数理解析研究所講究録
1186巻 2001年 70-77



# ファジィ測度のdistortionについて

本田あおい 岡崎悦明
Aoi Honda & Yoshiaki Okazaki

九州工業大学・情報工学部

## 1 はじめに

ファジィ測度とは $\sigma$-algebra 上で定義される非負単調集合関数である. $g, h$ を集合関数とする. ある非減少関数 $f$ が存在し $g(A) = f(h(A))$ のとき $g$ を $h$ の distortion といい, $f$ を distortion 関数という. 本論文ではファジィ測度が実数区間 $[0,1]$ 上のルベーグ測度の distortion となるための条件, およびその性質について考察する.

## 2 準備

$X$ を集合, $\Sigma$ を $X$ 上の $\sigma$-algebra とする.

**Definition 1** $P : \Sigma \Rightarrow [0,1]$ が次の条件を満たすとき, $P$ を確率測度という.

1. $P(\emptyset) = 0, P(X) = 1$

2. $E_1, E_2, \ldots \in \Sigma, E_n \cap E_m = \emptyset$, $n \neq m$ のとき

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

**Definition 2** $g : \Sigma \Rightarrow [0,1]$ が次の条件を満たすとき, $g$ をファジィ測度という.

1. $P(\emptyset) = 0, P(X) = 1$

2. $A \subset B, \forall A, B \in \Sigma$ のとき $g(A) \leq g(B)$

**Definition 3** $g$ をファジィ測度, $A_n \in \Sigma$ を単調列とする.

$$A_n \uparrow A \Rightarrow g(A_n) \uparrow g(A)$$

のとき, $g$ は下から連続,

$$A_n \downarrow A \Rightarrow g(A_n) \downarrow g(A)$$

のとき, $g$ は上から連続という. 上からも下からも連続のときは単に連続という.

**Definition 4** 二つの集合関数 $g, h$ に対してある非減少関数 $f : R \to R$ が存在し

$$g(A) = f(h(A)) \quad A \in \Sigma$$

とあらわされるとき，$g$ は $h$ の distortion という．このとき $f$ を distortion 関数という.

関数 $f$ は非減少であるので $g$ と $h$ の大小関係はお互いに遺伝している．すなわち，$g$ が $h$ の distortion とは，関数 $g$ は関数 $h$ の大小関係を保存する程度に歪めたもの (スケールを変えたもの) であると考えることができる．ファジィ測度は加法性がなく扱いにくい測度であるが，確率測度やルベーグ測度のような扱いやすい測度の distortion であるファジィ測度は扱いやすい性質を持つと考えることができる．いくつかのファジィ測度の例を以下に示す.

**Definition 5** ファジィ測度 $g$ が次の関係を満たすとき，$\lambda$-ファジィ測度という.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow g(A \cup B) = g(A) + g(B) + \lambda g(A) g(B)$$
$$where -1 < \lambda < +\infty$$

**Proposition 1 (Kruse)** $\lambda$-ファジィ測度は確率測度の distortion である.

この証明は $g(A) = f(P(A))$ となる確率測度 $P$ と distortion 関数 $f$ の存在を示せばよい．実際,

$$\begin{aligned} P(A) &= \log_{(1+\lambda)}(1 + \lambda g(A)) \\ f(x) &= -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}(1+\lambda)^x \end{aligned}$$

とすると，$g(A) = f(P(A))$ となる.
(注意) distortion 関数 $f$ は $-1 < \lambda < 0$ のとき凹関数，$\lambda = 1$ のとき直線, $0 < \lambda < \infty$ のとき凸関数となる.

**Definition 6** ファジィ測度 $g$ が次の性質を持つとき, $g$ を可能性測度という.

$$\sup\{\pi(x) | x \in X\} = 1$$

を満たす関数 $\pi : X \to [0,1]$ が存在して

$$g(A) = sup\{\pi(x) | x \in A\} \quad \forall A \in X$$

とあらわされる.

$X$ が有限集合の場合可能性測度であることは次と同値である.

1. $g(\emptyset) = 0,\ \ g(X) = 1$
2. $g(A \cup B) = g(A) \vee g(B)$

**Proposition 2** 有限集合上の可能性測度は確率測度の distortion である.

**Proof** $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ において, $\Pi(\{x_1\}) \leq \Pi(\{x_2\}) \leq \cdots \leq \Pi(\{x_n\})$ として一般性を失わない. 確率を $P(\{x_k\}) > \sum_{i=1}^{k-1} P(\{x_i\})$ となるように定め, $\Pi(A) = f(P(A))$ とし, 間を非減少となるように (例えば直線など) 補間すると $f$ は非減少となる.

## 3 ルベーグ distorted なファジィ測度

この節ではファジィ測度がルベーグ測度の distortion となるための条件について考察する. 以下 $X = (0,1]$, $\Sigma$ を $(0,1]$ 上の $\sigma$-algebra とする.

$\mathscr{C}$ を

$$(a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup \cdots \cup (a_n, b_n]$$
$$where\ \ 0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq 1$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

であらわされる $(0,1]$ の部分集合の族とする. このとき $\mathscr{C}$ は algebra となる. すなわち

1. $E, F \in \mathscr{C} \Rightarrow E \cup F \in \mathscr{C}$
2. $F \in \mathscr{C} \Rightarrow E^C \in \mathscr{C}$

次に, 移動に対するファジィ測度の弱不変性, 強不変性を導入する.

**Definition 7** $g$ を $\mathscr{C}$ 上のファジィ測度とする. 次の条件を満たすとき $g$ が移動に対して弱不変という.
任意の半開区間 $(a, b] \in \mathscr{C}$ に対して

$$g((a, b]) = g((a, b] - a) = g((0, b - a))$$

**Definition 8** $g$ を $\mathscr{C}$ 上のファジィ測度とする. 次の条件を満たすとき $g$ が移動に対して強不変という.
任意の半開区間 $A = (u, v] \in \mathscr{C}$ と任意の半開区間の有限和 $B = (a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup \cdots \cup (a_n, b_n] \in \mathscr{C}$, ただし $0 \leq u \leq v \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n$ に対して

$$g(A \cup B) = g(A \cup [B - (a_1 - v)])$$

移動に対して弱(強)不変なファジィ測度について次の定理が成り立つ.

**Theorem 1** $g$ を $\mathscr{C}$ 上のファジィ測度とし, $\mu$ をルベーグ測度とする. このとき次が成立する.

$g$ が移動に対して弱不変ならば

$$g((a,b]) = f(\mu((a,b]))$$

を満たす distortion 関数 $f$ が一意に存在する.

**Proof** distortion 関数 $f(x)$ を $f(x) = g((0,x])$ とすると $g$ の単調性より $f$ は非減少である. $g$ の弱不変性より $g((a,b]) = g((0,b-a]) = f(b-a) = f(\mu(a,b])$ となる.

**Theorem 2** $g$ を $\mathscr{C}$ 上のファジィ測度とし, $\mu$ をルベーグ測度とする. このとき次が成立する.

$g$ が移動に対して強不変ならば

$$g(A) = f(\mu(A)), \quad A \in \mathscr{C}$$

を満たす distortion 関数 $f$ が一意に存在する.

**Proof** Theorem 1 と同様に $f(x) = g((0,x])$ とする. 任意の $A = (a_1,b_1] \cup (a_2,b_2] \cup \cdots \cup (a_n,b_n] \in \mathscr{C}$ に対して

$$g(A) = g\left(\left(0, \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)\right]\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)\right) = f(\mu(A))$$

$(0,1]$ 上のボレル $\sigma - algebra$ 上のファジィ測度 $g$ がルベーグ distorted となるためには, さらに条件が必要である.

**Theorem 3** $g$ を $(0,1]$ 上のボレル $\sigma$-algebra $\mathscr{B}$ 上のファジィ測度とし, $\mu$ をルベーグ測度とする. このとき次が成立する.

1. 全ての $x \in (0,1]$ に対して $g((0,x]) = g((0,x))$
2. $g$ が連続
3. $g$ が移動に対して強不変

ならば

$$g(A) = f(\mu(A)), \quad A \in \mathscr{B}$$

を満たす非減少関数 $f$ が一意に存在する.

**Proof** $f(x)=g(((0,x])$ とすると, Theorem 2 より任意の $A\in\mathscr{C}$ について $g(A)=f(\mu(A))$ であるので, $f$ の連続性を示す. 任意の $t_n\downarrow t\in(0,1]$ に対して $\lim(0,t_n]=\bigcap_n(0,t_n]=(0,t]$ である. $g$ の連続性より $g((0,t_n])\downarrow g((0,t])$. したがって $f(t_n))\downarrow f(t)$ となり上からの連続性がいえた. 次に下からの連続性を示す. 任意の $s_n\uparrow s\in(0,1]$ に対して $\lim(0,s_n]=\bigcap_n(0,s_n]=(0,s)$ である. 仮定 1, 2 より $f(s_n)=g((0,s_n])\uparrow g((0,s))=f(s)$. ここで $\mathscr{D}=\{A\in\mathscr{B}|g(A)=f(\mu(A))\}$ とおくと $g$ と $f$ の連続性より $\mathscr{D}$ は単調クラスである. ゆえに $\mathscr{D}=\mathscr{B}.(\because[3])$

# 4 distortion 関数の性質

ここでは, ルベーグ測度の distortion であるファジィ測度の distortion function について考察する. $\mathscr{B}$ を $[0,1]$ 上の Borel $\sigma$-algebra, $\mu$ を $\mathscr{B}$ 上のルベーグ測度とし, ファジィ測度 $g$ は $\mu$ の distortion とする. また, $f$ をこのときの distortion function とする.

**Theorem 4** $g$ が下から連続であるための必要十分条件は $f$ が左連続であること, $g$ が上から連続であるための必要十分条件は $f$ が右連続であることである.

**Proof** 下から連続について必要性を示す. $t_n\uparrow t$ とする. 今 $A_n\subset A_{n+1}$ を $\mu(A_n)=t_n$ ととれば $\mu(A_n)\uparrow\mu(\cup A_n)=t$. 仮定より $g(A_n)\uparrow g(A)$ でありこれは $f(t_n)=f(\mu(A_n))=g(A_n)\uparrow g(A)=f(\mu(A))=f(t)$. 次に十分性を示す. $f$ が左連続ならば任意の $x_n\uparrow x$ に対して $f(x_n)\uparrow f(x)$. また, 任意の $A_n\uparrow A$ に対して $\mu(A_n)\uparrow\mu(A)$ であるので, $f(\mu(A))\uparrow f(\mu(A))$, ゆえに $g(A_n)\uparrow g(A)$. 上から連続についても同様にいえる.

$g$ について, $A,B\in\mathscr{B}$ が $A\cap B=\emptyset$ ならば $g(A\cup B)\geq g(A)+g(B)$ が成り立つとき $g$ を優加法的, 逆に $g(A\cap B)\geq g(A)+g(B)$ が成り立つとき劣加法的という. $g$ が $\lambda$ ファジィ測度であるとき, $g$ が優加法的であることと $f$ が凸関数であることは必要十分である. では, ルベーグ distorted なファジィ測度が優加法的であることの必要十分条件は $f$ が凸関数であることが予想されるが, これには反例が存在する.

**Counter Example** distortion function が

$$f(x)=\left\{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\right\}x.$$

この関数は $f(s+t)\geq f(s)+f(t)$ となるので $g$ は優加法的である. しかしながら $\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{1}{2}$ で $f''(x)\leq 0$ となりこの区間では凹関数となる. すなわち $g$ は優加法的であるが $f$ は凸関数ではない.

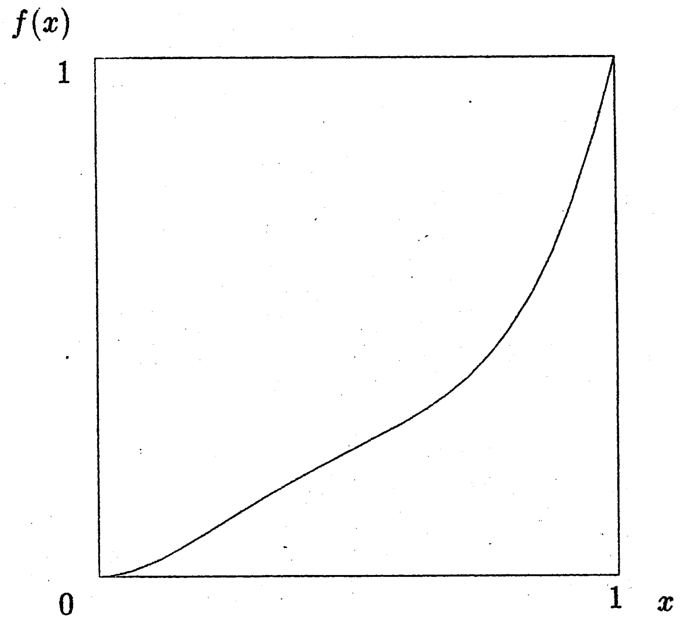

図1 $f(x)=\left\{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\right\}x$ のグラフ

**Definition 9** ファジィ測度 $g$ に対して $A,B\in\mathscr{B}$ ならば $g(A\cup B)+g(A\cap B)\geq g(A)+g(B)$ が成り立つとき $g$ は supermodular という．また，$A,B\in\mathscr{B}$ ならば $g(A\cup B)+g(A\cap B)\leq g(A)+g(B)$ が成り立つとき $g$ は submodular という．

**Theorem 5** $g$ が supermodular であるための必要十分条件は $f$ が凸関数であること，$g$ が submodular であるための必要十分条件は $f$ が凹関数であることである．

**Proof** 必要性を示す．まず，

$$g(A)+g(B)\leq g(A\cup B)+g(A\cap B)$$

ならば

$$f\left(\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x+\frac{k}{2^n}y\right)\leq\left(1-\frac{k}{2^n}\right)f(x)+\frac{k}{2^n}f(y),\quad k<2^n\ x,y\in[0,1] \tag{1}$$

を示す．

(i) $\mu(A)=s,\mu(B)=s,\mu(A\cup B)=s+a,\mu(A\cap B)=s-a$ とすると

$$2f(s)\leq f(s+a)+f(s-a)$$

$s+a=x,s-a=y$ とすると

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right) \tag{2}$$

したがって $n=1$ のとき成り立つ．

(ii) $n$ のとき任意の $k$ で (1) が成り立つとする．(2) で $x=\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x+\frac{k}{2^n}y,\ \ y=$

$\left(1-\frac{k+1}{2^n}\right)x+\frac{k+1}{2^n}y$ とすると

$$f\left(\frac{\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x+\frac{k}{2^n}y+\left(1-\frac{k+1}{2^n}\right)x+\frac{k+1}{2^n}y}{2}\right)$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(f\left(\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x+\frac{k}{2^n}y\right)+f\left(\left(1-\frac{k+1}{2^n}\right)x+\frac{k+1}{2^n}y\right)\right) \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
\text{the left side} &= f\left(\left(1-\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)x+\frac{2k+1}{2^{n+1}}y\right) \\
\text{the right side} &\leq \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{k}{2^n}\right)f(x)+\frac{k}{2^n}f(y)+\left(1-\frac{k+1}{2^n}\right)f(x)+\frac{k+1}{2^n}f(y)\right) \\
&= \left(1-\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)f(x)+\frac{2k+1}{2^{n+1}}f(y)
\end{aligned}$$

すなわち

$$f\left(\left(1-\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)x+\frac{2k+1}{2^{n+1}}y\right)\leq\left(1-\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)f(x)+\frac{2k+1}{2^{n+1}}f(y)$$

よって $n+1$ のときも成り立つ. 次に $f(x)$ が $(0,1)$ で連続であることを示す.
(1) 式で $y=x\pm\delta,\ 0<x\pm\delta<1$ とすると

$$f\left(\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x+\frac{k}{2^n}(x\pm\delta)\right)\leq\left(1-\frac{k}{2^n}\right)f(x)+\frac{k}{2^n}f(x\pm\delta)$$

$$f\left(x\pm\frac{k}{2^n}\delta\right)-f(x)\leq\frac{k}{2^n}\left(f(x\pm\delta)-f(x)\right)$$

さらに $f\left(x+\frac{k}{2^n}\delta\right)-f(x)\geq f(x)-f\left(x-\frac{k}{2^n}\delta\right)$ に注意すれば

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2^n}\left(f(x+\delta)-f(x)\right) &\geq f\left(x+\frac{k}{2^n}\delta\right)-f(x) \\
&\geq f(x)-f\left(x-\frac{k}{2^n}\delta\right) \\
&\geq \frac{k}{2^n}\left(f(x)-f(x-\delta)\right)
\end{aligned}$$

$f(x)$ は $[0,1]\to[0,1]$ であるので, 特に $k=1$ として

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^n}\left(1-f(x)\right) &\geq f\left(x+\frac{1}{2^n}\delta\right)-f(x) \\
&\geq f(x)-f\left(x-\frac{1}{2^n}\delta\right) \\
&\geq \frac{1}{2^n}\left(f(x)-1\right)
\end{aligned}$$

$n \to \infty, \frac{\delta}{2^n} \to 0$ とすれば，これから $f$ の連続性がわかる．よって $f$ は連続．(1) 式で $\frac{k}{2^n} \to \alpha$ とすると，

$$\begin{aligned} \text{the left side} &\to f((1-\alpha)x + \alpha y) \\ \text{the right side} &\to (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \end{aligned}$$

十分性を示すには逆に辿ればよい．submodular についても同様に示すことができる．

## REFERENCES

[1] Z.Wang and G.J.Klir, Fuzzy Measure Theory(Plenum Press, New York and London, 1992).

[2] E.Pap, Null-Additive Set Functions (Kluwer Academic Publishers, 1995).

[3] P. R. Halmos, Measure Theory(Van Nostrand Reinhold Comp., New York, 1969).

[4] R. Kruse, A note on $\lambda$-additive fuzzy measures, Fuzzy Sets and Systems 8(1982), 219-222.