数理解析研究所講究録
1183 巻 2001 年 94-101

Dual pair における Casimir 作用素の対応

京大 理　　伊藤稔 (MINORU ITOH)*

Introduction. Dual pair の興味深い性質のひとつとして, ふたつの Lie 環の普遍包絡環の「中心」(正確には Lie 群の adjoint 作用に関する不変式環) の像が一致するということがある. 本稿では, [H2] で導入された complex reductive dual pair について, この普遍包絡環の対応を Casimir 作用素と呼ばれる中心元を用いて具体的に記述する.

以下, 複素数体 $\mathbb{C}$ の上で考える. (G, G') を複素 symplectic 群 $Sp_N = Sp_N(\mathbb{C})$ における reductive dual pair とする. すなわち G, G' は互いが互いの commutant であるような Sp_N の reductive な部分群である. また ω を Sp_N の oscillator 表現とする. このとき $\omega(G)$ および $\omega(G')$ の $\omega(U(\mathfrak{sp}_N))$ における commutant はそれぞれ Lie 環 $\mathfrak{g}' = \mathrm{Lie}(G')$, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ の作用から生成されることが知られている [H2]. 特に普遍包絡環の作用について次の等式が成立する:

$$\omega(U(\mathfrak{g})^G) = \omega(U(\mathfrak{g}')^{G'}).$$

ただし $U(\mathfrak{g})^G$ は G の adjoint 作用に関する普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の不変元全体のなす環を表す. 同様の等式は複素直交群 O_N における reductive dual pair とその pin 表現 σ に対しても成立する: $\sigma(U(\mathfrak{g})^G) = \sigma(U(\mathfrak{g}')^{G'})$. 本稿の目標はこのふたつの普遍包絡環の中心の対応を Lie 環の基底の言葉で記述することである. 主結果は "Casimir 作用素" と呼ばれる $U(\mathfrak{g})^G$, $U(\mathfrak{g}')^{G'}$ の生成系の簡潔な等式である.

Casimir 作用素は古典群の普遍包絡環において, 以下のように導入される. まず一般線型群 GL_N の場合から始める. Lie 環 $\mathfrak{gl}_N$ の標準的な基底 E_{ij} を要素とする行列 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\mathfrak{gl}_N} = (E_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ を考える. これを普遍包絡環の元を要素とする行列だと思って冪のトレース

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}^r) = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_r \le N} E_{i_1 i_2} E_{i_2 i_3} \cdots E_{i_r i_1}$$

を考えると, これは GL_N の adjoint 作用で不変であることが知られている ([PP1], [Ge], [Z]). また $\{ \mathrm{tr}(\boldsymbol{E}^r) \mid 0 \le r \le N \}$ が不変式環 $U(\mathfrak{gl}_N)^{GL_N}$ の生成系をなしている. この $\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}^r)$ を GL_N に関する Casimir 作用素と呼ぶ.

*Partially supported by JSPS Research Fellowships for Young Scientists.

同様の中心元は $G=O_N$, Sp_N の普遍包絡環に対しても導入できる．群 G を定める双線型形式に対応した対称行列または交代行列を Φ で表すと, Lie 環 $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$ は $F_{ij}=E_{ij}-\Phi^{-1}E_{ji}\Phi$ という形の元で張られる．一般線型群 GL_N のときと同様にこれらを要素とする行列 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_{\mathfrak{g}}=(F_{ij})_{1\le i,j\le N}$ を構成し，その冪のトレース $\mathrm{tr}(\boldsymbol{F}^r)$ をとる．するとこれはやはり G の adjoint 作用で不変であり，さらに $\{\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{F}^{2r})\mid 0\le 2r\le N\,\}$ が不変式環 $U(\mathfrak{g})^G$ の生成系をなしている．この $\mathrm{tr}(\boldsymbol{F}^r)$ を G に関する Casimir 作用素と呼ぶ ([PP2], [Ge], [Z])．

Remarks. (1) 一般に reductive Lie 環の普遍包絡環の 2 次の中心元として Casimir element と呼ばれるものがよく知られているが, 上記の Casimir 作用素はこれの拡張と見なせる．

(2) 不変式環 $U(\mathfrak{g})^G$ は明らかに $U(\mathfrak{g})$ の中心 $ZU(\mathfrak{g})$ に含まれる．実際には $G=GL_N$, Sp_N, O_{2k+1} のときには $U(\mathfrak{g})^G$ は $ZU(\mathfrak{g})$ に一致しており，上記の例では $G=O_{2k}$ のときのみ $U(\mathfrak{g})^G$ が $ZU(\mathfrak{g})$ の真部分集合になっている．

主定理を述べよう． 複素 symplectic 群における reductive dual pair は (GL_m,GL_n), (O_m,Sp_n) という二系列の既約な dual pair の直積という形で書くことができる ([H1], [S])．この二系列の既約な dual pair (G,G') に対して oscillator 表現 ω における $U(\mathfrak{g})^G$ と $U(\mathfrak{g}')^{G'}$ の対応を記述したのが 本稿の主定理である:

Theorem A. Sp_{2mn} における dual pair (GL_m,GL_n) に対し次の等式が成立する:

$$\omega\left(\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{E}-\frac{n}{2}I_m\right)\left(\boldsymbol{E}-\left(\frac{n}{2}+m\right)I_m\right)^r\right)\right)$$
$$=\omega\left(\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{E}'-\frac{m}{2}I_n\right)\left(\boldsymbol{E}'-\left(\frac{m}{2}+n\right)I_n\right)^r\right)\right).$$

ただし $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathfrak{gl}_m}$, $\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}_{\mathfrak{gl}_n}$ とする．

Theorem B. Sp_{mn} における dual pair (O_m,Sp_n) に対し次の等式が成立する:

$$\omega\left(\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{F}-\frac{n}{2}I_m\right)\left(\boldsymbol{F}-\left(\frac{n}{2}+m-\frac{1}{2}\right)I_m\right)^r\right)\right)$$
$$=\omega\left(\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{F}'-\frac{m}{2}I_n\right)\left(\boldsymbol{F}'-\left(\frac{m}{2}+n+\frac{1}{2}\right)I_n\right)^r\right)\right).$$

ただし $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_{\mathfrak{o}_m}$, $\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}_{\mathfrak{sp}_n}$ とする．

Remark. Theorems A, B から G の Casimir 作用素の像は G' の Casimir 作用素の像の線型和で書けることがわかる．この事実は Klink, Leung, Ton-That によって示されたが, 彼らはその具体的な記述は与えなかった. Dual pair (GL_m,GL_n) の場合については [KT] を, (O_m,Sp_n) の場合については [LT], [L] を参照のこと．

複素直交群における reductive dual pair (G,G') とその pin 表現 σ に対しても $U(\mathfrak{g})^G$ と $U(\mathfrak{g}')^{G'}$ の対応を同様に記述することができる．複素直交群における既約な reductive dual pair は (GL_m, GL_n), (O_m, O_n), (Sp_m, Sp_n) の三系列に分類される [S].

Theorem C. O_{2mn} における dual pair (GL_m, GL_n) に対し 次の等式が成立する:

$$\sigma\left(\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{E}+\frac{n}{2}I_m\right)\left(\boldsymbol{E}+\left(\frac{n}{2}-m\right)I_m\right)^r\right)\right)$$
$$=(-)^r\sigma\left(\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{E}'+\frac{m}{2}I_n\right)\left(\boldsymbol{E}'+\left(\frac{m}{2}-n\right)I_n\right)^r\right)\right).$$

ただし $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathfrak{gl}_m}$, $\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}_{\mathfrak{gl}_n}$ とする.

Theorem D. O_{mn} における dual pair (O_m, O_n) に対し 次の等式が成立する:

$$\sigma\left(\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{F}+\frac{n}{2}I_m\right)\left(\boldsymbol{F}+\left(\frac{n}{2}-m+\frac{1}{2}\right)I_m\right)^r\right)\right)$$
$$=(-)^r\sigma\left(\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{F}'+\frac{m}{2}I_n\right)\left(\boldsymbol{F}'+\left(\frac{m}{2}-n+\frac{1}{2}\right)I_n\right)^r\right)\right).$$

ただし $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_{\mathfrak{o}_m}$, $\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}_{\mathfrak{o}_n}$ とする.

Theorem E. O_{mn} における dual pair (Sp_m, Sp_n) に対し 次の等式が成立する:

$$\sigma\left(\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{F}+\frac{n}{2}I_m\right)\left(\boldsymbol{F}+\left(\frac{n}{2}-m-\frac{1}{2}\right)I_m\right)^r\right)\right)$$
$$=(-)^r\sigma\left(\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{F}'+\frac{m}{2}I_n\right)\left(\boldsymbol{F}'+\left(\frac{m}{2}-n-\frac{1}{2}\right)I_n\right)^r\right)\right).$$

ただし $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_{\mathfrak{sp}_m}$, $\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}_{\mathfrak{sp}_n}$ とする.

次節以降で述べるように, これらの定理はほぼ一貫した計算で証明することができる.

上記の dual pair について oscillator 表現 または pin 表現の $G\times\mathfrak{g}'$- 加群としての既約分解は詳しく研究されている ([KV], [H3]). また Casimir 作用素の既約表現における固有値は[PP1], [PP2] で与えられているから, 上記の定理は 原理的にはこの既約分解に関する結果から導出可能な筈である. しかし その計算は必ずしも自明ではない. 本稿ではこうした結果によらない直接的な証明を与える. 本稿の計算から逆に既約分解の問題にアプローチするのも面白いかもしれない.

Capelli 型の関係式との関係にも触れておく. Capelli 恒等式は一般線型 Lie 環の普遍包絡環の中心の生成系である Capelli elements の作用に関する等式であり, Sp_{2mn} における dual pair (GL_m, GL_n) での普遍包絡環の中心の対応のひとつの記述になっている ([Ca1], [Ca2], [U1]). Capelli element と Casimir 作用素の関係は Newton の公式の類似で与えら

れる ([N], [I1], [U2]) から, Theorem A は Capelli 恒等式とこの Newton 型の関係式から導くこともできる. しかしこの証明方法は他の定理には容易には適用できない.

Sp_{mn} における dual pair (O_m, Sp_n) に対しても Capelli 恒等式の類似物が固有値の言葉で与えられている [MN]. これは Sp_{mn} の oscillator 表現の $O_m \times \mathfrak{sp}_n$- 加群としての既約分解に関する結果 ([KV]) からの帰結である. この結果と Sklyanin determinant に関する [M] の結果を組み合わせることで, Theorem B ほど簡潔ではないが, $U(\mathfrak{o}_m)^{O_m}$ と $U(\mathfrak{sp}_n)^{Sp_n}$ の対応の Lie 環の基底の言葉による記述が得られることも注意しておく.

1. The pair (GL_m, GL_n) in Sp_{2mn}. 本稿の定理はすべて一貫した方法で証明できる. まず 今節で Theorem A の証明について, すなわち Sp_{2mn} における dual pair (GL_m, GL_n) の場合について詳しく述べ, 次節以降で 残りの dual pair の場合の証明の方針を示す.

群 GL_m, GL_n は $m \times n$ 行列の空間 $\mathrm{Mat}_{m,n}$ への左右からの積で $GL(\mathrm{Mat}_{m,n})$ の部分群と見なすことで, dual pair をなす. さらに この pair は 次のようなより大きな symplectic 群の中の dual pair と見なすことができる. 行列の空間 $V = \mathrm{Mat}_{m,n}$ と その双対空間 V^* の直和空間 $V \oplus V^*$ に次のように symplectic 形式を入れる:

$$\langle u + u^*, v + v^* \rangle = u^*(v) - v^*(u), \qquad u, v \in V, \quad u^*, v^* \in V^*.$$

群 $GL(V)$ の元 g はこの空間 $V \oplus V^*$ に $g \cdot (u, u^*) = (gu, {}^t g^{-1} u^*)$ という形で等長的に作用するから, これによって $GL(V)$ を $Sp(V \oplus V^*)$ の部分群と見なす. ただし $(u, u^*) \in V \oplus V^*$ とする. $GL(V) = GL(\mathrm{Mat}_{m,n})$ の部分群 GL_m, GL_n は $Sp(V \oplus V^*)$ の部分群としても dual pair になっている.

Theorem A はふたつの Lie 環 $\mathfrak{gl}_m$, $\mathfrak{gl}_n$ の作用を具体的に書き下して 直接計算することで示すことができる. $Sp(V \oplus V^*)$ の oscillator 表現 ω は行列の空間 $\mathrm{Mat}_{m,n}$ の上の急減少函数の空間 $\mathcal{S}(\mathrm{Mat}_{m,n})$ の上に構成される. E_{ij}, E'_{ij} をそれぞれ $\mathfrak{gl}_m$, $\mathfrak{gl}_n$ の標準的な基底, x_{ij} を $\mathrm{Mat}_{m,n}$ の標準的な座標とすると, Lie 環 $\mathfrak{gl}_m$, $\mathfrak{gl}_n$ の作用は微分作用素環 $\mathcal{PD}(\mathrm{Mat}_{m,n})$ の言葉で次のように書ける [H3]:

$$\omega(E_{ij}) = \sum_{s=1}^{n} x_{is} \frac{\partial}{\partial x_{js}} + \frac{n}{2}\delta_{ij}, \qquad \omega(E'_{ij}) = \sum_{s=1}^{m} x_{si} \frac{\partial}{\partial x_{sj}} + \frac{m}{2}\delta_{ij}.$$

これを行列の形で簡潔にまとめよう. Lie 環の元を要素とする正方行列 $\boldsymbol{E} = (E_{ij})_{1 \le i,j \le m}$ および $\boldsymbol{E}' = (E'_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, そして微分作用素を要素とする $m \times n$ 行列 $X = (x_{ij})$ および $X^* = (\frac{\partial}{\partial x_{ij}})$ を導入すると, この表示は次のようにまとめられる:

$$\omega(\boldsymbol{E}) = X {}^t X^* + \frac{n}{2} I_m, \qquad \omega(\boldsymbol{E}') = {}^t X X^* + \frac{m}{2} I_n.$$

特に Theorem A は次のように書き直される:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tr}(X{}^tX^*(X{}^tX^* - mI_m)^r) = \operatorname{tr}({}^tXX^*({}^tXX^* - nI_n)^r).$$

以下 この関係式を正準交換関係を使って示す. この計算をスムーズに行うために次の三つの補題を利用する:

Lemma 1.1. 次の等式が成立する:

$${}^tX^*X - mI_n = {}^t({}^tXX^*), \qquad X^*{}^tX - nI_m = {}^t(X{}^tX^*).$$

Lemma 1.2. ふたつの行列 $X{}^tX^*$, ${}^tXX^*$ の要素は互いに可換である:

$$[(X{}^tX^*)_{ij}, ({}^tXX^*)_{kl}] = 0.$$

Lemma 1.3. 次の等式が成立する:

$$(X{}^t({}^tXX^*))_{ij} = \sum_{s=1}^{m} x_{sj}(X{}^tX^*)_{is}.$$

これらの補題の証明はどれも易しい. Lemma 1.1 は交換関係 $[x^*_{ij}, x_{kl}] = \delta_{ik}\delta_{jl}$ からすぐわかる. Lemma 1.2 はふたつの Lie 環 $\mathfrak{gl}_m$, $\mathfrak{gl}_n$ の作用が互いに可換であることからの直接の帰結である. Lemma 1.3 も X の要素が互いに可換であることから容易にわかる.

Lemma 1.1 より

$$X{}^tX^*(X{}^tX^* - mI_m)^r = X({}^tX^*X - mI_n)^r \cdot {}^tX^* = X{}^t({}^tXX^*)^r \cdot {}^tX^*,$$
$${}^tXX^*({}^tXX^* - nI_n)^r = {}^tX(X^*{}^tX - nI_m)^r X^* = {}^tX{}^t(X{}^tX^*)^r X^*$$

であるから, Theorem A は (1) からさらに次のように書き換えられる:

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tr}(X{}^t({}^tXX^*)^r \cdot {}^tX^*) = \operatorname{tr}({}^tX{}^t(X{}^tX^*)^r X^*).$$

ただし ${}^tZ^r$ という記号は 行列 Z の転置の r 乗を表す. 等式 (2) を示すため 次の命題を用意する:

Proposition 1.4. 任意の $Z \in \operatorname{Mat}_{m,n}(\mathcal{PD}(\operatorname{Mat}_{m,n}))$ に対し, 次の等式が成立する:

$$\operatorname{tr}(X{}^t({}^tXX^*)^r \cdot {}^tZ) = \operatorname{tr}(X{}^t({}^tXX^*)^{r-1} \cdot {}^t({}^t(X{}^tX^*)Z)).$$

Proof. 直接的な計算と Lemma 1.3 から主張の等式の左辺は次のように変形できる:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(X{}^t({}^tXX^*)^r\cdot{}^tZ) &= \mathrm{tr}(X{}^t({}^tXX^*){}^t({}^tXX^*)^{r-1}\cdot{}^tZ)\\ &= \sum_{i,j,k}(X{}^t({}^tXX^*))_{ij}({}^t({}^tXX^*)^{r-1})_{jk}({}^tZ)_{ki}\\ &= \sum_{i,j,k,s} x_{sj}(X{}^tX^*)_{is}({}^t({}^tXX^*)^{r-1})_{jk}({}^tZ)_{ki}.\end{aligned}$$

ここで $(X{}^tX^*)_{is}$ と $({}^t({}^tXX^*)^{r-1})_{jk}$ は可換である (Lemma 1.2) から, これは次式に等しい:

$$\sum_{i,j,k,s} x_{sj}({}^t({}^tXX^*)^{r-1})_{jk}(X{}^tX^*)_{is}({}^tZ)_{ki}.$$

注意深く見ると これは Proposition 1.4 の右辺に等しい. □

行列 Z は任意であったから, Proposition 1.4 の式変形は繰り返し行うことができる. 特に次の等式が成り立つ:

Corollary 1.5. 任意の行列 $Z\in\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathcal{PD}(\mathrm{Mat}_{m,n}))$ に対し, 次の等式が成立する:

$$\mathrm{tr}(X{}^t({}^tXX^*)^r\cdot{}^tZ) = \mathrm{tr}(X\cdot{}^t({}^t(X{}^tX^*)^rZ)) = \mathrm{tr}({}^tX{}^t(X{}^tX^*)^rZ).$$

これで Theorem A はほぼ証明された. 実際 目標の等式 (2) は Corollary 1.5 において Z を X^* で置き換えることで得られる.

2. The pair (O_m, Sp_n) in Sp_{mn}. Dual pair (O_m, Sp_n) に関する Theorem B も前節とほぼ同様の計算で証明できる. 概略を記す.

Lie 群 O_m, Sp_n は大きな symplectic 群 Sp_{mn} の部分群と自然に見なすことで, dual pair をなしている. Sp_{mn} の oscillator 表現は急減少函数の空間 $\mathcal{S}(\mathrm{Mat}_{m,n'})$ の上に構成される. ただし $n = 2n'$ とする. まず oscillator 表現における Lie 環 $\mathfrak{o}_m$, $\mathfrak{sp}_n$ の作用を書き下そう. x_{ij} を行列の空間 $\mathrm{Mat}_{m,n'}$ の座標として, 一次の微分作用素の組 $\{p_{ij}, p^*_{ij}\}_{1\le i\le m,1\le j\le n}$ を次のように定める:

$$p_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & 0\le j\le n',\\ \partial_{i,j-n'}, & n'+1\le j\le 2n',\end{cases} \qquad p^*_{ij} = \begin{cases} \partial_{ij}, & 0\le j\le n',\\ -x_{i,j-n'}, & n'+1\le j\le 2n'.\end{cases}$$

ただし $\partial_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$ とする. このとき Lie 環 $\mathfrak{o}_m$, $\mathfrak{sp}_n$ の作用はこれらの微分作用素を要素とする行列 $P = (p_{ij})$, $P^* = (p^*_{ij})$ を用いて次のように表される [H3]:

$$\omega(\boldsymbol{F}) = P{}^tP^* + \frac{n}{2}I_m, \qquad \omega(\boldsymbol{F}') = {}^tPP^* + \frac{m}{2}I_n.$$

ここで $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}'$ は Introduction で定義したそれぞれ $\mathfrak{o}_m$, $\mathfrak{sp}_n$ の生成元を要素とする行列である. したがって Theorem B を証明するためには次を示せばよい:

$$\mathrm{tr}(P{}^tP^*(P{}^tP^* - (m-\tfrac{1}{2})I_m)^r) = \mathrm{tr}({}^tPP^*({}^tPP^* - (n+\tfrac{1}{2})I_n)^r).$$

この等式は, 次の三つの補題を使って 前節と同じ手続きで示すことができる:

Lemma 2.1. 次の等式が成立する:

$$ {}^tP^*P - mI_n = {}^t({}^tPP^*), \qquad P^*{}^tP - nI_m = {}^t(P^tP^*). $$

Lemma 2.2. ふたつの行列 P^tP^*, ${}^tPP^*$ の要素は互いに可換である:

$$ [(P^tP^*)_{ij}, ({}^tPP^*)_{kl}] = 0. $$

Lemma 2.3. 次の等式が成立する:

$$ (P^t({}^tPP^* + \tfrac{1}{2}I_n))_{ij} = \sum_{s=1}^{m} p_{sj}(P^tP^* - \tfrac{1}{2}I_m)_{is}. $$

この三つの補題は 前節の補題とほぼ同じに 容易に証明できる. Lemma 2.3 だけが前節の Lemma 1.3 より少し複雑であるが, これは行列 P の要素が互いに非可換なことによる.

3. The pairs in the orthogonal groups. 直交群における dual pair に関する Theorems C, D, E の証明もほぼ同様である. ただし計算の舞台は通常の微分作用素環ではなく, “外積代数に関する微分作用素環” である Clifford 代数での計算を行うことになる. 前節までの計算に比べると新たに符号の処理が加わるだけで, 本質的には同じ手続きで証明できる. 詳細は[I2] を参照のこと.

REFERENCES

[Ca1] Capelli, A., *Über die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen*, Math. Ann. **29** (1887), 331–338.

[Ca2] ———, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37.

[Ge] Gelfand, I.M., *Center of the infinitesimal groups*, Mat. Sbornik. n. Ser. **26** (68) (1950), 103–112; English transl. in “Collected Papers” Vol. II, pp.22–30.

[H1] Howe, R., *θ-series and invariant theory*, in “Automorphic Forms, Representations, and L-Functions” Part I, Proc. Symp. Pure Math., vol.33, Am. Math. Soc., Providence, R.I.,, 1979, pp. 275–285.

[H2] ———, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Am. Math. Soc. **313** (1989), 539–570; *Erratum*, Trans. Am. Math. Soc. **318** (1990), 823.

[H3] ———, *Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity-free actions and beyond*, in “the Schur Lectures (1992)”, Isr. Math. Conf. Proc. **8** (1995).

[HU] Howe, R., Umeda, T., *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.

[I1] Itoh, M., *Explicit Newton's formulas for* $\mathfrak{gl}_n$, J. Algebra **208** (1998), 687–697.

[I2] ———, *Correspondence of the Casimir operators in the reductive dual pairs*, preprint (2000).

[KV] Kashiwara, M., Vergne, M., *On the Segal-Shale-Weil representation and harmonic polynomial*, Invent. Math. **44** (1978), 1–47.

[KT] Klink, W.H., Ton-That, T., *On resolving the multiplicity of arbitrary tensor products of the* $U(N)$ *groups*, J. Phys. A **21** (1988), 3877–3892.

[L] Leung, E.Y., *On resolving the multiplicity of tensor products of irreducible representations of symplectic groups*, J. Phys. A **26** (1993), 5851–5866.

[LT] Leung, E.Y., Ton-That, T., *Invariant theory of the dual pairs* $(SO^*(2n), Sp(2k, \mathbf{C}))$ *and* $(Sp(2n, \mathfrak{R}), O(N))$, Proc. Am. Math. Soc. **120** (1994), 53–65.

[M] Molev, A., *Sklyanin determinant, Laplace operators, and characteristic identities for classical Lie algebras*, J. Math. Phys. **36** (1995), 923–943.

[MN] Molev, A., Nazarov, M., *Capelli identities for classical Lie algebras*, Math. Ann. **313** (1999), 315–357.

[N] Nazarov, M., *Quantum Berezinian and the classical Capelli identity*, Lett. Math. Phys. **21** (1991), 123–131.

[PP1] Perelomov, A.M., Popov, V.S., *Casimir operators for* $U(n)$ *and* $SU(n)$, Soviet J. Nuclear Phys. **3** (1966), 676–680.

[PP2] ———, *Casimir operators for the orthogonal and symplectic groups*, Soviet J. Nuclear Phys. **3** (1966), 819–824.

[S] Schmidt, M., *Classification and partial ordering of reductive Howe dual pairs of classical Lie groups*, J. Geom. Phys. **29** (1999), 283–318.

[U1] Umeda, T., *The Capelli identities, a century after*, Sugaku **46** (1994), 206–227; (in Japanese); English transl. in "Selected Papers on Harmonic Analysis, Groups, and Invariants", AMS Translations, Series 2, vol. 183 (1998), pp. 51–78, ed. by K. Nomizu

[U2] ———, *Newton's formula for* $\mathfrak{gl}_n$, Proc. Am. Math. Soc. **126** (1998), 3169–3175.

[Z] Želobenko, D.P., *Compact Lie Groups and their Representations*, Translations of Mathematical Monographs **40**, American Mathematical Society, 1973.