数理解析研究所講究録
1181巻 2001年 135-139

Bang-Bang Principle in Parameter Identification Problems

神戸大学工学部　中桐信一 (Shin-ichi Nakagiri)

1 Introduction

私はこの研究集会に出席することができず、菊池先生の還暦の祝賀会にのみ出席させて頂きました。久しぶりにお会いし、お話ができたのは嬉しいことでした。その後ＷＣＮＡ２０００で金沢大の小俣正朗氏にお会いした際、彼から菊池先生の１番弟子ということで原稿の依頼を受けました。何を書くか迷ったのですが、私の修士時代の先生の思い出を交えて、それに関連する昔の共同の仕事の紹介をしたいと思います。

私が神戸大の修士課程に進んだのは、昭和４６年で当時菊池先生はバリバリの助教授でした。学部４年のとき、例の大学紛争を避けつつ菊池先生のもとでセミナーを行っていたのを思い出します。紛争時代は嫌な思い出が多いのですが、静かになった修士時代は菊池先生の苛烈なる指導があり振り返る余裕もなく必死で勉強していました。もともと頭脳明晰でない方に生まれついている学生であった私は、理解をするのに膨大な時間がかかり先生の（当時は）神の宣託のごときお言葉や方針を十分には咀嚼できていませんでした。六甲山をハイキングしながら数学の話を本当に沢山聞かせて頂きました。西田幾太郎の哲学などの話もあり、深遠な話であるという実感がありました。しかし、先生の話がある程度理解できるようになったのは、工学部に就職して自分なりの仕事ができ始めてからでした。

修士時代は、先生の指導のもとで Ladyzenskaya の Navier-Stokes の本や Nash-Moser タイプの非線型楕円型評価の論文、福原先生の Kneser family に関する論文、安香先生や Waltman の２点境界値問題に関する論文、Miller-Sell の位相力学系の理論、Miller のボルテラ方程式の本、Roxin の Contingent 方程式の論文なんかを勉強しました。勿論勉強しただけで、内容の理解はおぼつきませんでした。今考えると、まったく脈絡のない勉強をしていたものだと思います。菊池先生の頭の中には、これらを総合（じつはもっと広い立場から）する形で大きな構想があった事が分かったのは、ずっとあとの事です。その構想については、皆さんご存じと思いますが、修士の学生には理解できないのが普通ですよね。

かくして出来のいまいち良くない学生であった私は修士論文作成に悪戦苦闘するわけでした。修士の１年の時だったと思いますが、浦太郎先生の位相力学系のセミナーで Miller-Sell のボルテラ方程式の位相力学的取り扱いの理論の紹介があり、そこで非線型ボルテラ方程式の解の存在につ

いての open problem が提出されているのを知りました。自分で言うのはなんですが、なかなかうまいやり方でこの問題を解くことができました。また、解の一意性のない場合には、常微分方程式と同じように Kneser property が成りたつ事を証明しました。これらの結果をもとにして、修士論文を必死の体で書き上げました。評価に厳しい菊池先生も喜んでくれ、私を誉めてくれたのを覚えています。劣等感の塊であった自分にとって、この経験は自信をつけるもので有り難いことでした。これらは、菊池先生との共著論文 [10], [11] としてＦＥに発表されました。1990 年に出版された Gripenberg-Londen-Staffans の本 [6] にもこれらの論文が引用されており、古い結果ですが嬉しく思いました。

その後は、菊池先生が慶応大学に移られたり、私の研究テーマが分布系の制御や同定問題に移行したため先生との研究面での交流はなくなってしまいました。でもお会いするたび、先生が熱心に数学のことをお話されるのは変わりません。私もその熱意を"定年退職"までは持ちたいと思っています。これからもお元気で、弟子達に研究のハッパをかけられる事を望んでいます。

最近私達グループは、非線型波動方程式の最適制御やパラメータ同定の理論とその数値解析の研究をしています。最適性の条件からしばしば最適解の Bang-Bang property が導かれますが、これは考えてみると contingent 方程式の境界を這う解そのものであり Kneser property の変種かもしれません。これらは、すでに修士の学生のとき先生から教わっており理解するのに抵抗がなかったのでしょう。また、抽象ボルテラ方程式を勉強したおかげで 関数微分方程式論を勉強するのは比較的楽であったのも、先生のご指導の賜物でしょう。

以下の２節では、２階非線型発展方程式の作用素と非線型項に現れるパラメータの同定問題についての我々の結果を紹介します。３節でパラメータが定数の場合に、Bang-Bang property が成りたつ事を示しています。その他最適制御問題や数値解析等に関しては、文献 [5], [7], [8], [9], [14], [15] も参照してください。さて多分に不自然ですが、２節以後は英語に変更します。この節を英語で書くのは大変だということでご了承ください。

2 Identification problems

We study the identification problems for the system governed by nonlinear damped second order evolution equations in the Hilbert space H of the form

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + A_2(t,q)\dfrac{dy}{dt} + A_1(t,q)y = f(t,q,y) \quad \text{in} \quad (0,T) \\ y(0) = y_0 \in V_1, \quad \dfrac{dy(0)}{dt} = y_1 \in H, \end{cases} \tag{2.1}$$

where $A_1(t,q)$ and $A_2(t,q)$ are time dependent differential operators defined by bilinear forms on Hilbert spaces V_1 and V_2 ($V_1 \subset V_2 \subset H$), respectively, $f(t,q,y)$ is a nonlinear forcing function and these quantities depend on the unknown parameter q, which should be identified by some identification process.

At present various theoretical and numerical methods for identifying or estimating the unknown parameters have been extensively studied mainly for linear systems. One of the most powerful tool for identifying unknown parameters is the method of output least-squares, and this optimal control theoretical technique due to Lions [12] has shown its effectiveness in various applications to practical identification problems as in [1], [2] and [3]. We also take the method of output least-squares for the nonlinear system (2.1) and consider the output error criterion given by the quadratic cost

$$J(q) = \frac{1}{2}\|\mathcal{C}y(q) - z_d\|^2_{\mathcal{M}}, \quad q \in Q_{ad} \subset Q, \tag{2.2}$$

where $y(q)$ is a solution of (2.1), $\mathcal{C}$ is an observation operator, $\mathcal{M}$ is a space of observations, Q is a set of parameters, Q_{ad} is an admissible set of parameters and z_d is a desired value in $\mathcal{M}$.

We study two fundamental identification problems for the system (2.1) with the criterion (2.2). That is, the one is the existence problem of finding an element $\overline{q} \in Q$ such that $J(\overline{q}) = \inf_{q \in Q_{ad}} J(q)$, $Q_{ad} \subset Q$, and the other is the problem of giving characterizations of such $\overline{q}'s$. The characterizations are given by the necessary conditions for optimality of parameters $\overline{q}$.

The purpose of this paper is to establish the results on existence and necessary conditions for the system (2.1) with (2.2) on the structure of Gelfand five folds. In order to analyze our identification problems for the system (2.1), it is fundamental to show that the nonlinear mapping $q \to y(q)$ from parameters to solutions is strongly continuous and weak Gâteaux differentiable with respect to the topology of the space of solutions.

These are rather hard problems to solve because of the existence of nonlinear term $f(t, q, y)$. For the strong continuity we shall give a proof based on the energy equality for (2.1), which is established in Ha and Nakagiri [8], and the strong convergence technique due to Dautray and Lions [4]. In proving the strong continuity we never use any compactness nor monotone conditions on spaces and operators.

For the weak Gâteaux differentiability, we have to extend the class of solutions, and for this we use the method of transposition due to Lions and Magenes [13] to give the exact meaning of Gâteaux derivatives of $y(q)$ with respect to q.

As consequences of the continuity and the differentiability we can establish the existence result and the necessary conditions for the identification problems. Based on the results, we give an application to practical damped hyperbolic partial differential equations involving unknown constant parameters in the differential operators.

3 Bang-Bang property

Let Ω be an open bounded set of R^n with a smooth boundary $\Gamma = \partial\Omega$. Let $\Omega_T = (0,T) \times \Omega$ and $\Sigma = (0,T) \times \Gamma$. Consider the following nonlinear partial differential equation given by

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - (|\alpha| + \alpha_0)\Delta\frac{\partial y}{\partial t} + (|\beta| + \beta_0)\Delta^2 y + (\gamma + \gamma_0)\sin y = f \quad \text{in} \ \ \Omega_T, \tag{3.1}$$

where $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0, \gamma_0 \neq 0, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ and $f \in L^2(\Omega_T) = L^2(0,T; L^2(\Omega))$. We consider the homogeneous Drichlet problem for (3.1). So we take $V_1 = H_0^2(\Omega)$, $V_2 = H_0^1(\Omega)$ and $H = L^2(\Omega)$. Take the set of parameters as $Q = \mathbf{R}^3$ and let α_0 and β_0 be fixed positive constants.

Hence, for $y_0 \in V_1$, $y_1 \in H$ there exists a unique weak solution $y = y(\alpha, \beta, \gamma)$ satisfying

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - (|\alpha| + \alpha_0)\Delta\dfrac{\partial y}{\partial t} + (|\beta| + \beta_0)\Delta^2 y + (\gamma + \gamma_0)\sin y = f \quad \text{in} \ \ \Omega_T \\ y = \dfrac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{on} \ \ \Sigma \\ y(0,x) = y_0(x) \ \ \text{in} \ \ \Omega \ \ \text{and} \ \ \dfrac{\partial y}{\partial t}(0,x) = y_1(x) \ \ \text{in} \ \ \Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

We give the cost function defined by

$$J(\alpha,\beta,\gamma) = \int_{\Omega_T} (y(\alpha,\beta,\gamma;t,x) - z_d(t,x))^2 \, dxdt, \quad \forall(\alpha,\beta,\gamma) \in Q. \tag{3.3}$$

For one example let us take $Q_{ad} = [0,\alpha_1] \times [0,\beta_1] \times [0,\gamma_1]$. Then there is an optimal parameter $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$ subject to (3.2) and (3.3). The adjoint state $\xi = \xi(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$ corresponding to this example is given by the following equation:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + (|\overline{\alpha}| + \alpha_0)\Delta\dfrac{\partial \xi}{\partial t} + (|\overline{\beta}| + \beta_0)\Delta^2 \xi + (\overline{\gamma} + \gamma_0)\cos y \; \xi = y(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}) - z_d \quad \text{in} \ \ \Omega_T \\ \xi = \dfrac{\partial \xi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{on} \ \ \Sigma \\ \xi(T,x) = 0 \ \ \text{in} \ \ \Omega \ \ \text{and} \ \ \dfrac{\partial \xi}{\partial t}(T,x) = 0 \ \ \text{in} \ \ \Omega. \end{cases}$$

Therefore the necessary condition on the optimal parameter $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$ is given by

$$\begin{aligned} &(\alpha - \overline{\alpha}) \int_{\Omega_T} \nabla \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \nabla \xi \, dxdt + (\beta - \overline{\beta}) \int_{\Omega_T} \Delta y \Delta \xi \, dxdt \\ &+(\gamma - \overline{\gamma}) \int_{\Omega_T} \sin y \; \xi \, dxdt \leq 0, \quad \forall(\alpha,\beta,\gamma) \in Q_{ad}, \end{aligned}$$

which is equivalent to

$$(\alpha - \overline{\alpha})a \leq 0, \quad (\beta - \overline{\beta}) \leq 0, \quad (\gamma - \overline{\gamma})c \leq 0, \quad \forall(\alpha,\beta,\gamma) \in Q_{ad}, \tag{3.4}$$

where

$$a = \int_{\Omega_T} \nabla \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \nabla \xi \, dxdt, \quad b = \int_{\Omega_T} \Delta y \Delta \xi \, dxdt, \quad c = \int_{\Omega_T} \sin y \; \xi \, dxdt.$$

Assume that $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ for simplicity. Then by (3.4) we have $\overline{\alpha} = \frac{\alpha_1}{2}\{1 + \text{sign}(a)\}$, $\overline{\beta} = \frac{\beta_1}{2}\{1 + \text{sign}(b)\}$ and $\overline{\gamma} = \frac{\gamma_1}{2}\{1 + \text{sign}(c)\}$. This is a bang-bang property for the optimal parameters $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$.

参考文献

[1] N. U. Ahmed, *Optimization and identification of systems governed by evolution equations on Banach space, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Scientific & Technical,* Vol. 184, 1988.

[2] H. T. Banks and K. Kunisch, *Estimation Techniques for Distributed Parameter Systems, Birkhäuser, Boston*, 1989.

[3] H. T. Banks, R. C. Smith and Y. Wang, *Smart Material Structures, Modeling, Estimation and Control, ISBN Masson, ISBN Wiley*, 1996.

[4] R. Dautray and J. L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Springer-Verlag,* Vol. 5, Evolution Problems, 1992.

[5] M. Elgamal and S. Nakagiri, Numerical analysis of one dimensional coupled sine-Gordon equations based on FEM, *Kobe J. Math.*, **16**(1999), 67-85.

[6] G. Gripenberg, S-O. Londen and O. Staffans, *Volterra Integral and Functional Equations,* Encyclodedia of Math. and Its Appl., *Cambridge Univ. Press*, 1990.

[7] J-H Ha and S. Nakagiri, Quadratic optimal control problems for nonlinear damped second order systems in Hilbert spaces, *Nonlinear Analysis, Theory, Method and Applications,* **30-4**(1997), 2261-2272.

[8] J.H. Ha and S. Nakagiri, Existence and regularity of weak solutions for semilinear second order evolution equations, *Funcialaj Ekvacioj*, Vol. 41, No. 1(1998), pp. 1-24.

[9] J-H Ha, S. Nakagiri and Jaedong Shim: Identification problems for systems governed by nonlinear damped second order equations,*Nonlinear Analysis, Theory, Method and Applications*, (2001), submitted.

[10] N. Kikuchi and S. Nakagiri, An existence theorem of solutions of nonlinear integral equations, *Funcialaj Ekvacioj*, **15**(1972), 131-138.

[11] N. Kikuchi and S. Nakagiri, Kneser's property of solutions of nonlinear integral equations, *Funcialaj Ekvacioj*, **17**(1974), 57-66.

[12] J. L. Lions, *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*, 1971.

[13] J. L. Lions and E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I, II, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*, 1972.

[14] S. Nakagiri and J-H Ha, Optimal control problems for damped Klein-Gordon equations, Nonlinear Analysis, Theory, Method and Applications, Proceedings of the Third World Congress of Nonlinear Analysts, (2001), to appear.

[15] S. Nakagiri and J-H Ha, Coupled sine-Gordon equations as nonlinear second order evolution equations , Taiwanese J. Math., (2000), to appear.