数理解析研究所講究録
1186 巻 2001 年 57-69

非線形写像の強収束定理とその応用

東工大大学院情報理工学研究科
中條一秀 (Kazuhide Nakajo)

1 はじめに

E を狭義凸な実 Banach 空間とし、C を E の空でないコンパクト凸集合とする。T を C から C への nonexpansive 写像とするとき、C の元 x に対して、ω-limit set $\omega(x)$ とは $\omega(x)=\{y\in C\mid y=\lim_{i\to\infty}T^{n_i}x$ with $n_i\to\infty$ as $i\to\infty\}$ で定義される。Edelstein [6] は、$\omega(x)$ の閉凸包 $\overline{co}\omega(x)$ の任意の元 ξ に対して、*Cesàro mean* $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}T^i\xi$ は、T の不動点に強収束することを示した。この結果を、厚芝-高橋 [1] は C の任意の元 ξ に対して示し、拡張した。他方 $\mathcal{S}=\{S(t)|t\geq 0\}$ を、C 上の nonexpansive semigroup とするとき、C の元 x に対して ω-limit set とは $\omega(x)=\{y\in C\mid y=\lim_{n\to\infty}S(t_n)x$ with $t_n\to\infty$ as $n\to\infty\}$ で定義される。Dafermos-Slemrod [5] は、$\overline{co}\omega(x)$ の任意の元 ξ に対して $\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)\xi d\tau$ が $\mathcal{S}$ の共通不動点に強収束することを示した。本論文では、この結果を C 上の asymptotically nonexpansive semigroup に拡張した結果を述べる。

2 準備

本論文を通して Banach 空間は実 Banach 空間として、$\mathbf{N}$ は正の整数全体の集合、R^+ は 0 以上の実数全体の集合を表すものとする。$\Delta^n=\{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\mid\lambda_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^n\lambda_i=1\}$ (n は正の整数) とする。Banach 空間 E が狭義凸であるとは、$\|x\|=\|y\|=1(x\neq y)$ ならば $\|\frac{x+y}{2}\|<1$ となるときをいう。Banach 空間 E の部分集合 C に対して coC で、C の凸包を表すとし、さらに $r>0$ として、$D_r(x)$ で中心 x、半径 r の E での開球を表すとする。そして T を C から C への写像として $F_r(T)=\{x\in C\mid\|x-Tx\|\leq r\}$ と定める。$K>0$ として、$Lip(C,K)=\{T:C\mapsto C\mid\|Tx-Ty\|\leq K\|x-y\|\ \forall x,y\in C\}$ と定め、$Lip(C,1)$ の要素 T は C 上の nonexpansive

写像であるといわれる。また、凸関数 $\gamma: R^+ \mapsto R^+$ のうち、$\gamma(0)=0$、狭義増加、連続であるもの全体を、Γ で表すとする。Banach 空間 E の部分集合 C が convex approximation property をもつとは、任意の正数 ε に対して、正の整数 m が存在して、$coM \subset co_m M + D_\varepsilon(0)$ $(\forall M \subset C)$ が成り立つことである。但し、$co_m M = \{\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \mid x_i \in M, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}$ と定める。C を Banach 空間 E の部分集合として、C 上で定義された写像の族 $\mathcal{S} = \{S(t) | t \geq 0\}$ が、次を満たすならば、C 上の Lipschitz constants $\{k(t) | t \geq 0\}$ をもつた asymptotically nonexpansive semigroup であるという。

(i) $t \mapsto k(t)$ は R^+ から R^+ への連続な関数;

(ii) $\limsup_{t\to\infty} k(t) \leq 1$;

(iii) 任意の $t \geq 0$ に対して、

$S(t): C \mapsto C$ かつ $\|S(t)x - S(t)y\| \leq k(t)\|x-y\|$ $(\forall x, y \in C)$;

(iv) $S(t+s)x = S(t)S(s)x$ $(\forall t, s \geq 0,\ x \in C)$;

(v) $S(0)x = x$ $(\forall x \in C)$;

(vi) 任意の $x \in C$ に対して、$t \mapsto S(t)x$ は連続である。

$\mathcal{S}$ が C 上の asymptotically nonexpansive semigroup であるとは R^+ の部分集合 $\{k(t) | t \geq 0\}$ が存在して、$\mathcal{S}$ が C 上の Lipschitz constants $\{k(t) | t \geq 0\}$ をもつた asymptotically nonexpansive semigroup となることである。特に、$k(t) = 1 (\forall t \geq 0)$ のとき、$\mathcal{S}$ は nonexpansive semigroup であるという。$\mathcal{S} = \{S(t) | t \geq 0\}$ の共通不動点の集合を $F(\mathcal{S})$ で表す。即ち $F(\mathcal{S}) = \cap_{t\geq 0}\{x \in C \mid S(t)x = x\}$。次の補助定理 2.1,2.2 は、Bruck [2] [3] によつて示された。

補助定理 2.1 C を狭義凸 *Banach* 空間の空でないコンパクト凸集合とする。このとき $\gamma \in \Gamma$ が存在して以下を満たす。任意の $K > 0$ と $T \in Lip(C, K)$ に対して、$\|T(\lambda x + (1-\lambda)y) - (\lambda Tx + (1-\lambda)Ty)\| \leq K\gamma^{-1}(\|x - y\| - \frac{1}{K}\|Tx - Ty\|)(\forall x, y \in C,\ \lambda \in [0,1])$ が成り立つ。

補助定理 2.2 C を狭義凸 *Banach* 空間の空でないコンパクト凸集合とする。このとき、任意の正の整数 p に対して $\gamma_p \in \Gamma$ が存在して以下を満たす。任意の $K > 0$ と $T \in Lip(C, K)$ に対して、$\|T(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i) - \sum_{i=1}^p \lambda_i T x_i\| \leq K\gamma_p^{-1}(\max_{1\leq i,j\leq p}\{\|x_i - x_j\| - \frac{1}{K}\|Tx_i - Tx_j\|\})$ $(\forall x_1, x_2, \ldots, x_p \in C, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \Delta^p)$ が成り立つ。

次の補助定理は、厚芝-高橋 [1] のアイデアを用いて示すことができる。

補助定理 2.3 Cを狭義凸Banach空間の空でないコンパクト凸集合とし、$\mathcal{S}=\{S(t)|t\geq 0\}$を$C$上の *asymptotically nonexpansive semigroup* とする。$x\in C,\quad t>0$として、任意の$\varepsilon>0$に対して、$l_0=l_0(t,\varepsilon)\geq 0$と$m_0=m_0(t,\varepsilon)\geq 0$が存在して

$$\left\|\frac{1}{t}\int_0^t S(l+m+\tau)xd\tau-S(l)\left(\frac{1}{t}\int_0^t S(m+\tau)xd\tau\right)\right\|<\varepsilon$$

$(\forall l\geq l_0, m\geq m_0)$を満たす。

証明: $x\in C, t>0, \varepsilon>0$とする。$\{k(t)|t\geq 0\}$を$\mathcal{S}$のLipschitz constantsとする。$\sup\{k(t)|t\geq 0\}=M_0$とおく。$\{k(t)|t\geq 0\}$は有界なので、$M_0<\infty$とわかる。そして、

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{t}\int_0^t S(l+m+\tau)xd\tau-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n S\left(l+m+\frac{t}{n}i\right)x\right\|\\ &\leq \frac{M_0}{t}\sum_{i=1}^n\int_{\frac{i-1}{n}t}^{\frac{i}{n}t}\left\|S(\tau)x-S\left(\frac{t}{n}i\right)x\right\|d\tau\\ &\leq M_0^2\cdot\sup_{0\leq\tau\leq\frac{t}{n}}\left\|S(\tau)x-S\left(\frac{t}{n}\right)x\right\|\quad(\forall l,m\geq 0,n\in\mathbf{N})\end{aligned}$$

が成り立つ。同様に、

$$\begin{aligned}&\left\|S(l)\left(\frac{1}{t}\int_0^t S(m+\tau)xd\tau\right)-S(l)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n S\left(m+\frac{t}{n}i\right)x\right)\right\|\\ &\leq M_0^3\cdot\sup_{0\leq\tau\leq\frac{t}{n}}\left\|S(\tau)x-S\left(\frac{t}{n}\right)x\right\|\quad(\forall l,m\geq 0,n\in\mathbf{N})\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、正の整数N_1が存在して、

$$\left\|\frac{1}{t}\int_0^t S(l+m+\tau)xd\tau-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n S\left(l+m+\frac{t}{n}i\right)x\right\|<\frac{\varepsilon}{3}$$

かつ

$$\left\|S(l)\left(\frac{1}{t}\int_0^t S(m+\tau)xd\tau\right)-S(l)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n S\left(m+\frac{t}{n}i\right)x\right)\right\|<\frac{\varepsilon}{3}$$

$$(\forall l,m\geq 0,n\geq N_1)$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{t}\int_0^t S(l+m+\tau)xd\tau - S(l)\left(\frac{1}{t}\int_0^t S(m+\tau)xd\tau\right)\right\| \qquad (1)\\
&\le \frac{2}{3}\varepsilon + \left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n S\left(l+m+\frac{t}{n}i\right)x - S(l)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n S\left(m+\frac{t}{n}i\right)x\right)\right\| \\
&\qquad (\forall l, m \ge 0, n \ge N_1)
\end{aligned}$$

が成り立つ。$n \ge N_1$ を固定して、$k(l) > 0 (\forall l \ge 0)$ としても一般性を失わないので、補助定理 2.2 より、$\gamma_n \in \Gamma$ が存在して、

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n S\Big(l+m+\frac{t}{n}i\Big)x - S(l)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n S(m+\frac{t}{n}j)x\Big) \right\| \qquad (2)\\
&\le k(l)\cdot\gamma_n^{-1}\Big(\max_{1\le i,j\le n}\Big\{\Big\| S\Big(m+\frac{t}{n}i\Big)x - S\Big(m+\frac{t}{n}j\Big)x \Big\| \\
&\qquad - \frac{1}{k(l)}\Big\| S\Big(l+m+\frac{t}{n}i\Big)x - S\Big(l+m+\frac{t}{n}j\Big)x \Big\|\Big\}\Big) \quad (\forall l, m \ge 0)
\end{aligned}$$

が成り立つ。一方、$\gamma_n \in \Gamma$ より、正数 δ が存在して、

$$k(l)\gamma_n^{-1}(\delta) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall l \ge 0) \qquad (3)$$

が成り立つ。そして、$1 \le i, j \le n$ に対して、$\limsup_{l\to\infty} k(l) \le 1$ より、正数 $l_1 = l_1(i,j)$, $m_1 = m_1(i,j)$ が存在して

$$\begin{aligned}
0 \le &\left\{\left\| S\left(m+\frac{t}{n}i\right)x - S\left(m+\frac{t}{n}j\right)x \right\|\right.\\
&\left. - \frac{1}{k(l)}\left\| S\left(l+m+\frac{t}{n}i\right)x - S\left(l+m+\frac{t}{n}j\right)x \right\|\right\} \le \delta \\
&\qquad (\forall l \ge l_1, m \ge m_1)
\end{aligned}$$

が成り立つ。$l_0 = \max\{l_1(i,j) | 1 \le i, j \le n\}$, $m_0 = \max\{m_1(i,j) | 1 \le i, j \le n\}$ として、

$$\begin{aligned}
&\max_{1\le i,j\le n}\left\{\left\| S\left(m+\frac{t}{n}i\right)x - S\left(m+\frac{t}{n}j\right)x \right\|\right. \qquad (4)\\
&\left. - \frac{1}{k(l)}\left\| S\left(l+m+\frac{t}{n}i\right) - S\left(l+m+\frac{t}{n}j\right)x \right\|\right\} \le \delta
\end{aligned}$$

$$(\forall l \geq l_0, m \geq m_0)$$

が成り立つ。以上(1),(2),(3),(4)より、

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{t}\int_0^t S(l+m+\tau)xd\tau - S(l)\left(\frac{1}{t}\int_0^t S(m+\tau)xd\tau\right)\right\|\\ &\leq \frac{2}{3}\varepsilon + k(l)\gamma_n^{-1}(\delta) < \varepsilon \quad (\forall l \geq l_0, m \geq m_0)\end{aligned}$$

が成り立つ。 □

次の補助定理は、厚芝-高橋[1]によつて示された。

補助定理 2.4 C を *Banach* 空間の空でないコンパクト集合とする。このとき C は *convex approximation property* をもつ。

次の補助定理は Bruck[3, Theorem1.2] のアイデアをもちいて、補助定理 2.2, 2.4 より得られる。

補助定理 2.5 C を狭義凸 *Banach* 空間の空でないコンパクト凸集合とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\delta > 0$ が存在して、$\overline{co}F_\delta(T) \subset F_\varepsilon(T) \quad (\forall T \in Lip(C, 1+\delta))$ が成り立つ。

(証明): $R = diam\, C$ として、$\varepsilon > 0$ とし、ε_0 を、$(3+\varepsilon_0)\varepsilon_0 < \varepsilon$ を満たす正数とする。このとき、補助定理 2.4 より、正の整数 p が存在して、C の任意の部分集合 M に対して、

$$coM \subset co_pM + D_{\varepsilon_0}(0) \tag{5}$$

を満たす。補助定理 2.2 を満たす $\gamma_p \in \Gamma$ に対して、正数 δ を $(1+\delta)\gamma_p^{-1}(2\delta + \delta R) + \delta < \varepsilon_0$ となるように選ぶ。このとき、任意の $T \in Lip(C, 1+\delta)$ に対して、$co_pF_\delta(T) \subset F_{\varepsilon_0}(T)$ が成り立つ。これより (5) を用いて、$coF_\delta(T) \subset F_{\varepsilon_0}(T) + D_{\varepsilon_0}(0)$ が成り立つ。よつて、$coF_\delta(T) \subset F_\varepsilon(T)$ が成り立ち、$\overline{co}F_\delta(T) \subset F_\varepsilon(T)$ を得る。 □

次の補助定理も Bruck[2, Lemma1.5] の手法を用いて示せる。

補助定理 2.6 C を *Banach* 空間の空でない有界閉凸集合とし、$\gamma \in \Gamma$, $L \geq 1$ として、$T \in Lip(C, L)$ は $\|T(\lambda x + (1-\lambda)y) - (\lambda Tx + (1-\lambda)Ty)\| \leq L\gamma^{-1}(\|x-y\| - \frac{1}{L}\|Tx - Ty\|) \quad (\forall x, y \in C, \lambda \in [0,1])$ を満たすものとする。そして、C の点列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ と R^+ の数列 $\{a_n\}$ が $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \|x_{i+1} - Tx_i\| \leq$

$a_n \quad (\forall n \in \boldsymbol{N}),\ \ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|y_{i+1} - Ty_i\| \le a_n \quad (\forall n \in \boldsymbol{N})$ を満たすとき、任意の $\lambda \in [0,1]$ と $n \in \boldsymbol{N}$ に対して、$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|\lambda x_{i+1}+(1-\lambda)y_{i+1}-T(\lambda x_i+(1-\lambda)y_i)\| \le L\gamma^{-1}(\frac{R}{n}+(L-1)R+2a_n)+a_n$ が成り立つ。但し、$R = diam\, C$ とする。

(証明): $n \in \mathbf{N},\ \lambda \in [0,1]$ とし、

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|\lambda x_{i+1} + (1-\lambda)y_{i+1} - T(\lambda x_i + (1-\lambda)y_i)\| \\
&\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|\lambda Tx_i + (1-\lambda)Ty_i - T(\lambda x_i + (1-\lambda)y_i)\| + a_n \\
&\le L\gamma^{-1}\Big(\frac{1}{n}(\|x_1 - y_1\| - \|x_{n+1} - y_{n+1}\|) + (L-1)R \\
&\qquad + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_{i+1} - Tx_i\| + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|y_{i+1} - Ty_i\|\Big) + a_n \\
&\le L\gamma^{-1}\Big(\frac{R}{n} + (L-1)R + 2a_n\Big) + a_n \qquad \text{を得る。}
\end{aligned}
$$

□

次の補助定理は、Bruck[2, Theorem1.1] の手法を利用して、補助定理 2.1, 2.5, 2.6 を用いて示せる。

補助定理 2.7 C を狭義凸 *Banach* 空間の空でないコンパクト凸集合とする。このとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\delta > 0$ と $N_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在して、以下をみたす。任意の $T \in Lip(C, 1+\delta)$ と $\|x_{n+1} - Tx_n\| \le \delta \quad (\forall n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\})$ を満たす C の任意の点列 $\{x_n\}$ に対して、$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x_i \in F_\varepsilon(T) \quad (\forall n \ge N_0)$ が成り立つ。

(証明): $R = diam\, C$ とする。$\varepsilon > 0$ として、正数 ε_0 を $(3+\varepsilon_0)\frac{\varepsilon_0}{3} < \varepsilon$ となるように選ぶ。補助定理 2.5 より、$\eta > 0$ が存在して、任意の $T \in Lip(C, 1+\eta)$ に対して、$\overline{co}F_\eta(T) \subset F_{\frac{\varepsilon_0}{3}}(T)$ をみたし、$\eta < \frac{\varepsilon_0}{6R}$ となるようにとる。さらに $p \in \mathbf{N}$ を $R < \frac{p\eta^2}{2}$ となるようにとる。補助定理 2.1 をみたす $\gamma \in \Gamma$ に対して、$q(t) = (1+t)\gamma^{-1}(Rt+2t)+t \quad (t \ge 0)$ と定義して、$\delta > 0$ を、$q^{p-1}(\delta) < \frac{\eta^2}{2}$ かつ $\delta < \eta$ となるように取れる。さらに、$n \in \mathbf{N}$ に対して、$q_n(t) = (1+t)\gamma^{-1}(\frac{R}{n}+Rt+2t)+t \quad (t \ge 0)$ と定義して、正の整数 $N_0 \ge p$ を、$q_n^{p-1}(\delta) < \frac{\eta^2}{2}$ かつ $\frac{p}{2n}R < \frac{\varepsilon_0}{6}$ $(\forall n \ge N_0)$ を満たすように取れる。$T \in Lip(C, 1+\delta),\quad \|x_{n+1} - Tx_n\| \le \delta\, (\forall n \in \mathbf{N} \cup \{0\})$

として、$w_i = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} x_{i+j}$ として、補助定理2.6より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\|w_i - Tw_i\| &\le \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\|w_{i+1} - Tw_i\| + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\|w_{i+1} - w_i\| \qquad (6)\\ &\le q_n^{p-1}(\delta) + \frac{R}{p} \le \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2}{2} = \eta^2 \quad (\forall n \ge N_0)\end{aligned}$$

を得る。$n \in \mathbf{N}$ として、$A(n) = \{i \in \mathbf{N} \,|\, 0 \le i \le n-1, \|w_i - Tw_i\| \ge \eta\}$, $B(n) = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \setminus A(n)$ と定めて、(6) より、

$$\frac{\sharp A(n)}{n} \le \eta \quad (\forall n \ge N_0) \qquad (7)$$

を得る。$f \in F(T)$ として、

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x_i &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} w_i + \frac{1}{np}\sum_{i=1}^{p-1}(p-i)(x_{i-1} - x_{n+i-1})\\ &= \left(\frac{1}{n}\cdot \sharp A(n) f + \frac{1}{n}\sum_{i\in B(n)} w_i\right)\\ &\quad + \frac{1}{n}\sum_{i\in A(n)}(w_i - f) + \frac{1}{np}\sum_{i=1}^{p-1}(p-i)(x_{i-1} - x_{n+i-1})\end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{1}{n}\cdot \sharp A(n) f + \frac{1}{n}\sum_{i\in B(n)} w_i \in \overline{co}F_\eta(T)$$

次に (7) より、

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{i\in A(n)}(w_i - f)\right\| \le \frac{\sharp A(n)}{n} R < \frac{\varepsilon_0}{6} \quad (\forall n \ge N_0)$$

そして、

$$\left\|\frac{1}{np}\sum_{i=1}^{p-1}(p-i)(x_{i-1} - x_{n+i-1})\right\| \le \frac{R}{np}\cdot\frac{p(p-1)}{2} < \frac{\varepsilon_0}{6} \quad (\forall n \ge N_0)$$

よつて、

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x_i &\in \overline{co}F_\eta(T) + D_{\frac{\varepsilon_0}{6}}(0) + D_{\frac{\varepsilon_0}{6}}(0)\\ &\subset F_{\frac{\varepsilon_0}{3}}(T) + D_{\frac{\varepsilon_0}{3}}(0) \subset F_\varepsilon(T) \quad (\forall n \in N_0)\end{aligned}$$

を得る。 □

次の補助定理は、塩路-高橋 [8, Theorem3] の手法を用いて補助定理 2.5, 2.7 より示せる。

補助定理 2.8 C を狭義凸 *Banach* 空間の空でないコンパクト凸集合とする。このとき、任意の正数 ε に対して、$\delta > 0$ と $N_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在して、以下を満たす。任意の $l \in \boldsymbol{N}$ と $T^l \in Lip(C, 1+\delta)$ を満たす任意の C から C への写像 T に対して、$\|\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} T^i x - T^l(\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} T^i x)\| \leq \varepsilon \quad (\forall m \geq lN_0 + 1, x \in C)$ が成り立つ。

(証明): $\varepsilon > 0$ とする。補助定理 2.5 より、$\varepsilon_0 > 0$ が存在して、任意の $l \in \mathbf{N}$ と $T^l \in Lip(C, 1+\varepsilon_0)$ を満たす任意の C から C への写像 T に対して、$\overline{co}F_{\varepsilon_0}(T^l) \subset F_\varepsilon(T^l)$ が成り立つ。さらに、補助定理 2.7 より、$\eta > 0$ と $N_0 \in \mathbf{N}$ が存在して、任意の $l \in \mathbf{N}$ と $T^l \in Lip(C, 1+\eta)$ を満たす任意の C から C への写像 T に対して、$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^{il} x \in F_{\varepsilon_0}(T^l) \quad (\forall n \geq N_0, x \in C)$ が成り立つ。$\delta = \min\{\varepsilon_0, \eta\}$ とする。$l \in \mathbf{N}$、C から C への写像 T は $T^l \in Lip(C, 1+\delta)$ を満たすとする。上のことより、$\overline{co}F_{\varepsilon_0}(T^l) \subset F_\varepsilon(T^l)$ と $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^{il} x \in F_{\varepsilon_0}(T^l) \quad (\forall n \geq N_0, x \in C)$ が成り立つ。$m - 1 \geq lN_0$ とする。$n \in \mathbf{N}$ と $s \in \{0, 1, 2, \ldots, l-1\}$ を $m - 1 = ln + s$ となるように選ぶと、$n \geq N_0$ とわかる。$s \in \{0, 1, 2, \ldots, l-2\}$ のとき、

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} T^i x \\
&= \frac{n+1}{m}\sum_{j=0}^{s}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} T^{il+j} x\right) + \frac{n}{m}\sum_{j=s+1}^{l-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^{il+j} x\right) \\
&\in \overline{co}F_{\varepsilon_0}(T^l) \subset F_\varepsilon(T^l) \quad (\forall m \geq lN_0 + 1, x \in C)
\end{aligned}
$$

を得る。また $s = l - 1$ のときも同様にして結論を得る。 □

この補助定理の直接の系として以下を得る。

系 2.9 C を狭義凸 *Banach* 空間の空でないコンパクト凸集合として、$\mathcal{S} = \{S(t) | t \geq 0\}$ を C 上の *asymptotically nonexpansive semigroup* とする。このとき、$\limsup_{l\to\infty} \limsup_{t\to\infty} \sup_{x \in C} \|\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)x d\tau - S(l)(\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)x d\tau)\| = 0$ が成り立つ。

(注意) 系 2.9 より、$F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ であることを得る。実際に、$x \in C$, $\quad x_t = \frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)x d\tau \quad (t > 0)$ とおく。C がコンパクトなので、$\{x_t\}$ の部分ネッ

ト $\{x_{t_\alpha}\}$ が存在して C の元 x_0 に強収束する。よつて、

$$\begin{aligned} 0 &= \limsup_{l\to\infty}\limsup_{t\to\infty}\|x_t - S(l)x_t\| \\ &= \limsup_{l\to\infty}\limsup_{\alpha}\|x_{t_\alpha} - S(l)x_{t_\alpha}\| = \limsup_{l\to\infty}\|x_0 - S(l)x_0\| \end{aligned}$$

が成り立ち、このことより $x_0 \in F(\mathcal{S})$ を得る。

3 強収束定理

次の補助定理は、本質的な役割を持つ。

補助定理 3.1 C を狭義凸 *Banach* 空間の空でないコンパクト凸集合とし、$\mathcal{S} = \{S(t)|t \geq 0\}$ を C 上の *asymptotically nonexpansive semigroup* として、$x \in C$ とする。このとき、R^+ 上でのネット $\{i_t\}_{t\geq 0}$ が存在して、任意の $z \in F(\mathcal{S})$ に対して、$\lim_{t\to\infty}\left\|\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau + i_t)xd\tau - z\right\|$ が存在する。

(証明): 厚芝-高橋 [1] の手法をもちいる。$x \in C$ とする。補助定理 2.3 より、R^+ 上でのネット $\{i_t\}_{t\geq 0}$, $\{l_t\}_{t\geq 0}$ が存在して、

$$\left\|\frac{1}{t}\int_0^t S(l+i+\tau)xd\tau - S(l)\left(\frac{1}{t}\int_0^t S(i+\tau)xd\tau\right)\right\| < \frac{1}{t} \tag{8}$$

$(\forall t > 0, i \geq i_t, l \geq l_t)$ を満たす。$z \in F(\mathcal{S})$ として、$s, t > 0$ に対して、

$$\begin{aligned} I &= \left\|\frac{1}{s}\int_0^s S(i_s + i_t + \tau)xd\tau - z\right\| \\ &= \left\|\frac{1}{s}\int_0^s\Big(\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau + \sigma + i_s + i_t)xd\sigma\Big)d\tau + \right. \\ &\qquad \left. \frac{1}{st}\int_0^t (t-\tau)\{S(\tau + i_t + i_s)x - S(s + \tau + i_s + i_t)x\}d\tau - z\right\|, \\ I_1 &= \left\|\frac{1}{st}\int_0^t (t-\tau)\{S(\tau + i_t + i_s)x - S(s+\tau+i_s+i_t)x\}d\tau\right\|, \\ I_2 &= \left\|\frac{1}{s}\int_0^s\Big(\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau+\sigma+i_s+i_t)xd\sigma\Big)d\tau \right. \\ &\qquad \left. -\frac{1}{s}\int_0^s S(\tau + i_s)\left(\frac{1}{t}\int_0^t S(\sigma + i_t)xd\sigma\right)d\tau\right\| \end{aligned}$$

及び

$$I_3 = \left\|\frac{1}{s}\int_0^s S(\tau + i_s)\Big(\frac{1}{t}\int_0^t S(\sigma + i_t)xd\sigma\Big)d\tau - z\right\|.$$

を考えて、$I \leq I_1 + I_2 + I_3$ を満たしている。$R = diam\, C$ として、

$$I_1 \leq \frac{1}{st}\int_0^t (t-\tau)Rd\tau = \frac{t}{2s}R \quad (\forall s, t > 0)$$

(8) より、

$$\begin{aligned} I_2 \leq \frac{1}{s}\int_0^s \Big\| \frac{1}{t}\int_0^t & S(\tau+\sigma+i_s+i_t)xd\sigma \\ & - S(\tau+i_s)\left(\frac{1}{t}\int_0^t S(\sigma+i_t)xd\sigma\right) \Big\| d\tau \\ \leq \ & \frac{1}{s}\int_0^s \frac{1}{t}d\tau = \frac{1}{t} \quad (\forall t > 0, s > 0\, s.t.\, i_s \geq l_t) \end{aligned}$$

$z \in F(\mathcal{S})$ より、$\{k(t) | t \geq 0\}$ を $\mathcal{S}$ の Lipschitz constants として、

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \frac{1}{s}\int_0^s \left\| S(\tau+i_s)\left(\frac{1}{t}\int_0^t S(\sigma+i_t)xd\sigma\right) - z \right\| d\tau \\ &\leq \frac{1}{s}\int_0^s k(\tau+i_s)\left\|\frac{1}{t}\int_0^t S(\sigma+i_t)xd\sigma - z\right\| d\tau \\ &= \frac{1}{s}\int_0^s k(\tau+i_s)d\tau \cdot \left\|\frac{1}{t}\int_0^t S(\sigma+i_t)xd\sigma - z\right\| \quad (\forall s, t > 0) \end{aligned}$$

$\lim_{s\to\infty} I_1 = 0$ を用いて、

$$\begin{aligned} & \limsup_{s\to\infty}\left\|\frac{1}{s}\int_0^s S(\tau+i_s)xd\tau - z\right\| \\ &\quad = \limsup_{s\to\infty}\left\|\frac{1}{s}\int_0^s S(\tau+i_s+i_t)xd\tau - z\right\| \\ &\quad = \limsup_{s\to\infty} I \leq \limsup_{s\to\infty}(I_1+I_2+I_3) \\ &\quad \leq \frac{1}{t} + \left\|\frac{1}{t}\int_0^t S(\sigma+i_t)xd\sigma - z\right\| \cdot \limsup_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int_0^s k(\tau+i_s)d\tau \\ &\quad \leq \frac{1}{t} + \left\|\frac{1}{t}\int_0^t S(\sigma+i_t)xd\sigma - z\right\| \quad (\forall t > 0) \end{aligned}$$

が成り立ち、これより、

$$\limsup_{s\to\infty}\left\|\frac{1}{s}\int_0^s S(\tau+i_s)xd\tau - z\right\| \leq \liminf_{t\to\infty}\left\|\frac{1}{t}\int_0^t S(\sigma+i_t)xd\sigma - z\right\|$$

が成り立ち、$\lim_{t\to\infty}\left\|\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau+i_t)xd\tau - z\right\|$ が存在することがわかる。 □

(注意)　補助定理3.1において、R^+ 上でのネット $\{i'_t\}_{t\geq 0}$ を $i'_t \geq i_t$ ($\forall t \geq 0$) を満たすようにとっても、任意の $z \in F(\mathcal{S})$ に対して、

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau+i_t)xd\tau - z\right\| = \lim_{t\to\infty}\left\|\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau+i'_t)xd\tau - z\right\|$$

が成り立つ。

定理 3.2 C を狭義凸 *Banach* 空間の空でないコンパクト凸集合とし、$\mathcal{S} = \{S(t)|t\geq 0\}$ を C 上の *asymptotically nonexpansive semigroup* とし、$x \in C$ とする。このとき、$\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau+h)xd\tau$ は $h \geq 0$ について一様に $\mathcal{S}$ の共通不動点に強収束する。そして、$Qx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)xd\tau$ ($x \in C$) とすると、Q は C から $F(\mathcal{S})$ への上への *nonexpansive* 写像であり $QS(t) = S(t)Q = Q$ ($\forall t \geq 0$),　$Qx \in \overline{co}\{S(t)x|t\geq 0\}$ ($\forall x \in C$) をみたす。

(証明):　補助定理3.1より、R^+ 上でのネット $\{i_t\}_{t\geq 0}$ が存在して、任意の $z \in F(\mathcal{S})$ に対して、

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau+i_t)xd\tau - z\right\| \tag{9}$$

が存在する。$\Phi_t = \frac{1}{t}\int_0^t S(\tau+i_t)xd\tau$ とおくと、系2.9の (注意) と同様にして、部分ネット $\{\Phi_{t_\alpha}\}$ が存在して $\mathcal{S}$ の共通不動点 y_0 に強収束する。よって、(9) より $\Phi_t \longrightarrow y_0$ となる。補助定理3.1の (注意) より、$\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau + i_t+h)xd\tau$ が $h \geq 0$ について一様に y_0 に強収束することがわかる。よって、$\varepsilon > 0$ として、$t_0 \geq 0$ が存在して、

$$\left\|\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau+i_t+h)xd\tau - y_0\right\| < \varepsilon \quad (\forall t \geq t_0,\, h \geq 0)$$

をみたすので、$R = diam\, C$ として、

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau+h)xd\tau - y_0\right\| \\
&\leq \frac{1}{t}\int_0^{i_s}\left\|\frac{1}{s}\int_0^s S(\tau+h+\sigma)xd\sigma - y_0\right\|d\tau \\
&\quad + \frac{1}{t}\int_0^{t-i_s}\left\|\frac{1}{s}\int_0^s S(\tau+i_s+h+\sigma)xd\sigma - y_0\right\|d\tau \\
&\quad + \frac{1}{ts}\int_0^s (s-\tau)\|S(\tau+h)x - S(t+\tau+h)x\|d\tau \\
&\leq \frac{i_s}{t}R + \frac{t-i_s}{t}\varepsilon + \frac{s}{2t}R \quad (\forall s \geq t_0,\, t \geq i_s,\, h \geq 0)
\end{aligned}$$

ここで、$\varepsilon > 0$ は任意なので、$\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau+h)xd\tau$ は $h \geq 0$ について一様に $y_0 \in F(\mathcal{S})$ に強収束する。そして、$Qx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)xd\tau\ (x \in C)$ は、$\{k(t)|t \geq 0\}$ を $\mathcal{S}$ の Lipschitz constants として、

$$\left\|\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)xd\tau - \frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)yd\tau\right\| \leq \|x-y\| \cdot \frac{1}{t}\int_0^t k(\tau)d\tau$$

が成り立つので、C から $F(\mathcal{S})$ への上への nonexpansive 写像とわかる。その上 $QS(t) = S(t)Q = Q\ (\forall t \geq 0)$, $Qx \in \overline{co}\{S(t)x|t \geq 0\}\ (\forall x \in C)$ も成り立つ。 □

4 応用

まず almost-orbit[2] について紹介する。

定義 4.1 C を *Banach* 空間の空でない集合として、$\mathcal{S} = \{S(t)|t \geq 0\}$ を C 上の *nonexpansive semigroup* として、$u : [0,\infty) \to C$ を連続とする。このとき、$\lim_{t\to\infty}(\sup_{h\geq 0} \|u(h+t) - S(h)u(t)\|) = 0$ を満たす u を $\mathcal{S}$ の *almost-orbit* という。

そして、定理 3.2 と同様にして次の結果を得る。

定理 4.2 C を狭義凸 *Banach* 空間の空でないコンパクト凸集合とし、$\mathcal{S} = \{S(t)|t \geq 0\}$ を C 上の *nonexpansive semigroup* として、$u : [0,\infty) \to C$ を $\mathcal{S}$ の *almost-orbit* とする。このとき、$\frac{1}{t}\int_0^t u(\tau+h)d\tau$ は $h \geq 0$ について一様に $F(\mathcal{S})$ の元に強収束する。

C を Banach 空間 E の空でない集合として、$A : C \to 2^E$ を C 上の m-消散作用素としたとき、A によって生成された $\overline{D(A)}$ 上の nonexpansive semigroup $\mathcal{S} = \{S(t)|t \geq 0\}$ が存在することが知られている [4]。そして、特に、E を一様凸 Banach 空間とし、A を E 上の m-消散作用素として、$f \in L^1(0,\infty;E)$ とする。このとき、Cauchy 問題 ($\frac{d}{dt}u(t) \in Au(t) + f(t)\ (t \geq 0)$, $u(0) = x_0 \in \overline{D(A)}$) の integral solution $u : [0,\infty) \to \overline{D(A)}$ は $\mathcal{S}$ の almost-orbit であることが知られている [7]。この integral solution の漸近的挙動に応用が考えられる。

参考文献

[1] S.Atsushiba and W.Takahashi, *A nonlinear strong ergodic theorem for nonexpansive mappings with compact domains*, Math. Japonica, **52**(2000),183-195.

[2] R.E.Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math.,**32**(1979),107-116.

[3] R.E.Bruck, *On the convex approximation property and the asymptotic behavior of nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math., **38**(1981),304-314.

[4] M.G.Crandall and T.M.Liggett, *Generation of semigroups of nonlinear transformations on general Banach spaces*, Am. J. Math.,**93**(1971),265-298

[5] C.M.Dafermos and M.Slemrod, *Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups*, J. Funct. Anal.,**13**(1973),97-106.

[6] M.Edelstein, *On non-expansive mappings of Banach spaces*, Proc. Camb. Phil. Soc., **60**(1964),439-447.

[7] I.Miyadera and K.Kobayasi, *On the asymptotic behaviour of almost-orbits of nonlinear contraction semigroups in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, **6**(1982),349- 365.

[8] N.Shioji and W.Takahashi, *Strong convergence theorems for continuous semigroups in Banach spaces*, Math. Japonica, **50**(1999),57-66.