数理解析研究所講究録
第1186巻 2001年 145-150

Conditional Expectations と Sampling Functionsを巡る函数解析

東京工業大学名誉教授
梅垣壽春 (HISAHARU UMEGAKI)

表記の Conditional Expectations という概念は，本来は確率論に於ける基本的な部分を形成している．この概念を 1953 年以来，非可換解析を念頭に置いて展開してきたが，今回遡ってその構成の一端を振り返りながら，新たな構成に論を進めたいと思う．

§1. 確率空間上の Conditional Expectations

$\Omega = (\Omega, \mathcal{L}_\Omega, P)$ を確率空間とし，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{L}_\Omega$ 上の σ-部分集合体とする．先ず，$\mathcal{B}$ を制限し，有限な部分集合体とし，その 'atoms' 全体を

$$\mathcal{B}_0 \triangleq \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$$

とし

$$P(A/\mathcal{B}_0) \triangleq \sum_{B \in \mathcal{B}_0} 1_B \cdot P(A \cap B)/P(B) \tag{1.1}$$

と置き，これを $A \in \mathcal{L}_\Omega$ の条件付確率 (relative to $\mathcal{B}_0$) という．茲で 1_B は B の定義函数である．

更に (複素数値) 確率変数 f に対して

$$E(f/\mathcal{B}_0) \triangleq \sum_{B \in \mathcal{B}_0} (1_B(\cdot)/P(B)) \int_B f(\omega) P(d\omega)$$

と置き，これを 'conditional expectation' of f relative to $\mathcal{B}_0$ という．特に $f = 1_A$ とおくと

$$E(f/\mathcal{B}_0) = P(A/\mathcal{B}_0)$$

となる．

Conditional Expectation $E(f/\mathcal{B})$ に関する基本式は，$\forall B \in \mathcal{B}$ に対して

$$\int_B E(f/\mathcal{B})(\omega) P(d\omega) = \int_B f(\omega) P(d\omega) \tag{1.2}$$

であり，この等式 (1.2) が conditional expectation の特性方程式なのである．一般に，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{L}_\Omega$ の一つの σ-部分集合体とする．このとき，$\forall f \in L^1(\Omega)$ に対して，

等式 (1.2) を満たす $\mathcal{B}$-可測な確率変数 $E(f/\mathcal{B})$ が一意に存在する (これの証明はRadon-Nikodym 定理を用いて行う).

Conditional Expectation に関する基本的性質は次の定理によって与えられる.

定理 1.1. 函数空間 $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathcal{L}_\Omega, P)$ $(1 \leq p < +\infty)$ とし, σ-部分集合体 $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}_\Omega$ を与える $\Rightarrow \exists_1 E(f/\mathcal{B}) \in L^p$; 等式 (1.2) を満たす.

定理 1.2. 変換 $f \to E(f/\mathcal{B})$ は $L^p(\Omega) \to L^p(\Omega, \mathcal{B}, P)$ である射影変換で

1°. $\|E(f/\mathcal{B})\|_p \leq \|f\|_p$,

2°. $E(\bar{f}/\mathcal{B}) = \overline{E(f/\mathcal{B})}$, $E(1/\mathcal{B}) = 1$,

3°. $E(fg/\mathcal{B}) = E(f/\mathcal{B}) \cdot g \quad (g \in L^\infty(\Omega))$,

4°. $E(\alpha f + \beta g/\mathcal{B}) = \alpha E(f/\mathcal{B}) + \beta E(g/\mathcal{B})$.

特に, この定理に於いて, $p = 1$ or 2 の場合が重要で, 数学的興味が引かれる.

§2. Banach 空間値確率変数

確率空間 $(\Omega, \mathcal{L}_\Omega, \mu)$ 上で定義され, Banach 空間 $\boldsymbol{B}$ に値をとる確率変数 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \ldots$ を考える. Ω の有限可測分割 $\{A_j\}(\subset \mathcal{L}_\Omega)$ と $\boldsymbol{B}$ の元の有限列 $\{\xi_j\}(\subset \boldsymbol{B})$ に対して Ω 上の函数 $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{f}(\omega) = \sum 1_{A_j}(\omega)\xi_j$ (a.e. $\omega \in \Omega$) を simple random variable という. 更に, この様な函数列 $\{\boldsymbol{f}_n\}$ によって

$$\|\boldsymbol{f}_n(\omega) - \boldsymbol{f}(\omega)\| \to 0 \quad (a.e.\ \omega \in \Omega)$$

である函数 $\boldsymbol{f}$ を strong random variable という.

注. strong convergence の代わりに weak convergence を採用しても同様に定義され (weak random variable), $\boldsymbol{B}$ が可分の場合, 両者 (両可測性) は一致する.

上記の事柄を base にして strong random variables $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \ldots$ の構成する L^p-空間 $(1 \leq p < \infty)$ が定義される:

$$\|\boldsymbol{f}\|_p \triangleq \left(\int_\Omega \|\boldsymbol{f}(\omega)\|^p \mu(d\omega) \right)^{1/p} < +\infty$$

とし,

$$L^p(\Omega; \boldsymbol{B}) = L^p(\Omega, \mathcal{L}_\Omega, \mu; \boldsymbol{B})$$

とおくと, $L^p(\Omega; \boldsymbol{B})$ は Banach 空間となり ($p = \infty$ の場合は, $\| \ \|_\infty = \mathrm{esssup}\|\boldsymbol{f}(\omega)\| < \infty$), 次の Tensor 積構成によって表される:

有限列の対 $\{x_j\} \subset L^p(\Omega)$ と $\{\xi_j\} \subset \boldsymbol{B}$ に対して

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \odot \xi_j \triangleq \sum_{j=1}^{n} x_j(\omega)\xi_j \pmod{\mu}$$

とおく．これは $L^p(\Omega; \boldsymbol{B})$ の要素であり，この形の函数の全体を $L^p(\Omega) \odot \boldsymbol{B}$ で表す．これは Banach 空間の対 $L^p(\Omega)$ と $\boldsymbol{B}$ の間の pre-Tensor 積であり，またそれは $L^p(\Omega; \boldsymbol{B})$ の dense 部分空間であり，且つ $L^p(\Omega; \boldsymbol{B})$ のノルム $[\![\cdot]\!]_p$ は cross-norm になり:

$$[\![x \odot \xi]\!]_p = \|x\|_p \cdot \|\xi\|,\ x \in L^p(\Omega),\ \xi \in \boldsymbol{B} \quad \text{(cf. Schatten [6]).}$$

これより $L^p(\Omega) \odot \boldsymbol{B}$ のノルム $[\![\cdot]\!]_p$ に関する完備化が $L^p(\Omega)$ と $\boldsymbol{B}$ 間の Tensor Product Banach 空間 $L^p(\omega) \otimes \boldsymbol{B}$ である．従って $1 \leq p < +\infty$ のとき

$$L^p(\Omega, \boldsymbol{B}) = L^p(\Omega) \otimes \boldsymbol{B}$$

であり，$\forall \boldsymbol{f} \in L^p(\Omega; \boldsymbol{B})$ は Bochner 可積分である，i.e.，積分値 $\int \boldsymbol{f}(\omega)P(d\omega)$ が $\boldsymbol{B}$ の要素として一意に存在する．また，indentify $\xi = 1 \odot \xi$ $(\xi \in \boldsymbol{B}, 1 = 1_\Omega)$ によって空間 $\boldsymbol{B}$ は $L^p(\Omega; \boldsymbol{B})$ の閉部分空間と見なされ，写像

$$\boldsymbol{f} \to \int \boldsymbol{f}(\omega)P(d\Omega)$$

は norm-one projection $L^p(\Omega, \boldsymbol{B}) \to \boldsymbol{B}$ (onto) となる．

本論で特に必要且つ有用なのは空間 $L^1(\Omega; \boldsymbol{B})$ と $L^\infty(\Omega; \boldsymbol{B})$ である．これらに於ける norm は Schatten Tensor 積，ノルムの対 N_γ, N_λ の記号によって表される:

$$N_\gamma\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \odot \xi_i\right) = \inf \sum_{j=1}^{m} \|y_j\| \cdot \|\eta_j\|$$

$$N_\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \odot \xi_i\right) = \sup \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x^* \rangle \langle \xi_i, \xi^* \rangle$$

茲に，inf は $\left\{\forall y_j \in L^1(\Omega), \forall \eta_j \in \boldsymbol{B}; \sum_{i=1}^{n} x_i \odot \xi_i = \sum_{j=1}^{m} y_j \odot \eta_j\right\}$，sup は $\{\forall x^* \in L^\infty(\Omega), \forall \xi^* \in \boldsymbol{B}\ (\|x^*\|_\infty \leq 1, \|\xi^*\| \leq 1)\}$ についてとる．

N_γ, N_λ はノルム $[\![\cdot]\!]_p$ $(p = 1 \text{ or } \infty)$ と一致する:

$$L^1(\Omega; \boldsymbol{B}) = L^1(\Omega) \otimes_\gamma \boldsymbol{B}$$

$$L^\infty(\Omega) \otimes_\lambda B \subset L^\infty(\Omega; \boldsymbol{B})$$

§3. Conditional Expectations of Strong Random Variables $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in L^1(\Omega, \boldsymbol{B})$

前§の記号をそのまま用いる．Strong random variable $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \ldots \in L^1(\Omega, \boldsymbol{B})$，$\sigma$-subfield $\mathcal{B}$ $(\subset \mathcal{L}_\Omega)$ とし，$\boldsymbol{f}$ の $\mathcal{B}$ に関する $\boldsymbol{B}$-valued conditional expectation $\mathcal{E}(\boldsymbol{f}/\mathcal{B})$ は次の様に定義される:

(i) $\mathcal{E}(\boldsymbol{f}/\mathcal{B})$ は $\mathcal{B}$ に関して強可測で，且つ可積分である，i.e., $\mathcal{E}(\boldsymbol{f}/\mathcal{B}) \in L^1(\Omega, \boldsymbol{B})$.

(ii) $\displaystyle\int_B \mathcal{E}(\boldsymbol{f}/\mathcal{B})(\omega)\mu(d\omega) = \int_B \boldsymbol{f}(\omega)\mu(d\omega)$ for $\forall B \in \mathcal{B}$.

ただし，(ii) の積分は Bochner-Integral である．この vector valued $\boldsymbol{f}$ の Conditional Expectation の存在と構成法が問題となる．

これは次の様に示される．

$$\mathcal{E}(f \odot \xi/\mathcal{B}) = E(f/\mathcal{B}) \odot \xi, \quad f \in L^1(\Omega),\ \xi \in \boldsymbol{B},$$

つまり，$\boldsymbol{f} = f \odot \xi$ の場合に (i), (ii) を適用，これを linear-hull に拡大し，更に Schatten ノルム N_γ の性質を用いて，一般の $\boldsymbol{f} \in L^1(\Omega, \boldsymbol{B})$ に対して Conditional Expectation $\mathcal{E}(\boldsymbol{f}/\mathcal{B})$ が構成される．

以上のように，$\boldsymbol{B}$-valued $\boldsymbol{f}$ に対して通常の Radon-Nikodym 定理と Tensor 積を組み合わせることによって，vector-valued な conditional expectation $\mathcal{E}(\cdot/\cdot)$ が構成される．

$\boldsymbol{B}$-valued Conditional Expectation が定義されると，strong Random variables が構成する Martingale 解析が展開される．Martingales は Conditional Expectations の有向系によって構成され，これの収束定理が $\boldsymbol{B}$-valued σ-additive 測度に対する Radon-Nikodym 定理の特性化に発展する．

§4. Sampling Functions S_λ と空間 BL_λ

表記の函数 S_λ は Entropy 論と共に Shannon 情報理論の支柱と云われる．

Fix された実数 $\lambda > 0$ に対して，函数

$$S_\lambda(t) = \begin{cases} 2\lambda \dfrac{\sin 2\pi\lambda t}{2\pi\lambda t} & (t \neq 0,\ -\infty < t < \infty) \\ 2\lambda & (t = 0) \end{cases}$$

が Sampling Function である．これの Fourier 変換は

$$\hat{S}_\lambda(\omega) = 1_{[-\lambda,\lambda]}(\omega)\ (= \text{区間 } [-\lambda, \lambda] \text{ の定義函数})$$

$$\hat{S}_\lambda(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\omega t} S_\lambda(t)\, dt$$

このSampling functionは様々な，数学的に興味ある性質をもっている．例えば

$$S_\lambda * S_\lambda(t) = \int S_\lambda(t-s)S_\lambda(s)ds = S_\lambda(t) = S_\lambda(-t) = S_\lambda^*(t),$$

$$\varphi_n(t) \triangleq (2\lambda)^{-1}S_\lambda(t-n(2\lambda)^{-1})$$

$\{\varphi_n\} = \{\varphi_n(\cdot); n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ はSampling函数系という．Hilbert空間 $BL_\lambda(= \{f \in L^2(-\infty,\infty); \hat{f}(\omega) = 0\ (|\omega| > \lambda)\})$ に於いて，$\{\varphi_n\}$ はCONS (完全正規直交系) となる．このCONS $\{\varphi_n\}$ を用いてFourier展開すると，ShannonのSampling展開定理が得られる．

§5. Sampling Functions よりConditional Expectationへ

$\forall\lambda > 0$ に対して，Hilbert空間 $L^2(R)$ との射影作用素 P_λ が対応する:

$$P_\lambda f = S_\lambda * f \quad (\lambda > 0).$$

これを用い，$\forall A \in \mathfrak{A}(L^2)$ (L^2 上のbounded operatorsの全体) に対し

$$A^{P_\lambda} \triangleq E[A/P_\lambda] \triangleq P_\lambda A P_\lambda + (1-P_\lambda)A(1-P_\lambda)$$

$$\mathfrak{A}_\lambda \triangleq \{A^{P_\lambda}; A \in \mathfrak{A}\}$$

とおくと，operation $A \to A^{P_\lambda}$, i.e.

$$A \in \mathfrak{A}(L^2) \to A^{P_\lambda} \in \mathfrak{A}_\lambda$$

が得られるが，これに関して次の関係式が成立する:

$$\begin{aligned}
(A^{P_\lambda}B)^{P_\lambda} &= P_\lambda(A^{P_\lambda}B)P_\lambda + (1-P_\lambda)(A^{P_\lambda}B)(1-P_\lambda) \\
&= P_\lambda(P_\lambda A P_\lambda B)P_\lambda + P_\lambda(1-P_\lambda)A(1-P_\lambda)BP_\lambda \\
&\quad +(1-P_\lambda)(P_\lambda A P_\lambda + (1-P_\lambda)A(1-P_\lambda)B(1-P_\lambda) \\
&= P_\lambda A P_\lambda B P_\lambda + 0 + 0 + (1-P_\lambda)A(1-P_\lambda)B(1-P_\lambda)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^{P_\lambda}B^{P_\lambda} &= (P_\lambda A P_\lambda + (1-P_\lambda)A(1-P_\lambda))(P_\lambda B P_\lambda + (1-P_\lambda)B(1-P_\lambda)) \\
&= P_\lambda A P_\lambda B P_\lambda + (1-P_\lambda)A(1-P_\lambda)B(1-P_\lambda)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad (A^{P_\lambda}B)^{P_\lambda} = A^{P_\lambda}B^{P_\lambda} = (AB^{P_\lambda})^{P_\lambda}$$

$$(A^*)^{P_\lambda} = (A^{P_\lambda})^*, \quad (\alpha A + \beta B)^{P_\lambda} = \alpha A^{P_\lambda} + \beta B^{P_\lambda}$$

が成立する．実は，これはvon Neumann Algebrasに於けるconditional expectationの典型的なmodelである, i.e.,

$$A^{P_\lambda} = E[A/P_\lambda] = E[A/\mathfrak{A}_\lambda]$$

である．

付記

von Neumman algebras 上の Conditional Expectations の一般的構成は論文 [11] の I で導入したが，2つの New-Concept を発展して [11] の II, III, IV などと共に，非可換確率や，von Neumann 観測理論・情報理論などを目標とした展開がなされている．Reference に列記した論文は何れもそれに関わるものである．

これにより，作用素系 $\{A^{P_\lambda}; \lambda \in R, \lambda > 0\}$ の martingale の論述に関与していくテーマが予想される．

References

[1] S. D. Chatterji, *Martingale convergence and the Radom-Nikodym Theorem in Banach Spaces*, Math. Scand. **23** (1968), 21-41.

[2] J. L. Doob, *Stochastic Processes*, New York, 1954.

[3] Mieko Hirahara, *On the generalized Randon-Nikodym Theorem and Riesz's Representaion Theorems*, Thesis (1972), 230p.

[4] M. Hirahara and H. Umegaki, *Conditional expectation and channel operators*, 京都大学数理解析研究所講求録 **290** (1977), 42-56.

[5] S-T C. Moy, *Characterization of conditional expectation as a transformation finction spaces*, Pacific J. Math. **4** (1954), 47-65.

[6] M. Nakamura and T. Turumaru, *Expectations in an operator algebra*, Tohoku Math. J. **6** (1954), 182-188.

[7] M. Nakamura and H. Umegaki, *On von Neumann theory of measurements in quantum statistics*, Math. Japan. **7** (1962), 151-157.

[8] R. Schatten, *A Theory of Cross Spaces*, Math. Studies **26** (1956).

[9] I. E. Segal, *Non-commutative extension of abstract integration*, Ann. Math. **57** (1953), 401-457.

[10] C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell System Tech. J. **27** (1948).

[11] H. Umegaki, *Conditional expectation in an operator algebra*, TMJ. **6** (1954), 177-181; II, ibid **8** (1956), 86-100; III Kōdai Math. Sem. Rep. **11** (1959); IV ibid **14** (1962), 59-85.

[12] H. Umegaki and A. T. Barucha-Reid, *Banach space-valued randon variables and tensor product of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **31** (1970), 49-67.

[13] 梅垣壽春, 情報数理の基礎, サイエンス社, 1995 年.

[14] 梅垣壽春, Sampling functions の Fourier Spectral 解析, 京都大学数理解析研究所, 1999 年 6 月.