数理解析研究所講究録
1180 巻 2000 年 15-26

磁場における力学系の周期軌道と量子エネルギー分布

徳島大学総合科学部　桑原 類史 (KUWABARA, Ruishi) †

はじめに

古典力学系における軌道の性質と，対応する量子力学系 (Schrödinger 方程式) のエネルギー分布との関係は，種々の視点から議論されてきている．

その出発点は，**Bohr-Sommerfeld の量子化則**である．すなわち，軌道が周期的である 1 自由度の古典力学系において，断熱不変量についての条件：

$$J\ (\equiv \oint_{\gamma} \sum pdq) = Nh \quad (N \in \mathbb{Z},\ h: \text{Planck 定数})$$

をみたす軌道 γ におけるエネルギーが量子系でのエネルギーを与えるというものである．Bohr-Sommerfeld の量子化則は，その後，Einstein, Keller 等によって，相空間内の不変トーラスが存在する場合に定式化されたが，実際にそれが適用できるのは力学系が完全積分可能なときである．

一方，Schrödinger の波動力学によれば，古典 Hamilton 関数からある規則で，自己共役微分作用素が対応し，その固有値として量子エネルギー分布が得られる．ところで，Bohr-Sommerfeld の量子化則から得られるエネルギー準位と Schrödinger 固有値方程式を解いて得られる準位とは，完全には一致しない．これらの 2 つのエネルギー準位の関係を，Fourier 積分作用素などの理論に基づいて数学的に明らかにする一連の研究 (1970 年代以降) として，[13], [5], [18], [4] などがある．これらの研究で扱われている力学系は，主として多様体上の自由粒子の運動，すなわち測地流の系であるが，磁場がある系については [11] で考察された．それによれば，相空間内のエネルギー一定 ($= E$) な不変コンパクト Lagrange 多様体で，(拡張された) Bohr-Sommerfeld 量子化条件を満たすものがあるとき，E は対応する Schrödinger 作用素の固有値の近似値を $O(\hbar^2)$ の誤差で与える．

古典力学系が完全積分可能でない場合 (これが一般的な場合である)，古典系の軌道に関する情報と量子系のエネルギー分布について，その対応関係としてどんなことを考えれば

†E-mail address: kuwabara@ias.tokushima-u.ac.jp

よいか．ひとつの試みがGutzwillerによって，1960年代後半からの一連の論文でなされた．そこでは，Feynmanの経路積分法によって，Schrödinger作用素のプロパゲータを古典軌道に係わる量で近似表現することによって，量子エネルギーと古典周期軌道の情報を関係付ける跡公式を導いた（cf. [9],[14]）．すなわち，

$$\mathrm{Tr}G(E) := \sum_n \frac{1}{E - E_n} \quad (E \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}E > 0)$$

（$\{E_n\}$はSchrödinger作用素の固有値）を古典力学系の全ての周期軌道の特性量で表現する公式（Gutzwillerのtrace formula）を与えた．ただし，彼の仕事は非常に興味深いが，問題の設定，議論の展開において，数学的には厳密さに欠けていると言わざるを得ない．

（擬）微分作用素のスペクトルと周期軌道の関係を数学的に厳密に議論した仕事はSelberg [16]によるコンパクト負定曲率曲面上のLaplace作用素に対するtrace formulaに始まる．その後，Colin de Verdierè [3], Chazarain [2], Duistermaat-Guillemin [6]達によって，一般のコンパクトRiemann多様体に対して，Laplace作用素のスペクトルと閉測地線の長さの関係を与える公式が（適当な条件の下で）与えられた．例えば，$\{\lambda_j(\geq 0)\}_{j=0}^{\infty}$をLaplace作用素のスペクトルとすると，$\mathbb{R}$上の超関数$\sigma(t) := \sum_j \exp(it\sqrt{\lambda_j})$の特異台（singular support）が$T(>0)$を含めば，Riemann多様体上に長さ$T$の閉測地線が存在する（Chazarain [2]）．

一方，不変トーラスに対するBS量子化則を完全積分可能でない場合に如何に拡張すべきかという問題について，Voros [17]は，１つの古典周期軌道があったとき，それに対応する量子エネルギー分布を導出する一つの規則を提案した．そして，Guillemin [7], Guillemin-Weinstein [8]は，拡張されたFourier積分作用素の理論に基づいて，Vorosの対応規則がSchrödinger作用素（Laplace作用素）の固有値の近似値を与えることを明らかにした．すなわち，

定理．(M,g)を向き付け可能なRiemann多様体とする．γを(M,g)上の長さLの閉測地線とする．γは非退化，楕円型で，γに沿うポアンカレ写像の固有値が$\{e^{\pm i\theta_j};\ 1 \leq j \leq n-1\}$ $(n = \dim M)$とする．また，γのモース指数をκとする．このとき，任意の非負整数の組$(m_1, m_2, \ldots, m_{n-1})$に対して，Laplace作用素の固有値の列$\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$が存在し，

$$\sqrt{\lambda_k} = \frac{1}{L}\left\{2\pi k + \Big(m_1 + \frac{1}{2}\Big)\theta_1 + \cdots + \Big(m_{n-1} + \frac{1}{2}\Big)\theta_{n-1} + \frac{\pi\kappa}{2}\right\} + O(k^{-1/2}).$$

(Ralston [15]も，近似固有関数をより具体的に構成する方法によって，Mが向き付け可能という仮定なしに，同じ結果を導いている.)

本稿では，(M,g)上に磁場が与えられたとき，磁場のもとでの力学系に対して，上記定理に対応するものがどのように定式化されるかを考察する．

1．磁場における力学系

コンパクトRiemann多様体(M,g)上に磁場Θ（M上の閉実２次形式）が与えられたとき，その中における（単位電荷をもつ）荷電粒子の運動をあらわす力学系（**magnetic flow**

の系）を考える．これは，シンプレクティック構造が

$$\Omega := \Omega_M + \pi_M^* \Theta$$

$(\pi_M : T^*M \to M)$ で与えられる Hamilton 系 (T^*M, Ω, H) として定式化される．ただし，Ω_M は T^*M の標準的なシンプレクティック形式であり，H は計量 g から自然に定まる Hamilton 関数：

$$H(x, \xi) = \sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}(x)\xi_j \xi_k$$

である．一方，対応する量子系（Schrödinger 作用素）を考えるためには，磁場 Θ に条件

$$(*) \qquad [\Theta/2\pi] \in H^2(M, \mathbb{Z}) \ (\subset H^2(M, \mathbb{R}))$$

を課す．このとき，Chern-Weil の理論により，Chern 類が $[\Theta/2\pi]$ となる M 上の複素直線束 $\pi_E : E \to M$ が一意的に存在し，更に，E 上には, 曲率が $-i\Theta$ $(i := \sqrt{-1})$ であるような接続 $\widetilde{\nabla}$ および $\widetilde{\nabla}$-不変な Hermite 構造が入る．さて，計量 g と接続 $\widetilde{\nabla}$ から，E 上に非負，自己共役，楕円型２階微分作用素（Bochner-Laplacian と呼ばれる）$\hat{H}$ が自然に定義される．局所的に，$\Theta = d(\sum_j A_j dx^j)$ とすれば，

$$\hat{H} = -\sum_{j,k} g^{jk}(\nabla_j - iA_j)(\nabla_k - iA_k)$$

と表される．ただし，∇ は (M, g) の共変微分である．更に，$m \in \mathbb{Z}$ に対して，Chern 類が $[m\Theta/2\pi]$ であるエルミート直線束 $\pi_E^m : E^m \to M$ 上の Bochner-Laplacian

$$\hat{H}_m = -\sum_{j,k} g^{jk}(\nabla_j - imA_j)(\nabla_k - imA_k)$$

を考える．$\hat{H}$（および $\hat{H}_m$）を (T^*M, Ω, H) に対応する Schrödinger 作用素と考えることにする．$\hat{H}_m$ のスペクトル（固有値から成る）を

$$(0 \leq)\ \lambda_1^{(m)} \leq \lambda_2^{(m)} \leq \cdots \leq \lambda_j^{(m)} \leq \cdots \uparrow +\infty$$

とする．

2．主 $U(1)$ 束上の力学系とその簡約

磁場における力学系について，別の見方（簡約化による定式化）をする．

$\pi : P \to M$ を Hermite 直線束 $\pi_E^\nu : E^\nu \to M$ $(\nu \in \mathbb{N})$ に同伴する主 $U(1)$ バンドルとする．P 上には，E^ν 上の接続 $\widetilde{\nabla}^{(\nu)}$ に対応する接続が誘導される.（これも同じ記号 $\widetilde{\nabla}^{(\nu)}$ であらわす.）M の計量 g，接続 $\widetilde{\nabla}^{(\nu)}$ および，構造群 $U(1)$ の不変計量から，**Kaluza-Klein 計量**と呼ばれる P 上の Riemann 計量 $\tilde{g}$ が定義される．このとき，$U(1)$ の作用は計量 $\tilde{g}$ に関して等長的である．

Riemann 計量 $\tilde{g}$ から，T^*P 上の測地流の系 $(T^*P, \Omega_P, \widetilde{H})$ が定まる．$U(1) = \{e^{it}; 0 \leq t < 2\pi\}$ とおいて，$\tilde{x} = (x,t)$ $(x \in U \subset M,\ t \in [0, 2\pi))$ を P の局所座標，$(\tilde{x}, \tilde{\eta}) = (x, t, \eta, \tau)$ を T^*P の正準座標とすると，T^*P 上の Hamilton 関数 $\widetilde{H}$ は

$$\begin{aligned} \widetilde{H}(\tilde{x}, \tilde{\eta}) &= \sum \tilde{g}^{jk}(\tilde{x}) \tilde{\eta}_j \tilde{\eta}_k \\ &= \sum g^{jk}(x) \eta_j \eta_k - 2 \sum g^{jk}(x) a_k(x) \eta_j \tau + \big(|a(x)|^2 + \frac{1}{c^2}\big) \tau^2. \end{aligned}$$

とかける．ここで，$a_j(x) = \nu A_j(x)$，$c := |\partial/\partial t|$. そして，運動方程式は

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{x}^i = 2(\sum g^{ij} \eta_j - a^i \tau) \qquad (a^i := \sum g^{ij} a_j), \\ \dot{\eta}^i = -\sum \dfrac{\partial g^{jk}}{\partial x^i} \eta_j \eta_k + 2 \sum \dfrac{\partial a^j}{\partial x^i} \eta_j \tau - \dfrac{\partial}{\partial x^i}(|a|^2) \tau^2, \\ \dot{t} = -2 \sum a^j \eta_j + 2(|a|^2 + \dfrac{1}{c^2}) \tau, \\ \dot{\tau} = 0 \quad \to \tau = const.(= \mu). \end{cases}$$

この力学系の流れは $U(1)$ の（シンプレクティック）作用と可換であるから，Marsden-Weinstein の Reduction program によって，下図のように，各 $\mu \in \mathfrak{u}(1)^*$ に対して，**簡約力学系** $(P_\mu, \Omega_\mu, \widetilde{H}_\mu)$ が得られる．ここで，$J : T^*P \to \mathfrak{u}(1)^* = \{i\mu dt; \mu \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$ は $U(1)$ のシンプレクティック作用から定まる運動量写像である．さらに，微分同相写像 $\Psi_\mu : P_\mu \to T^*M$ が P の接続 $\widetilde{\nabla}^{(\nu)}$ から自然に定義され，関係：

$$\Omega_\mu = \Psi_\mu^*(\Omega_M + \mu\nu\pi_M^*\Theta), \quad \widetilde{H}_\mu = \Psi_\mu^* H + \frac{\mu^2}{c^2}$$

を与えることが分かる．よって，古典力学系として，$(P_{1/\nu}, \Omega_{1/\nu}, \widetilde{H}_{1/\nu})$ は magnetic flow の系 (T^*M, Ω, H) に同型である．(Hamilton 関数 $\widetilde{H}_{1/\nu}$ と H は定数だけの違いがある.)

$$\begin{tikzcd} & T^*P \arrow[ld, "\pi_P"'] \arrow[r, "J"] & \mathfrak{u}(1)^* \\ P \arrow[ddd, "\pi"] & & \\ & J^{-1}(\mu) \arrow[uu, "i_\mu"'] \arrow[d, "\pi_\mu"'] & \\ & P_\mu(= J^{-1}(\mu)/S^1) \arrow[d, "\Psi_\mu"', "\cong"] & \\ M & T^*M \arrow[l, "\pi_M"'] & \end{tikzcd}$$

図 1: 簡約力学系

群 $U(1)$ の P への作用に対応する微分作用素 $D_t = -i\partial/\partial t$ を考える．自己共役作用素 D_t のスペクトルは $\mathbb{Z}$ で，固有空間分解

$$L^2(P) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_m$$

が得られる．ここで，$\mathcal{H}_m$ は $f(p\cdot e^{it})=e^{imt}f(p)$ をみたす関数からなる空間である．$U(1)$ の作用が等長的であるから，Δ_P と D_t は可換である．よって，Δ_P は $\mathcal{H}_m$ を不変にする．そこで，$D_m:=\Delta_P|_{\mathcal{H}_m}$ とおく．$U(1)$ の表現 $e^{it}\mapsto e^{-imt}$ による P の同伴直線束が $\pi_E^{m\nu}:E^{m\nu}\to M$ に他ならない．そして，同形対応 $\mathcal{H}_m\cong L^2(E^{m\nu})$ が成り立つ．この対応で作用素 D_m は $C^\infty(E^{m\nu})$ に作用する作用素

$$\hat{H}_{m\nu}+m^2/c^2$$

に対応する．従って，D_m の固有値は $\{\lambda_j^{(m\nu)}+m^2/c^2\}_{j=1}^\infty$ であり，Δ_P のスペクトルは，

$$\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}\bigcup_{j=1}^{\infty}\{\lambda_j^{(m\nu)}+m^2/c^2\}$$

である．

3．周期軌道とスペクトル（結果）

T^*M 上の magnetic flow の系が周期 T の周期軌道 $\gamma=\gamma(s)=(x(s),\xi(s))$ $(0\le s\le T)$ を持つとする．そして，γ 上で $H\equiv E$ とする．点 $p=\gamma(0)\in T^*M$ の接空間 $T_p(T^*M)$ において，1次元部分空間 $\Gamma:=\mathbb{R}\dot{\gamma}(0)$，および

$$\Gamma^\perp:=\{V\in T_p(T^*M);\,\Omega(V,W)=0\text{ for }\forall W\in\Gamma\}$$

を考えると，

$$\Gamma^\perp=\{V\in T_p(T^*M);\,V(H)=0\}$$

であり，商空間 $Z:=\Gamma^\perp/\Gamma$ は $2n-2$ 次元シンプレクティックベクトル空間になる．magnetic flow の $q\in T^*M$ を初期点とする軌道を $\gamma(s;q)(s\in\mathbb{R})$ とし，点 p の近傍から p の近傍へのシンプレクティック写像 $\phi(q):=\gamma(T;q)$ を考える．このとき，微分写像 $d\phi:T_p(T^*M)\to T_p(T^*M)$ は Z 上の線形シンプレクティック変換 Φ （周期軌道 γ に沿う**線形 Poincaré 写像**）を誘導する．Φ の固有値が全て複素平面の単位円上に存在するとき，γ は**楕円型**周期軌道と呼ばれる．また，Φ が重複した固有値を持たないとき，γ は**非退化**であるという．いま，γ は非退化な楕円型周期軌道*とし，Poncaré 写像 Φ の固有値を

$$\{e^{\pm i\theta_1},\dots,e^{\pm i\theta_{n-1}}\}\quad(0<\theta_j<\pi,\theta_j\neq\theta_k)\tag{2}$$

とする．

前節の議論（図1参照）によれば，$C_p:=(\Psi_{1/\nu}\circ\pi_{1/\nu})^{-1}(p)$ $(\subset J^{-1}(1/\nu))$ の点 $\tilde{p}$ を初期点とする（Kaluza-Klein 計量に関する）測地流の軌道：$\tilde{\gamma}(s;\tilde{p})=(x(s),t(s),\eta(s),1/\nu)$ は方程式 (1) を満たす．そして，第3式は

$$\dot{t}=-\sum_j a_j(x)\dot{x}^j+\frac{2}{c^2\nu}\quad(a_j(x)=\nu A_j(x))\tag{3}$$

*__安定__な周期軌道とも呼ばれる．

と書き直せることに注意する．直線束 $\pi_E : E \to M$ 上の接続 $\tilde{\nabla}$ に関して，M 上の閉曲線 c に沿うホロノミーを $\exp(iQ(c)) \in U(1)$ $(-\pi < Q(c) \le \pi)$ とすると，(3) の解 $t(s)$ について

$$t(T) \equiv t(0) - \nu Q(\bar{\gamma}) + \frac{2T}{c^2\nu} \pmod{2\pi\mathbb{Z}},$$

$(\bar{\gamma} := \pi_M(\gamma))$ が成り立つ．従って，次の条件

$$(C.1) \qquad -\nu Q(\bar{\gamma}) + \frac{2T}{c^2\nu} \in 2\pi\mathbb{Z}$$

が成り立てば，$\tilde{\gamma}(s;\tilde{p})$ は周期 T の周期軌道になる．

$O_\gamma := \{\tilde{\gamma}(s;\tilde{p});\ 0 \le s \le T,\ \tilde{p} \in C_p\}$ とおくと，O_γ は $J^{-1}(1/\nu)$ $(\subset T^*P)$ の部分多様体で，2 次元トーラスに位相同形である．容易に分かるように，O_γ は (T^*P, Ω_P) の isotropic な部分多様体であり，正準 1-形式 $\omega_P := \sum_j \eta_j dx^j + \tau dt$ に対して

$$\int_{C_p} \omega_P = \frac{2\pi}{\nu}, \qquad \int_{\tilde{\gamma}} \omega_P = 2\Big(E + \frac{1}{c^2\nu^2}\Big)T$$

が成り立つ．

ここで，条件

$$(C.2) \qquad \nu\Big(E + \frac{1}{c^2\nu^2}\Big)T \in 2\pi\mathbb{Z}$$

が成り立つと仮定する．T^*P の部分多様体 O_γ をファイバー方向に拡大して，

$$\mathcal{S} := \{(x, t, \nu\eta, 1);\ (x, t, \eta, 1/\nu) \in O_\gamma\}$$

を考える．

補題 1．条件 (C.1), (C,2) が満たされているとする．このとき，$\mathcal{S}$ は (T^*P, Ω) の isotropic 部分多様体で，$\mathcal{S}$ 上の任意の閉曲線 c に対して，

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_c \omega_P \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ．また，$\mathcal{S}$ 上で，

$$\widetilde{H} \equiv \widetilde{E} := E\nu^2 + \frac{1}{c^2} = 4\pi^2 l^2 \Big/ \Big(E + \frac{1}{c^2\nu^2}\Big)T^2.$$

ただし，l は

$$\nu\Big(E + \frac{1}{c^2\nu^2}\Big)T = 2\pi l$$

（条件 (C.2)）を満たす整数である．

さて，主定理を述べる（[12]）．

主定理. M を向き付け可能とする．γ を T^*M 上の magnetic flow の周期 T の非退化楕円型周期軌道とし，γ 上で $H \equiv E$，γ に沿う Poincaré 写像 Φ の固有値が (2) で与えられるとする．そして，条件 (C.1)，(C.2) を満たす $\nu \in \mathbb{N}$, $c > 0$ が存在するとする．このとき，任意の整数 k および非負整数の組 $(k_1, k_2, \dots, k_{n-1})$ に対して，$\{\hat{H}_{m\nu}\}$ の固有値の列 $\{\lambda_{jm}^{(m\nu)}\}_{m=1}^{\infty}$ が存在して，

(5)
$$\lambda_{jm}^{(m\nu)} = E(m\nu)^2 + \frac{1}{T}\Big\{2\pi k + \sum_{j=1}^{n-1}(k_j + \frac{1}{2})\theta_j + \mu\Big\}m\nu + O(\sqrt{m})$$

を満たす．ここで，$\mu = \arg\sqrt{\det\Phi}$.

註. Planck 定数 $\hbar$ に対して，Schrödinger 作用素

$$\hat{H}_{\hbar} = -\sum_{j,k} g^{jk}(\hbar\nabla_j - iA_j)(\hbar\nabla_k - iA_k)$$

を考えると，$\hat{H}_{\hbar} = \{1/(m\nu)^2\}\hat{H}_{m\nu}$ $(\hbar = 1/m\nu)$ だから，$\lambda(\hbar)$ を $\hat{H}_{\hbar}$ の固有値とすれば，(5) 式は

(6)
$$\lambda(\hbar) = E + \frac{1}{T}\Big\{2\pi k + \sum_{j=1}^{n-1}(k_j + \frac{1}{2})\theta_j + \mu\Big\}\hbar + O(\hbar^{3/2})$$

と書き換えられる（**半古典近似**）．

4．証明の筋道（道具）

（1） 主定理の (5) 式は,

$$\sqrt{\lambda_{jm}^{(m\nu)} + \frac{m^2}{c^2}}$$
$$= \Big(\sqrt{\nu^2 E + \frac{1}{c^2}}\Big)m + \frac{1}{2T\sqrt{E + (1/c^2\nu^2)}}\Big\{2\pi k + \sum_{j=1}^{n-1}(k_j + \frac{1}{2})\theta_j + \mu\Big\} + O(m^{-1/2})$$

から導くことができることに注意する*．従って，上式を満たす固有値の列 $\{\lambda_{jm}^{(m\nu)}\}$ の存在を証明する．

（2） 2 次元トーラス $\mathbb{T}^2 := \{(e^{ir}, e^{is});\ 0 \le r, s < 2\pi\}$ 上の 2 乗可積分関数 $f(r, s)$ は

(7)
$$f(r, s) = \sum_{p,q\in\mathbb{Z}} f_{pq} e^{ipr} e^{iqs}$$

と表される．(7) において，$(p, q) \neq (m, m)$ $(m \in \mathbb{N})$ に対して $f_{pq} = 0$ を満たす $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ の全体を $L^2_{\Delta}(\mathbb{T}^2)$ とする．$\mathbb{T}^2$ 上の微分作用素

$$D_{\mathbb{T}^2} := \frac{1}{2i}\Big(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s}\Big)$$

*研究会の講演ではこの形の公式を報告した．

に対して，$D_{\mathbb{T}^2}e^{im(r+s)} = me^{im(r+s)}$ が成り立つことに注意する．

さて，連続線形作用素 $A : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2) \to \mathcal{D}'(P)$ で，以下を満たすものが存在するとする：

(A-i) $(\widetilde{E}^{-1/2}\sqrt{\Delta_P} + C)A - AD_{\mathbb{T}^2}$ が $H^{-1/2}(\mathbb{T}^2)$ から $L^2(P)$ への有界作用素を誘導する．ここで，C はある定数とする．

(A-ii) $A : L^2_\Delta(\mathbb{T}^2) \to L^2(P)$ は等長的である．

(A-iii) $w_m := A(e^{im(r+s)}) \in \mathcal{H}_m$.

このとき，$w_m = A(e^{im(r+s)}) \in \mathcal{H}_m$ に対して，

$$\begin{aligned}\|(\widetilde{E}^{-1/2}\sqrt{\Delta_P} + C - m)w_m\|_{L^2(P)} &= \|((\widetilde{E}^{-1/2}\sqrt{\Delta_P} + C)A - AD_{\mathbb{T}^2})e^{im(r+s)}\|_{L^2(P)} \\ &\le M\|e^{im(r+s)}\|_{H^{-1/2}(\mathbb{T}^2)} \le M/\sqrt{m}.\end{aligned}$$

一方，$\mathcal{H}_m \ni w_m = \sum_j \hat{w}_{m,j}\varphi_j^{(m)}$ （$\{\varphi_j^{(m)}\}_{j=1}^\infty$ は D_m の固有関数の正規直交基底）と書けるから，$\nu_j^{(m)} := (\lambda_j^{(m)} + m^2/c^2)^{1/2}$ として，

$$\begin{aligned}&\|(\widetilde{E}^{-1/2}\sqrt{\Delta_P} + C - m)w_m\|^2_{L^2(P)} \\ &= \left\|\widetilde{E}^{-1/2}\sum_j \hat{w}_{m,j}\nu_j^{(m)}\varphi_j^{(m)} - \sum_j (m-C)\hat{w}_{m,j}\varphi_j^{(m)}\right\|^2_{L^2(P)} \\ &= \frac{1}{\widetilde{E}}\sum_j \left\{\nu_j^{(m)} - \sqrt{\widetilde{E}}(m-C)\right\}^2|\hat{w}_{m,j}|^2 \\ &\ge \frac{1}{\widetilde{E}}\inf_j \left\{\nu_j^{(m)} - \sqrt{\widetilde{E}}(m-C)\right\}^2 \sum_j |\hat{w}_{m,j}|^2 \\ &= \frac{1}{\widetilde{E}}\inf_j \left\{\nu_j^{(m)} - \sqrt{\widetilde{E}}(m-C)\right\}^2.\end{aligned}$$

ここで，条件 (A-ii) より，$\sum_j |\hat{w}_{m,j}|^2 = 1$ に注意，上の不等式と合わせて，

$$\inf_j \left\{\sqrt{\lambda_j^{(m)} + m^2/c^2} - \sqrt{\widetilde{E}}(m-C)\right\}^2 \le \widetilde{E}M^2/m$$

すなわち，

$$\inf_j \left|\sqrt{\lambda_j^{(m)} + m^2/c^2} - \sqrt{\widetilde{E}}(m-C)\right| \le R/\sqrt{m} \ \ (R : \text{定数})$$

このようにして，

$$C = -\frac{1}{4\pi l}\left\{2\pi k + \sum_{j=1}^{n-1}(k_j + \frac{1}{2})\theta_j + \mu\right\} \tag{8}$$

として，上の条件 (A-i) − (A-iii) を満たす作用素 A を構成できれば主定理が証明されたことになる．(この手法は，量子化条件を満たす Lagrange 多様体に量子エネルギーの近似値を対応させる場合の考え方 [11] と全く同様である.)

（3） このような作用素を周期軌道 γ に対応して構成する．まず，前節で定義された部分多様体 $\mathcal{S}$ に基づいて，$T_0^*P \times T_0^*\mathbb{T}^2 (:= (T^*P\backslash 0) \times (T^*\mathbb{T}^2\backslash 0))$ の conic isotropic 部分多様体を定義する．

$$j : \mathcal{S} \times \mathbb{R}^+ \times S^1 \to T_0^*P \times T_0^*\mathbb{T}^2 \cong T_0^*P \times T_0^*S^1 \times T_0^*S^1$$

を

$$j(\sigma,\tau,z) := (\tau\sigma, (\alpha(z^{-1}\sigma), -\tau), (z, -\tau))$$

で定義する．ただし，$\sigma \in \mathcal{S}$ と定点 σ_0 を結ぶ $\mathcal{S}$ 上の曲線を c として，

$$\alpha(\sigma) := \exp\left(i\int_c \omega_P\right)$$

((3) より well-defined) とする．そして，写像 j の像を Σ とする．

補題 2．Σ は $T_0^*P \times T_0^*\mathbb{T}^2$ の 4 次元 conic isotropic 部分多様体である．

$P \times \mathbb{T}^2$ 上の 1 次擬微分作用素

$$D := \left(\widetilde{E}^{-1/2}\sqrt{\Delta_P} + C\right) \otimes I - I \otimes D_{\mathbb{T}^2}$$

を考える．D の主シンボル $\sigma(D)$ は

$$\sigma(D)(\tilde{x}, \tilde{\eta}, r, \rho, s, \zeta) = \widetilde{E}^{-1/2}\{\widetilde{H}(\tilde{x}, \tilde{\eta})\}^{1/2} - (1/2)(\rho + \zeta)$$

であり，対応する Hamilton ベクトル場 $X_{\sigma(D)}$ は

$$X_{\sigma(D)} = \widetilde{E}^{-1/2}X_P - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s}\right).$$

ただし，X_P は T_0^*P 上の関数 $\sqrt{\widetilde{H}}$ に対応する Hamilton ベクトル場である．

補題 3．(i) Σ 上で，$\sigma(D) \equiv 0$.

(ii) Σ 上で，$X_{\sigma(D)}$ の積分曲線は，周期 $4\pi l$ の閉曲線である．

(iii) $\sigma_{\mathrm{sub}}(D)$ を D の sub-principal symbol とするとき，$\sigma_{\mathrm{sub}}(D) = C$.

(4) （通常の）Fourier 積分作用素の理論（cf.[10]）によれば，$T_0^*P \times T_0^*\mathbb{T}^2$ の conic Lagrange 部分多様体 Λ が与えられれば，Λ を wave front set とするような "Fourier integral distribution" $K_\Lambda \in \mathcal{D}'(P \times \mathbb{T}^2)$ を核とする作用素: $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2) \to \mathcal{D}'(P)$ が定義される．ところが，ここでは Lagrange 多様体ではなく，isotropic 部分多様体 Σ が定義されている状況である．そこで，Σ に対応して作用素 $A : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2) \to \mathcal{D}'(P)$ を構成したい．そのための理論が Guillemin 達（cf. [7], [1]）によって構築されている．

Σ をシンプレクティック多様体 (T^*X, Ω) $(d = \dim X)$ の $(d-\ell)$ 次元 conic isotropic 部分多様体とする．局所的に，振動積分

$$(9) \qquad I_a = \int_{\mathbb{R}^N} a(x,\tau,\eta/\sqrt{|\tau|})e^{i\phi(x,\theta)}d\theta \quad (x \in U \subset X,\ \theta = (\tau,\eta) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell = \mathbb{R}^N)$$

で定義される X 上の超関数を考える．ここで，ϕ は非退化な phase function で，

$$C_\phi := \{(x,\theta); \partial\phi/\partial\theta_j = 0\ (1 \le j \le N)\}$$

は $Y := \{(x,\theta);\ \eta_1 = \cdots = \eta_\ell = 0\}$ と横断的であり，$C_\phi \cap Y$ の写像 $(x,\theta) \mapsto (x, \partial\phi/\partial x)$ による像が $\Sigma \cap T^*U$ に等しいとする．(このような ϕ は存在する．) amplitude function $a(x,\tau,\eta)$ はシンボルクラス $\mathcal{H}^{m-N/2}(k,\ell)$ に属するものとする．ただし，$a(x,\tau,\eta)$ が $\mathcal{H}^s(k,\ell)$ $(s \in \mathbb{R})$

に属するとは，$X \times \mathbb{R}^N$ 上の C^∞ 関数で，$\forall r>0$，$\forall \alpha, \beta, \gamma$（多重指標）,$\forall K$（$X$ のコンパクト集合）に対して，定数 C が存在して

$$|D_x^\alpha D_\tau^\beta D_\eta^\gamma a(x,\tau,\eta)| \leq C|\tau|^{s-|\beta|}(1+|\eta|)^{-r} \quad (x \in K)$$

が満たされることである．局所的に振動積分 (9) で定義される超関数の全体を $I^m(X,\Sigma)$ で表し，その要素を **Hermite 型の Fourier integral distribution** と呼ぶ．$I^m(X,\Sigma)$ に属する超関数 μ の wave front set は Σ に含まれることが言える．そして，μ の性質はそのシンボルの考察で得られる．$\mu \in I^m(X,\Sigma)$ のシンボル $\sigma(\mu)$ は，X がメタプレクティック構造をもつとき（X が向き付け可能であれば O.K.)，Σ 上の symplectic spinor bundle, $\mathrm{Spin}(\Sigma)$ の断面として定義される．すなわち，$S^m(\Sigma)$ を $\mathrm{Spin}(\Sigma)$ の m 次同次な C^∞ 断面の空間とするとき，写像

$$\sigma : I^m(X,\Sigma) \to S^m(\Sigma)$$

が定義される．このとき，σ の核は $I^{m-1/2}(X,\Sigma)$ である．

（5）主定理の証明のための作用素 A をその核 K_A が $I^m(P \times \mathbb{T}^2, \Sigma)$（適当な m で）に属する超関数として求める．このとき，A の満たすべき条件 (A-i)-(A-iii) は

(A-i′) $DK_A \in I^{m-1/2}(P \times \mathbb{T}^2, \Sigma)$.

(A-ii′) A^*A が $L^2(\mathbb{T}^2)$ から $L^2_\Delta(\mathbb{T}^2)$ への直交射影である．

(A-iii′) K_A が $U(1)$ の作用で不変である．ただし，e^{it} の $P \times \mathbb{T}^2$ への作用は，$(p; e^{ir}, e^{is}) \mapsto (p \cdot e^{it}; e^{ir}, e^{i(s+t)})$ である．

と言い換えられる．

1次擬微分作用素 D に対して，一般に，$K_A \in I^m(P \times \mathbb{T}^2, \Sigma) \Rightarrow DK_A \in I^{m+1}(P \times \mathbb{T}^2, \Sigma)$ であるが，D が (i) $\sigma(D)|_\Sigma \equiv 0$, (ii) $X_{\sigma(D)}$ が Σ に接する，を満たす（補題3参照）とき，$DK_A \in I^m(P \times \mathbb{T}^2, \Sigma)$ で，シンボルに対して，

$$\sigma(DK_A) = \frac{1}{i} X_{\sigma(D)} \sigma(K_A) + C\sigma(K_A) \tag{10}$$

が成り立つ（c.f. [1, §10]）．$z \in \Sigma$ に対して，$E_z := \Sigma_z^\perp / \Sigma_z$ とおくと，E_z は $2(n-1)$ 次元シンプレクティックベクトル空間で，$X_{\sigma(D)}$ の周期 $4\pi l$ の周期軌道はシンプレクティック写像（Poincaré 写像）$P : E_z \to E_z$ を定義する．このとき，P の固有値は (2) に等しいことに注意する．Poincaré 写像 P より

$$\tau(P) : \mathrm{Spin}(\Sigma)_z \to \mathrm{Spin}(\Sigma)_z$$

が定義され，その固有値は

$$\sqrt{\det P} \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{n-1} \left(k_j + \frac{1}{2}\right) \theta_j \right\} \tag{11}$$

(k_j: 非負整数）となる（c.f. [7]）．(10) 式より，$\sigma(DK_A) = 0$ すなわち条件 (A-i′) を満たす K_A が存在するのは，$\exp(-4\pi l C i)$ が (11) に等しい，すなわち，(8) 式が成り立つときである．

最後に，条件 (A-ii′),(A-iii′) についての考察は，概ね [11] での議論と同様であり，本稿では詳細を省略する．

参考文献

[1] L. Boutet de Monvel and V. Guillemin, *The Spectral Theory of Toeplitz Operators*, Ann. Math. Studies No. 99, Princeton Univ. Press, 1981.

[2] J. Chazarain, Formule de Poisson pour les riemanniennes, Invent. Math. **24**(1974), 65-82.

[3] Y. Colin de Verdierè, Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I II, Compositio Math. **27**(1973), 83-106, 159-184.

[4] Y. Colin de Verdierè, Quasi-modes sur les variété riemanniennes, Invent. Math., **43**(1977), 15-52.

[5] J.J. Duistermaat, Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities, Comm. Pure Appl. Math., **27**(1974), 207-281.

[6] J.J. Duistermaat and V.W. Guillemin, The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics, Invent. Math. **29**(1975), 39-79.

[7] V. Guillemin, Symplectic spinors and partial differential equations, Colloques Internationaux C.N.R.S. "Géométrie symplectique et physique mathématique"(1974), 217-252.

[8] V. Guillemin and A. Weinstein, Eigenvalues associated with a closed geodesic, Bull. Amer. Math. Soc., **82**(1976), 92-94, Correction and Addendum, Bull. Amer. Math. Soc., **82**(1976), 966.

[9] M.C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[10] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators IV*, Springer-Verlag, 1985.

[11] R. Kuwabara, On Maslov's quantization condition for mechanics in a magnetic field, J. Math. Tokushima Univ., **33**(1999), 33-54.

[12] R. Kuwabara, Eigenvalues associated with a periodic orbit of a magnetic flow, in preparation.

[13] V.P. Maslov, *Theorie des perturbations et methodes asymptotics*, Dunod, Guthier-Villars, Paris, 1972.

[14] 中村勝弘，量子物理学におけるカオス，岩波書店，1998.

[15] J.V. Ralston, Approximate eigenfunctions of the Laplacian, J. Diff. Geometry, **12**(1977), 87-100.

[16] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc. **20**(1956), 45-87.

[17] A. Voros, The WKB-Maslov method for nonseparable systems, Colloques Internationaux C.N.R.S. "Géométrie symplectique et physique mathématique"(1974), 277-287.

[18] A. Weinstein, On Maslov's quantization condition, *Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations*, Springer Lect. Notes in Math. **459**(1974), 341-372.