数理解析研究所講究録
1187 巻 2001 年 215-220

特異性を持つポテンシャルに対する NON-COLLISION な周期軌道の存在について

平野載倫 (NORIMICHI HIRANO)† ・塩路直樹 (NAOKI SHIOJI)‡
†‡ 横浜国立大学 (YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY)

1. 序

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}(N \geq 3)$ におけるハミルトン系

$$\text{(P)} \qquad \ddot{u}(t) + V'(u(t)) = 0$$

の non-collision な T-周期解の存在について考える。ここで、$V \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ は、原点において特異性を持ち得る関数で、$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus \{0\}$ 上 $V < 0$ を満たし、$|x| \to \infty$ のとき $V(x) \to 0$ 及び $V'(x) \to 0$ を満たすとする。V がいわゆる strong force 条件を満たすときは、この問題に対しては [3, 6, 7, 8] など多くの結果がある。大雑把に言って、strong force 条件とは、2 以上のある定数 α に対し原点の近傍で $V(x) \approx -1/|x|^{\alpha}$ が成り立つことをいう。ここで考える問題の解は、

$$F_T u = \int_0^T \left(\frac{1}{2}|\dot{u}(t)|^2 - V(u(t)) \right) dt, \quad u \in \Lambda_T$$

で定義される汎関数 $F_T : \Lambda_T \to \mathbb{R}$ の臨界点で与えられる。ただし、$\Lambda_T = \{u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) : u(t) \neq 0, u(\cdot + T) = u(\cdot)\}$ は、Hilbert 空間 $H_T = \{u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) : u(\cdot + T) = u(\cdot)\}$ の開部分集合である。strong force 条件は、点列 $\{u_n\} \subset \Lambda_T$ が $H_T \setminus \Lambda_T$ のある点に弱収束するとき $F_T u_n \to \infty$ を示し、いわゆる Palais-Smale 条件がすべての正の実数のレベルで成り立つことを導く。このことから、正数が F_T の臨界値でないとすれば deformation の議論ができることがわかるので、うまく定義された正のミニマックス値は臨界値となる。詳しくは、[3, 8] を参照せよ。

V が strong force 条件を満たさないときは、$\{u_n\} \subset \Lambda_T$ が $H_T \setminus \Lambda_T$ のある点に弱収束しても $F_T u_n \to \infty$ となるとは限らない。それゆえ、正のミニマックス値が臨界値になるとは限らない。この困難を克服し、この問題は [1, 2, 4, 5, 9, 10] で議論されている。特に、原点の近傍で $V(x) \approx -1/|x|$ となるときは、この問題は極めて難しい。この場合を扱っているのは、Ambrosetti–Coti Zelati [1] 及び Giannoni [5] の他には見当たらない。[1] において、原点のある星形有界開近傍の境界上のすべての点で V は最大値をとり、$\overline{\lim}_{|x|\to\infty} V(x)$ は V の最大値より小さいなどの仮定のもとで、T が十分大きいとき求める解が存在するという結果が得られている。[5] の結果も同様のものである。

ここでは、原点の近傍で $V(x) \approx -1/|x|$ でもよく、V は最大値に達する点がない場合を考え、T が十分大きいとき求める解が存在するという結果を示す。

定理. N を 3 以上の自然数とし、$V \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ は

$$\text{すべての } x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus \{0\} \text{ に対し } V(x) < 0$$

$$|x| \to \infty \text{ のとき } V(x) \to 0, V'(x) \to 0$$

$$\varlimsup_{|x|\to 0} V(x) < 0$$

を満たし、

$$|x| \geq R \text{ ならば } \frac{a}{|x|^\alpha} \leq -V(x) \leq \frac{b}{|x|^\alpha}$$

を満たす $R > 0,\ \alpha > 1,\ a > 0,\ b > 0$ が存在すると仮定する。$1 < \alpha < 2$ の場合は

$$a\delta(\alpha) > b$$

が成り立つことも仮定する。ここで、

$$\delta(\alpha) = \frac{2^{1+\alpha}\left(\int_0^{\pi/2} |\sin s|^{2/\alpha}\, ds\right)^\alpha}{(2-\alpha)^{(2+\alpha)/2}(\pi^2\alpha)^{\alpha/2}}$$

である。このとき、T_0 以上の T に対し(P) の *non-collision* な T-周期が存在するということを満たす $T_0 > 0$ が存在する。

註. $1 < \alpha < 2$ ならば $\delta(\alpha) > 1$ である。

2. 定理の証明

$\alpha \geq 2$ の場合は $1 < \alpha < 2$ の場合よりやさしいので、後者の場合のみ示す。以下では、$1 < \alpha < 2$ を仮定する。

$T > 0$ とする。$S_T^1 = [0, T]/\{0, T\}$ とし、$H_T = H^1(S_T^1, \mathbb{R}^N)$ と置き、$u, v \in H_T$ に対し内積を $\langle u, v\rangle_{H_T} = \int_0^T \big((u(t), v(t)) + (\dot{u}(t), \dot{v}(t))\big)\, dt$ と定めることにより H_T を Hilbert 空間とみなす。ただし、$(\cdot,\cdot)$ は $\mathbb{R}^N$ における通常の内積である。

$$\widetilde{H}_T = \left\{u \in H_T : \int_0^T u(t)\, dt = 0\right\}, \quad \Lambda_T = \left\{u \in H_T : \text{すべての } t \in S_T^1 \text{ に対し } u(t) \neq 0\right\}$$

とする。一般性を失うことなく

$$|x| \leq R \text{ ならば } \frac{a}{R^\alpha} \leq -V(x)$$

が成り立つとしてよい。$\widehat{V} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ を

$$\widehat{V}(x) = \begin{cases} V(x) & x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \text{ のとき} \\ \overline{\lim\limits_{|y|\to 0}}\, V(y) & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定め、汎関数 $I_T : H_T \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を

$$I_T u = \int_0^T \left(\frac{1}{2}|\dot{u}(t)|^2 - \widehat{V}(u(t))\right) dt, \quad u \in H_T$$

と定める。$p > 0$ に対し、$I_{p,T} : H_T \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を

$$I_{p,T} u = \int_0^T \left(\frac{1}{2}|\dot{u}(t)|^2 + \frac{p}{|u(t)|^\alpha}\right) dt, \quad u \in H_T$$

と定め、

$$c_p(T) = \min I_{p,T}(\widetilde{H}_T), \qquad \overline{c}_p(T) = \min I_{p,T}(H_T \setminus \Lambda_T)$$

と置く。$I_{p,T}$ は、H_T において弱点列下半連続で、$\widetilde{H}_T$ と $H_T \setminus \Lambda_T$ の両方でコアシブであることから、上記の 2 つはいずれも最小値に達する点が存在することを注意しておく。[9, Propositions 2.1 and 2.2] により、$c_p(T)$ 及び $\overline{c}_p(T)$ の値は次の通りである。

補助定理 1. $p>0$ 及び $T>0$ に対し、

$$c_p(T)=\frac{2+\alpha}{2\alpha}\left((2\pi)^\alpha\alpha\right)^{\frac{2}{2+\alpha}}p^{\frac{2}{2+\alpha}}T^{\frac{2-\alpha}{2+\alpha}},\qquad \overline{c}_p(T)=(\delta(\alpha))^{\frac{2}{2+\alpha}}c_p(T)$$

である。

$(b/(\delta(\alpha)a))^{2/(2+\alpha)}<\beta<1$ を満たす定数 β をとり、

$$d(T)=\beta\,\overline{c}_a(T)-\frac{4\alpha\sqrt{a}}{2-\alpha}R^{\frac{2-\alpha}{2}},\quad T>0$$

と置く。

補助定理 2.

$$T\geq T_1 \text{ のとき } \{u\in H_T: I_Tu<d(T)\}\subset\Lambda_T$$

を満たす $T_1>0$ が存在する。

証明. $T>0$ とする。

$$W(x)=\begin{cases}-\dfrac{a}{|x|^\alpha} & |x|\geq R \text{ のとき}\\ -\dfrac{a}{R^\alpha} & |x|\leq R \text{ のとき}\end{cases}$$

とし、

$$J_Tu=\int_0^T\left(\frac{1}{2}|\dot{u}(t)|^2-W(u(t))\right)dt,\quad u\in H_T$$

と定める。$I_T\geq J_T$ を注意しておく。T が十分に大きいとき $\min J_T(H_T\setminus\Lambda_T)\geq d(T)$ が成り立つことを示せば、証明は完結する。[9, Proposition 2.2] で用いられた評価法を用いる。$e\in S^{N-1}$ とすると、

$$\min J_T(H_T\setminus\Lambda_T)=\min_{\rho\in H_0^1([0,T],\mathbb{R}_+)}\int_0^T\left(\frac{1}{2}|\dot{\rho}(t)|^2-W(\rho(t)e)\right)dt$$

が成り立つ。$\rho\in H_0^1([0,T],\mathbb{R}_+)$ を、$J_T(\rho e)=\min J_T(H_T\setminus\Lambda_T)$ を満たすようにとる。すべての $t\in[0,T]$ に対し $\rho(t)\leq R$ となる場合は、$aT_2/R^\alpha\geq\overline{c}_a(T_2)$ を満たす $T_2>0$ とれば、$T\geq T_2$ のとき $J_T(\rho e)\geq aT/R^\alpha\geq\overline{c}_a(T)>d(T)$ が成り立つ。以下、$\rho(t)>R$ となる $t\in[0,T]$ が存在すると仮定する。このとき、$[0,t_0]$ において ρ は狭義単調増加で、$[t_1,T]$ において ρ は狭義単調増加となり、$[t_0,t_1]$ において ρ は定数となるような $t_0\leq t_1$ を満たす $t_0,t_1\in(0,T)$ が存在する。$\rho^{-1}(R)$ は2点を含むだけだから、$\rho(t)<R$ を満たす $t\in[0,T]$ に対し $f(t)=0$ と置き、$\rho(t)>R$ を満たす $t\in[0,T]$ に対し $f(t)=a\alpha/(\rho(t))^{\alpha+1}$ と置くことにより $f\in L^\infty([0,\infty],\mathbb{R})$ が定められる。ρe は J_T が $H_T\setminus\Lambda_T$ 上で最小値に達する点だから、任意の $\varphi\in C_0^\infty((0,T),\mathbb{R})$ に対し、ρe における φe 方向への汎関数 J_T の Gâteaux 微分は0である。したがって、

$$\int_0^T\dot{\rho}(t)\dot{\varphi}(t)\,dt=\int_0^T f(t)\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

が、すべての $\varphi\in C_0^\infty((0,T),\mathbb{R})$ に対して成り立つ。よって、$\dot{\rho}$ は $(0,T)$ 上連続になり、$\rho(t)\neq R$ を満たす $t\in(0,T)$ に対し $\ddot{\rho}(t)+f(t)=0$ が成り立ち、$t\in(0,T)$ に依存しない

ある負定数 E_J に対して

$$
(2) \qquad \begin{cases} E_J = \dfrac{1}{2}(\dot\rho(t))^2 - \dfrac{a}{R^\alpha} & t \in (0,t^*) \cup (T-t^*,T) \text{ のとき} \\ E_J = \dfrac{1}{2}(\dot\rho(t))^2 - \dfrac{a}{(\rho(t))^\alpha} & t \in (t^*, T-t^*) \text{ のとき} \end{cases}
$$

が成り立つ。このことから、$t \in [0,T]$ に対し $\rho(t) = \rho(T-t)$ が成り立ち、$t_0 = t_1 = T/2$ となり、$t^* = R/\sqrt{2E_J + 2a/R^\alpha}$ と置くと $\rho(t^*) = \rho(T-t^*) = R$ となることがわかる。(1) により $\int_0^T (\dot\rho(t))^2\,dt = \int_{t^*}^{T-t^*} a\alpha/(\rho(t))^\alpha\,dt$ が成り立ち、この式と(2) により $J_T(\rho e) = (1/2+1/\alpha)\int_0^T \dot\rho^2\,dt + 2at^*/R^\alpha$ 及び $-TE_J = (1/\alpha - 1/2)\int_0^T \dot\rho^2\,dt + 2at^*/R^\alpha$ を得る。よって、

$$
J_T(\rho e) = -\frac{2+\alpha}{2-\alpha}TE_J - \frac{2\alpha}{2-\alpha}\frac{2aR^{1-\alpha}}{\sqrt{2E_J + 2a/R^\alpha}}
$$

が成り立つ。また、

$$
\begin{aligned}
\frac{T}{2} - \frac{R}{\sqrt{2E_J + 2a/R^\alpha}} &= \frac{T}{2} - t^* = \int_R^{(-a/E_J)^{1/\alpha}} \frac{1}{\dot\rho}\,d\rho \\
&= \int_R^{(-a/E_J)^{1/\alpha}} \frac{d\rho}{\sqrt{2E_J + 2a/\rho^\alpha}} = \frac{\sqrt{2}a^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha(-E_J)^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} \int_{\sin^{-1}(R^{\alpha/2}\sqrt{-E_J/a})}^{\frac{\pi}{2}} (\sin s)^{\frac{2}{\alpha}}\,ds
\end{aligned}
$$

も成り立つ。この式から、T が十分大きいとき、負定数 E_J は、十分0に近いかあるいは $-a/R^\alpha$ に近いことがわかる。ところが、後者の場合は起こらない。なぜなら、そのときは $J_T(\rho e) = O(T)$ であるが、前者の場合は $J_T(\rho e) = O(T^{(2-\alpha)/(2+\alpha)})$ となるからである。したがって、$\beta = \left(\int_\theta^{\frac{\pi}{2}} (\sin s)^{\frac{2}{\alpha}}\,ds / \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin s)^{\frac{2}{\alpha}}\,ds\right)^{2\alpha/(2+\alpha)}$ を満たす定数 $\theta \in (0,\pi/2)$ を取ると、$T \geq T_3$ ならば $\sin^{-1}\left(R^{\alpha/2}\sqrt{-E_J/a}\right) < \theta$ を満たす $T_3(\geq T_2)$ が存在する。よって、$T \geq T_3$ のとき

$$
\frac{T}{2} \geq \frac{\sqrt{2}a^{1/\alpha}}{\alpha(-E_J)^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} \int_\theta^{\frac{\pi}{2}} (\sin s)^{\frac{2}{\alpha}}\,ds
$$

が成り立つ。さて、$I_{a,T}u = \min I_{a,T}(H_T \setminus \Lambda_T)$ 及び $u(0) = u(T) = 0$ を満たす $u \in H_T \setminus \Lambda_T$ をとり、$E_I = |\dot u(t)|^2/2 - a/|u(t)|^\alpha$ と置く。E_I も $t \in (0,T)$ によらない定数である。上と同様の評価で、$T > 0$ に対し

$$
\frac{T}{2} = \frac{\sqrt{2}a^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha(-E_I)^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin s)^{\frac{2}{\alpha}}\,ds
$$

を得る。よって、$T \geq T_3$ のとき、$E_J/E_I \geq \beta$ が成り立つ。$T \geq T_1$ ならば $E_J \geq -a/(2R^\alpha)$ となる $T_1(\geq T_3)$ を取る。$I_{a,T}u = -(2+\alpha)/(2-\alpha)TE_I$ に注意して、$T \geq T_1$ のとき

$$
J_T(\rho e) \geq -\frac{2+\alpha}{2-\alpha}TE_I\beta - \frac{4\alpha\sqrt{a}}{2-\alpha}R^{\frac{2-\alpha}{2}} = d(T)
$$

を得る。よって、証明された。 □

T_1 を 補助定理 2 で得られた定数とし、$d(T_0) > c_b(T_0)$ を満たす $T_0(\geq T_1)$ を取る。以下では、$T \geq T_0$ とする。

Λ_T において I_T は Fréchet 微分可能であることを注意する。$u \in \Lambda_T$ に対し、$\nabla I_T u$ は、すべての $v \in H_T$ に対し

$$\langle \nabla I_T u, v \rangle_{H_T} = \int_0^T \big((\dot{u}(t), \dot{v}(t)) - (V'(u(t)), v(t)) \big)\, dt$$

を満たす H_T の元とする。$c \in \mathbb{R}$ とする。$\nabla I_T u_n \to 0$ かつ $I_T u_n \to c$ を満たす Λ_T の任意の点列 $\{u_n\}$ が Λ_T のある元に強収束する部分列を持つとき、Λ_T において I_T は $(\mathrm{PS})_c$ を満たすという。

補助定理 3. $0 < c < d(T)$ のとき、Λ_T において I_T は $(\mathrm{PS})_c$ を満たす。

証明. $0 < c < d(T)$ とする。$\nabla I_T u_n \to 0$ かつ $I_T u_n \to c$ を満たす Λ_T の点列 $\{u_n\}$ をとる。$\{\int_0^T |\dot{u}_n|^2\, dt\}$ が有界であることは明らかである。H_T において $\{u_n\}$ は有界ではないとすると、$|\overline{u}_n| \to \infty$ としてよい。ただし、$\overline{u}_n = (1/T)\int_0^T u_n(t)\, dt$ である。ところが、$\langle \nabla I_T u_n, u_n - \overline{u}_n \rangle_{H_T} \to 0$ より、$I_T u_n \to 0$ となるので、$c > 0$ に矛盾する。よって、H_T において $\{u_n\}$ は有界となるので、$\{u_n\}$ は、ある $u \in H_T$ に弱かつ一様に収束しているとしてよい。補助定理 2 かつ I_T の弱点列下半連続性により、$u \in \Lambda_T$ である。$\langle \nabla I_T u_n, u_n - u \rangle_{H_T} \to 0$ より、$\int_0^T |\dot{u}_n - \dot{u}|^2\, dt \to 0$ を得る。したがって、H_T において $\{u_n\}$ は u に強収束する。 □

問題の解を見つけるために、Bahri–Rabinowitz [3] によって与えられ Tanaka [10] によって改良されたミニマックス法を用いる。$\gamma \in C(S^{N-2}, \Lambda_T)$ に対し

$$\widetilde{\gamma}(x,t) = \frac{\gamma(x)(t)}{|\gamma(x)(t)|}, \quad (x,t) \in S^{N-2} \times S^1_T$$

と $\widetilde{\gamma} : S^{N-2} \times S^1_T \to S^{N-1}$ を定め、

$$\Gamma_T = \{\gamma \in C(S^{N-2}, \Lambda_T) : \deg \widetilde{\gamma} \neq 0\}$$

と置く。ここで、$\deg \widetilde{\gamma}$ は $\widetilde{\gamma}$ の Brouwer 写像度である。以下で、$\inf_{\gamma \in \Gamma_T} \max_{x \in S^{N-2}} I_T(\gamma(x))$ は I_T の臨界値であることを示す。

補助定理 4.

$$0 < \inf_{\gamma \in \Gamma_T} \max_{x \in S^{N-2}} I_T(\gamma(x)) < d(T).$$

証明. [3, Proposition 1.4] と同じ議論により、$0 < \inf_{\gamma \in \Gamma_T} \max_{x \in S^{N-2}} I_T(\gamma(x))$ がわかる。以下、もう一方の不等号を示す。$e_1 \in S^{N-2}$ かつ $e_N \perp S^{N-2}$ を満たす $e_1, e_N \in S^{N-1}$ を取る。[8, Theorem 1.5] の証明にあるように

$$\gamma(x)(t) = \begin{cases} R_T\left(x \sin\dfrac{2\pi t}{T} + e_N \cos\dfrac{2\pi t}{T}\right) & (x,t) \in S^{N-2} \times [0, T/2] \text{ のとき} \\[2ex] R_T\left(e_1 \sin\dfrac{2\pi t}{T} + e_N \cos\dfrac{2\pi t}{T}\right) & (x,t) \in S^{N-2} \times [T/2, T] \text{ のとき} \end{cases}$$

と $\gamma \in C(S^{N-2}, \Lambda_T)$ を定める。ただし、$R_T = \big(b\alpha T^2/(4\pi^2)\big)^{1/(2+\alpha)}$ である。$\deg \widetilde{\gamma} \neq 0$ かつ $\max_{x \in S^{N-2}} I_T(\gamma(x)) \le c_b(T) < d(T)$ が容易にわかるので証明された。 □

定理の証明. $c = \inf_{\gamma \in \Gamma_T} \max_{x \in S^{N-2}} I_T(\gamma(x))$ と置く。c が I_T の臨界値であることを示す。このことを否定する。すると、$u \in H_T$ かつ $|I_T u - c| \le 2\varepsilon$ ならば $\|\nabla I_T u\|_{H_T} \ge 2\varepsilon$ を満たす $\varepsilon \in \big(0, \min\{d(T) - c, c\}/2\big)$ が取れる。このとき、

(i) すべての $u \in H_T$ に対し $\eta(0,u) = u$

(ii) すべての $(s,u) \in [0,1] \times H_T$ に対し $I_T(\eta(s,u)) \le I_T u$

(iii) $\eta(1, I_T^{c+\varepsilon}) \subset I_T^{c-\varepsilon}$

を満たす $\eta \in C([0,1] \times H_T, H_T)$ が存在する。ここで、$\sigma \in \mathbb{R}$ に対し、$I_T^\sigma = \{u \in H_T : I_T u \le \sigma\}$ である。$\max_{x \in S^{N-2}} I_T(\gamma(x)) < c + \varepsilon$ を満たす $\gamma \in \Gamma_T$ を取る。(i), (ii) かつ 補助定理 3 により $\eta(1, \gamma(\cdot)) \in \Gamma_T$ である。また、$\max_{x \in S^{N-2}} I_T(\eta(1, \gamma(x))) \le c - \varepsilon$ となる。これは、c の定義に矛盾する。よって、c は I_T の臨界値であることが証明された。 □

参考文献

[1] A. Ambrosetti and V. Coti Zelati, *Non-collision orbits for a class of Keplerian-like potentials,* Ann. Inst. Henri Poincare, Anal. Non Lineaire 5 (1988), 287–295.

[2] A. Ambrosetti and V. Coti Zelati, *Perturbation of Hamiltonian systems with Keplerian potentials,* Math. Z. 201 (1989), 227–242.

[3] A. Bahri and P. H. Rabinowitz, *A minimax method for a class of Hamiltonian systems with singular potentials,* J. Funct. Anal. 82 (1989), 412–428.

[4] M. Degiovanni and F. Giannoni, *Dynamical systems with Newtonian type potentials,* Annali Sucola Norm. Sup. Pisa 15 (1988), 467–494.

[5] F. Giannoni, *Periodic solutions of dynamical conservative systems outside prescribed regions,* Boll. Un. Mat. Ital. (7) 3-B (1989), 547–557.

[6] W. B. Gordon, *Conservative dynamical systems involving strong forces,* Trans. Amer. Math. Soc. 204 (1975), 113–135.

[7] C. Greco, *Periodic solutions of a class of singular Hamiltonian systems,* Nonlinear Anal. 12 (1988), 259–269.

[8] P. H. Rabinowitz, *Periodic solutions for some forced singular Hamiltonian systems,* in Analysis, et cetera, Research papers published in Honor of Jürgen Moser's 60th Birthday, Edited by P. H. Rabinowitz and E. Zehnder, 521–544, Academic Press, San Diego, 1990.

[9] M. Ramos and S. Terracini, *Noncollision periodic solutions to some singular dynamical systems with very weak forces,* J. Diff. Eq. 118 (1995), 121–152.

[10] K. Tanaka, *Non-collision solutions for a second order singular Hamiltonian system with weak force,* Ann. Inst. Henri Poincare, Anal. Non Lineaire 10 (1993), 215–238.