  をボレル変換したことによって出てきた変数) を定義する積分路上に特異点が現れるか否かがボレル和の確定に大きな役割を果たす。例えば、変数  $x$  を複素面に解析接続するときボレル変換を定義する積分路が特異点を通過することがある。その際に積分路の取り替えに伴ってボレル和の中に新しい項が付け加わるが、この特異点通過の際に現れる解の接続がストークス現象として理解される。このことからわかるように、ボレル和された WKB 解のストークス現象を記述するものは、ボレル変換  $\tilde{\psi}(x, y)$  の特異点の情報とその伝搬の様子である [17]。

ここで、微分方程式の解の特異性の伝搬の一般論として、“ボレル変換  $\tilde{\psi}(x, y)$  の特異性は、考える微分作用素  $H$  のボレル変換  $\tilde{H}$  の陪特性曲線によって伝搬する” という事実があるこ

とから [18], ボレル変換  $\hat{H}$  の陪特性微分方程式の振る舞いがストークス現象を決定するために重要な役割を果たすことになる.  $H$  をシュレディンガー作用素とすると, 陪特性曲線を定める陪特性微分方程式は, Hamilton-Jacobi 方程式であることは言うまでもない.

さらに, ボレル変換の特異性の伝搬を担う陪特性曲線は, より一般的に以下の Hamilton 系:

$$\dot{x} = \frac{\partial \sigma(\hat{H})}{\partial \xi}, \quad \dot{y} = \frac{\partial \sigma(\hat{H})}{\partial \eta}, \quad \dot{\xi} = -\frac{\partial \sigma(\hat{H})}{\partial x}, \quad \dot{\eta} = -\frac{\partial \sigma(\hat{H})}{\partial y} \quad (9)$$

$$\sigma(\hat{H}) = 0 \quad (10)$$

の  $(x, y)$  面への射影として理解される. ここで,  $\sigma(\hat{H})$  は, principal symbol(偏微分作用素  $\hat{H}$  の主要部のボレル変換)である. exact WKB 解析における転回点 (turning point) は, 陪特性曲線  $y(x)$  (Hamilton-Jacobi 方程式の解) の特異点であり, 従来の WKB 解析で現れる通常の意味での転回点は, 上記の陪特性方程式  $\sigma(\hat{H}) = 0$  を  $\xi(t)$  に対する方程式とみなしたときの重根として特徴付けられる. さらに, ボレル変換の特異性の伝搬の議論を一般化することで,  $(x, y)$  面への射影上での陪特性曲線の自己交差点, すなわち,

$$x(t) = x(s) \quad \text{かつ} \quad y(t) = y(s) \quad \text{ただし, } t \neq s \quad (11)$$

を満たすものとして新しい転回点 (new turning point) を導入することが自然となる [14]. Berk-Nevins-Roberts が発見的な議論をもとに導入した新しいストークス線は, Berk-Nevins-Roberts が主張したようにストークス線の交差点から突如として現れるのではなく, 新しい転回点から伸びる, 従来のストークス曲線と定義を同じくするストークス曲線であり, 通常の意味での転回点から伸びる従来のストークス曲線と併せて “ストークス幾何” を構成すべき, というのが [14] の主張である.

#### 4. プロパゲータの満たす微分方程式

以上の高階微分方程式に対するストークス幾何の構成法を, 我々のエノン写像のプロパゲータ  $\langle q_n | U^n | q_0 \rangle$  である  $n$  重積分に適用することを考える. いま, 初期条件  $q_0$  をパラメータとし,  $n$  ステップのプロパゲータ  $\langle q_n | U^n | q_0 \rangle$  を  $q_n$  の関数と考えることにし,  $I(q_n) = \langle q_n | U^n | q_0 \rangle$  と書くことにすると,  $I(q_n)$  の満たす微分方程式 ( $2^n$  階微分方程式) は以下の手順で得ることができる.

まず,  $e^{\eta S}$  に対して:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} e^{\eta S} = \eta \left[ (q_{i+1} - q_i) - (q_i - q_{i-1}) + q_i^2 - c \right] e^{\eta S} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_n} e^{\eta S} = \eta (q_n - q_{n-1}) e^{\eta S} \quad (13)$$

であるが, (12) の左辺は, 各  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) に関する積分が消えるので, これらを逐次解くことにより,  $(q_1, q_2)$  を  $(q_{n-1}, q_n)$  の関数として,

$$q_1 = q_1(q_{n-1}, q_n) \quad (14)$$

$$q_2 = q_2(q_{n-1}, q_n) \quad (15)$$

と表すことができる. これは, エノン写像 (2) を終状態のペア  $(q_{n-1}, q_n)$  を与えたもとで始状態  $(q_0, q_1)$  を逆に解く作業に他ならない. ここで, (13) より,  $q_{n-1} = q_n - \eta^{-1} \partial / \partial q_n$  であるので, これを (14), (15) に代入し, それを用いて (12) の  $i = 1$  の場合に対する右辺の  $q_1, q_2$  を  $q_n$  に対する微分演算子を求めることができる. これが, いま欲しい積分  $I(q_n)$  の満たす微分演算子である.

具体的に例えば,  $n = 2$  の場合 (この場合は単なる 1 重積分,  $c = -1$  とした),

$$\left[ \frac{d^2}{dq_2^2} - 2\eta(q_2 + 1) \frac{d}{dq_2} + \eta^2(q_2^2 + q_2 - q_0 + 1 + \eta^{-1}) \right] I(q_2) = 0. \quad (16)$$

$n = 3$  では,

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{d^4}{dq_3^4} - \eta \{ (4q_3 + 4) \frac{d^3}{dq_3^3} - 6 \frac{d^2}{dq_3^2} \} + \eta^2 \{ (6q_3^2 + 10q_3 + 8) \frac{d^2}{dq_3^2} + 12q_3 \frac{d}{dq_3} + 3 \} \right. \\ & - \eta^3 \{ (4q_3^3 + 8q_3^2 + 12q_3 + 7) \frac{d}{dq_3} + 6q_3^2 + 10q_3 + 8 \} \\ & \left. + \eta^4 (q_3^4 + 2q_3^3 + 5q_3^2 + 3q_3 + 4 + q_0) \right] I(q_3) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

となる.

また,  $H$  のボレル変換  $\hat{H}$  の principal symbol  $\sigma(\hat{H})$  も  $n = 2$  では,

$$\sigma(\hat{H}) = \xi^2 - 2(q_2 + 1)\xi\eta + (q_2^2 + q_2 - q_0 + 1)\eta^2 \quad (18)$$

また,  $n = 3$  では,

$$\begin{aligned} \sigma(\hat{H}) &= \xi^4 + (4q_3 + 4)\xi^3\eta + 6q_3^2 + 10q_3 + 8)\xi^2\eta^2 \\ &- (4q_3^3 + 8q_3^2 + 12q_3 + 7)\xi\eta^3 + (q_3^4 + 2q_3^3 + 5q_3^2 + 3q_3 + 4 + q_0)\eta^4 \end{aligned} \quad (19)$$

というように具体形を求めることもできるが, 上記, 一般の  $I(q_n)$  が満たす微分方程式を求める手順をみると, 微分作用素を求める作業は実はエノン写像を逐次解くことによって行われることがわかるので, 一般の  $n$  に対する principal symbol は,

$$\sigma(\hat{H}) = \eta^{2^{n-1}} \frac{\partial}{\partial q_1} S(q_0, q_1, \dots, q_n) \Big|_{q_1=q_1(q_{n-1}, q_n)} \Big|_{q_{n-1}=q_n - \xi\eta^{-1}} \quad (20)$$

と、写像の作用関数  $S(q_0, q_1, \dots, q_n)$  を用いて表すことができる。

## 5. 量子エノン写像における新しい転回点・新しいストークス線

以上的一般のステップ  $n$  に対する principal symbol の表式を用いると、今の場合、多重積分  $I(q_n)$  が満たす微分方程式のボレル変換の陪特性微分方程式を解く作業も、同様に、エノン写像の初期値問題を解くことに相当していることがわかる。実際、

$$\frac{\partial \sigma(\hat{H})}{\partial \xi} = -\eta^{2^{n-1}-1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{\partial S}{\partial q_{n-1}} \right) = \frac{d}{dq_1} \left( -\eta^{2^{n-1}-1} q_n(q_0, q_1) \right) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma(\hat{H})}{\partial \eta} &= 2^{n-1} \eta^{2^{n-1}-1} \frac{\partial S}{\partial q_1} + \eta^{2^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial S}{\partial q_{n-1}} \right) \\ &= \eta^{2^{n-1}} \frac{\partial}{\partial q_{n-1}} \left( \frac{\partial S}{\partial q_1} \right) \frac{\partial q_{n-1}}{\partial \eta} \\ &= \left( \eta^{2^{n-1}} \frac{\partial q_{n-1}}{\partial \eta} \right) \frac{\partial}{\partial q_1} q_n(q_0, q_1) \\ &= \eta^{2^{n-1}-1} (q_n - q_{n-1}) \frac{\partial}{\partial q_1} q_n(q_0, q_1) \\ &= \eta^{2^{n-1}-1} \frac{\partial S}{\partial q_n} \frac{\partial}{\partial q_1} q_n(q_0, q_1) \\ &= \eta^{2^{n-1}-1} \left( \frac{\partial S}{\partial q_n} \frac{\partial}{\partial q_1} q_n(q_0, q_1) + \frac{\partial S}{\partial q_1} \right) \\ &= \frac{d}{dq_1} \left( \eta^{2^{n-1}-1} S \right) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma(\hat{H})}{\partial q_n} &= \eta^{2^{n-1}-1} \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\partial S}{\partial q_n} \\ &= \frac{d}{dq_1} \left( \eta^{2^{n-1}-1} (q_n(q_0, q_1) - q_{n-1}(q_0, q_1)) \right) \end{aligned} \quad (23)$$

となって、ボレル変換  $\hat{H}$  の陪特性微分方程式の時間変数  $t$  に相当するものをもともとの写像の初期条件  $q_1$  (もう一方の初期条件  $q_0$  はいま固定している) と読み替えることができ、解  $(x(t), y(t), \xi(t), \eta(t))$  を求めることは、 $q_1$  の関数として終状態  $q_n(q_0, q_1)$ 、あるいは、作用関数  $S(q_0, q_1)$  を求める、つまり、写像の解を求めることになっていることがわかる。

この事実から、多重積分  $I(q_n)$  のストークス幾何を決定するための転回点とストークス曲線は、3. で紹介した [14] の高階微分方程式のストークス幾何の構成法に対応させることができ、転回点、ストークス曲線はそれぞれ以下のように定義される：

- 転回点:  $q_n$  面上で,

$$\mathcal{S}(q_0, q_1^{(i)}, \dots, q_{n-1}^{(i)}, q_n^T) = \mathcal{S}(q_0, q_1^{(j)}, \dots, q_{n-1}^{(j)}, q_n^T) \quad (24)$$

を満たす点  $q_n^T$  を転回点といい, 従来の転回点と新しい展開点とは,

$$\begin{aligned} (q_1^{(i)}, \dots, q_{n-1}^{(i)}) = (q_1^{(j)}, \dots, q_{n-1}^{(j)}) &\implies q_n^T \text{ は通常の展開点} \\ (q_1^{(i)}, \dots, q_{n-1}^{(i)}) \neq (q_1^{(j)}, \dots, q_{n-1}^{(j)}) &\implies q_n^T \text{ は新しい展開点} \end{aligned}$$

によって区別される. ここで,  $(q_1^{(i)}, \dots, q_{n-1}^{(i)})$  は,  $q_0$  と  $q_n$  を与えたときの離散写像 (4) の解である. また,

- ストークス曲線:  $q_n$  面上, 転回点  $q_n^T$  から伸びる

$$\text{Im } \mathcal{S}(q_0, q_1^{(i)}, \dots, q_{n-1}^{(i)}, q_n^T) = \text{Im } \mathcal{S}(q_0, q_1^{(j)}, \dots, q_{n-1}^{(j)}, q_n^T) \quad (25)$$

を満たす曲線がストークス線になる. 通常の意味での転回点から伸びるストークス線は従来のストークス線であり, 新しい転回点から伸びるストークス線が新しいストークス線に対応する.

この事実を使うと初期条件  $q_1$  を動かしながら作用関数  $\mathcal{S}(q_0, q_1, \dots, q_n(q_0, q_1))$  の軌跡を追跡することで陪特性微分方程式の解曲線を容易に描くこともできる [8].

以上の定義から, 通常の転回点は, Lagrangian manifold  $q_0 = \text{const}$  が時間発展した際の転回点, すなわち, 火点 (caustics) という力学系の対応物になっていることもわかる. 火点は実面のみならず複素領域にも存在する. 実際, エノン写像  $\mathcal{H}$  のパラメータが  $|c| \ll 1$  にあるときには, 多くの火点が虚面に存在し, 大域的なストークス幾何を考えるにあたって複素面全体の情報が必要になってくる. ところが興味深いことに,  $\mathcal{H}$  が  $c \gg 1$  で実馬蹄条件を満足し通常の転回点がすべて実軸  $q_n = 0$  上に存在する場合であっても, 新しい転回点のあるものは複素面に存在し, ストークス幾何学を正しく扱うためには実面のみならず虚面の情報が必要になってくる [8].

[14](さらにその後, [15, 16]), 3階微分作用素の局所理論と共に, 大域的な取り扱いに対する議論, 特に, 3階の微分作用素のストークス幾何にはじめて発生するストークス曲線の交差問題の議論がなされている. 我々の問題では, 微分方程式が出発点ではなく,  $I(q_n)$  という形で積分の具体形が最初から存在し, かつ, 被積分関数が特異性をもたないため, 新しい転回点の冗長性の問題 [14, 15] がなく, 問題の取り扱いが易しくなっている. 上記の定義に基づいて描かれたストークスグラフは, 従来のストークス線が  $3(2^n - 1)$  本, 新しいストークス線が  $2^n(2^n - 1)$  本と, ステップ数  $n$  に対して指数関数的に増大し, 加えて, エノン写像の非線形性

をコントロールするパラメータが  $|c| \sim 1$  にあるとき, 多くの転回点が複素領域にあることからそのストークスグラフは非常に複雑な様相を呈する. しかし, 1) 通常の転回点, 新しい転回点周辺の接続ルール (通常の転回点の周りでは単純転回点の周りの接続公式を適用し, 新しい転回点の近傍では接続を起こさない, とする), と 2) ストークス曲線の交差点のまわりでの解の一価性条件, という単純なアルゴリズムを用いることですべてのストークス幾何を一意的に決定することができる. グラフ上で決定されたストークス幾何が正しい接続を与えていることは多次元最急降下面の接続前後での切り替え, 超漸近展開を用いたボレル変換のリーマン面の代数的決定などを用いて確かめることができる. 詳細は, [8] を参照されたい.

## 6. カオスの量子化に向けての問題点

これまで当たった具体例に留まらず, 時間領域プロパゲータのストークス幾何は, ストークスグラフと接続の有無を決める以上の手順を用いることで常に一意的に決定されることに例外がなさそうな感触を我々はもってるが, さらに進んで, この事実が証明されれば, 少なくとも, ステップ数  $n$  を有限に固定し, 考える積分を決めたときの鞍点の寄与・非寄与問題 (例えば, 複素半古典論を用いてトンネル効果を記述する, という問題に複素半古典論をもって対処するときには [9], どの軌道が寄与しどの軌道がストークス現象によって寄与しないか? を判別することはトンネル現象の物理的な解釈をつくっていく上で決定的に重要である) は, 以上の定義とストークス幾何決定のアルゴリズムを機械的に実行すれば良いことになる.

しかし, 有限ステップでのストークス幾何はそれで良いとしても, 冒頭に問題提起した,  $n \rightarrow \infty$  の極限は, ここでのアプローチを素朴に拡張するだけでは明らかに限界があるように思われる. エノン写像の位相的性質が最も単純に記述される実馬蹄領域を思い浮かべるとそのことは直ちに納得される. 実馬蹄エノン写像では, 通常の意味での転回点は, Lagrangian manifold の折れ曲がり点であるから,  $\text{Re } q_n$  軸上に時間と共に指数関数的に増加し, それらは,  $n \rightarrow \infty$  では実軸上にコントロール集合的に並ぶ. また, それらは有限ステップの場合と違い, 各転回点は孤立点とならない. ここでの解析は, まずストークスグラフありき, で話しが始まるので, ストークスグラフをどう描くべきかが定まらない状況では, 鞍点の寄与・非寄与問題も議論のしようがない. カオス系の特性 (指数関数的に転回点が増大し,  $n \rightarrow \infty$  で稠密に分布する) を考えると, exact WKB 解析を経由してカオスの量子化の問題を考えるにはこの問題は避けて通ることができない.

ところで, 以上の方法は, 時間領域プロパゲータのみならず, エネルギー領域の跡公式に対しても適用可能にみえる. エネルギー領域の立場では, 多重積分 (4) の鞍点条件  $\delta S = 0$  から出てくる鞍点解は古典写像 (1) の周期軌道である. 跡公式を考えることはカオス系の量子化のひとつの標準的なアプローチであり, ここで考察した時間領域のアプローチと相補的

な関係にある。跡公式に至る積分 (7) も、形式的には時間領域のプロパゲータ (4) と似ていることから、同様の解析を行うことが可能であるように思われる。

しかしながら、ストークス幾何を問題にする変数、つまり、積分をどの変数の関数と考えるか？という点で、エネルギー領域の積分 (7) には、時間領域の場合の終状態の座標  $q_n$  のような自然な変数が最初から準備されているわけではないことから、直ちに時間領域と解析と並行して話が進む、というわけにはいかない。例えば、積分の鞍点 (= 周期軌道) をエノン写像の非線形性を制御するパラメータ  $c$  の関数とみなすことにより、複素  $c$ -面でストークス幾何を考えることがひとつの可能性として考えられる。しかし、積分の鞍点 (= 周期軌道) を  $c$  の関数として陽に表すことは一般の  $n$  に対しては不可能であり (それができればエノン写像の周期軌道が簡単に求まってしまう!)、 $I(c)$  の満たす高階微分方程式を時間領域プロパゲータで実行したのと同じように iterative に決めることはできない (時間領域の場合には、陪特性微分方程式の時間に対応するものが初期条件  $q_1$  であったが、エネルギー領域ではそれに対応するものがない)。もちろん、エネルギー領域の積分で、積分を何の関数とみるか？という点が解決されても、 $n \rightarrow \infty$  必然的に現れる上述の問題 ( $n \rightarrow \infty$  で、ストークスグラフをどうやって定義するか?) がその後にはひかえているのは時間領域の事情とまったく同じである。検討されるべき課題はまだ多い。

最後に、exact WKB 法、および、高階の微分方程式に関するストークス現象に関してご教示頂いている青木貴史、河合隆裕、竹井義次の各氏に謝意を表したい。

## 参考文献

- [1] M.C. Gutzwiller: *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer, New York, 1990).
- [2] A. Wirzba: Phys. Rep. **309**(1999) 1.
- [3] P. Gaspard and S.A. Rice: J. Chem. Phys. **93**(1989) 6947; P. Gaspard: *Chaos, Scattering and Statistical Mechancis* (Cambridge Univ. Press, 1998).
- [4] T. Morita: Amer. Math. Soc. **325**(1991) 819.
- [5] K.T. Hansen: Nonlinearity, **6**(1993) 771.
- [6] M.M. Sano: J. Phys. A **27**(1994) 4791.
- [7] Y. Ishii: Nonlinearity, **10**(1997)731.

- [8] 首藤 啓, 池田 研介: 数理解析研究所講究録: **1133**(2000) 54; **1167**(2000) 55; A. Shudo and K.S. Ikeda, in preparation.
- [9] A. Shudo, Y. Ishii and K.S. Ikeda, in preparation; 首藤 啓, 石井 豊, 池田 研介: 『力学系と数理物理の諸問題』報告 (2000) 139.
- [10] M. Hénon: Comm. Math. Phys. **50**(1976) 69.
- [11] S. Friedland and J. Milnor, Ergod. Theor. Dyn. Sys. **9**(1989)67.
- [12] J. Heading, *An Introduction to Phase-Integral Methods*, (Methuen, London, 1962).
- [13] H.L. Berk, W.M. Nevins and K.V. Roberts, J. Math. Phys., **23**(1982) 988.
- [14] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: in *Méthodes résurgentes, Analyse algébrique des perturbations singulières*, L. Boutet de Monvel ed.(1994)69.
- [15] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: Asian J. Math. **2**(1998)625; in *Toward the exact WKB analysis of differential equations, linear and non-linear*, J. Howls, T. Kawai and Y. Takei ed (2000)11.
- [16] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: in *Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear and Non-Linear*, C.J. Howls, T. Kawai and Y. Takai eds, (Kyoto Univ. Press, 2000)p.11.
- [17] 河合隆裕, 竹井義次: 『特異摂動の代数解析』岩波書店, 1998).
- [18] M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara: Lect. Notes in Math. **287**(1973) 265.